BELIN sup

Physique

CAPES de Sciences physiques

TOME 1 - PHYSIQUE COURS ET EXERCICES

3e édition

Nicolas BILLY • Jean DESBOIS
Marie-Alix DUVAL • Mady ELIAS • Pascal MONCEAU
Aude PLASZCZYNSKI • Michel TOULMONDE

BELIN 8, rue Férou 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.com

Dans la collection Belin Sup Sciences

S. Bach, F. Buet, G. Volet
CAPES de Sciences physiques. Tome 2. Chimie, cours et exercices

M. Guymont
Structure de la matière, cours

A. Maurel
Optique ondulatoire, cours
Optique géométrique, cours

A. Maurel, J.-M. Malbec
Optique géométrique, rappels de cours et exercices

A. Maurel et G. Bouchet
Optique ondulatoire, rappels de cours et exercices

J. Bruneaux, M. Saint-Jean et J. Matricon
Électrostatique et magnétostatique, cours
Électrostatique et magnétostatique, rappels de cours et exercices

Dans la collection Belin Sup Histoire des Sciences

R. Lehoucq et J.-P. Uzan
Les constantes fondamentales

O. Darrigol
Les équations de Maxwell. De MacCullagh à Lorentz

A. Barberousse
La mécanique statistique. De Clausius à Gibbs

M. Blay
La science du mouvement. De Galilée à Lagrange

Aude Plaszczynski et Marie-Alix Duval remercient respectivement Daniel André et Henri Sergolle dont les excellents polycopiés ont inspiré des parties des chapitres 8 et 10.

Photo de couverture © CNRS photothèque/F. Livolant.
Schémas : Laurent Blondel/Corédoc

Le code de la propriété intellectuelle n'autorise que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » [article L. 122-5] ; il autorise également les courtes citations effectuées dans un but d'exemple ou d'illustration. En revanche « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » [article L. 122-4].
La loi 95-4 du 3 janvier 1994 a confié au C.F.C. (Centre français de l'exploitation du droit de copie, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), l'exclusivité de la gestion du droit de reprographie. Toute photocopie d'œuvres protégées, exécutée sans son accord préalable, constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Éditions Belin, 2004 ISSN 1158-3762 ISBN 2-7011-4067-6

Sommaire

1. MÉCANIQUE (Pascal Monceau) 13
Dynamique du point matériel 15
Grandeurs cinétiques fondamentales 15
Principe de l'inertie ; référentiels galiléens (1re loi de Newton) 15
Principe fondamental de la dynamique. Référentiels galiléens (2e loi de Newton) 16
Principe des actions réciproques (3e loi de Newton) 16
Principe fondamental de la dynamique. Cas des référentiels non galiléens 17
Théorème du moment cinétique 18
Théorème de l'énergie cinétique 18
Interactions conservatives. Énergie potentielle, énergie mécanique 19
Forces centrales 20
Oscillateur harmonique à une dimension. Oscillations libres 20
Mouvement d'une particule au voisinage d'une position d'équilibre stable 20
Oscillateur harmonique unidimensionnel non amorti 21
Oscillateur harmonique unidimensionnel amorti par frottement fluide 21
Aspect énergétique 23
Oscillations forcées : l'oscillateur harmonique entretenu ; résonance 23
Recherche du régime permanent 23
Comportement de la réponse en amplitude en fonction de la fréquence 24
Aspect énergétique 25
Mécanique des systèmes 26
Préliminaire 26
Centre d'inertie ; référentiel barycentrique 26
Quantité de mouvement 27
Moment cinétique 27
Énergie cinétique. Conservation de l'énergie 28
Théorèmes de Koenig 29
Réduction canonique du problème à deux corps 29
Mécanique du solide indéformable 30
Éléments de cinématique du solide 30
Moment cinétique, énergie cinétique, opérateur d'inertie 31
Solide en rotation autour d'un axe fixe 32
Moments d'inertie à connaître 33
Théorème de Huygens 34
Contact entre solides. Frottement de glissement, lois de Coulomb 34
Roulement sans glissement 35
Statique des fluides 36
Notion de pression 36
Loi fondamentale de l'hydrostatique 36

Théorème d'Archimède 36
Exercices 37
Solutions 62

2. ÉLECTROMAGNÉTISME (Mady Elias) 121
Électrostatique : charges - forces - champ et potentiel électrostatiques 124
Les charges électriques 124
L'interaction coulombienne 124
Le champ électrostatique 124
Le potentiel électrostatique 125
Théorème de Gauss 126
Les équations locales de l'électrostatique 127
Circulation conservative 127
Expression locale du théorème de Gauss 128
Propriétés du potentiel 129
Définition et continuité des champs et des potentiels 130
Les conducteurs en électrostatique 131
Conducteur en équilibre électrostatique – champ et potentiel 131
Capacité d'un conducteur seul dans l'espace 131
Plusieurs conducteurs en équilibre électrostatique 132
Influence totale 132
Condensateurs 132
Énergie potentielle d'interaction électrostatique 133
Système de charges ponctuelles 133
Distribution continue de charges 133
Distribution volumique de charges 133
Énergie associée au champ électrique 133
Utilisation de l'énergie pour le calcul des forces électrostatiques 134
Magnétostatique : champ et force magnétiques 134
Force magnétique 134
Champ magnétique : loi de Biot et Savart 135
Exemples de calcul de $\vec{B}$ à partir de la loi de Biot et Savart 135
Symétries du champ magnétique. Théorème d'Ampère 136
Symétries par rapport à un plan 136
Symétries par rapport à un plan + inversion du sens des courants (transformation S.I.) 137
Circulation du champ magnétique 137
Potentiel-vecteur. Flux et circulation du champ magnétique 139
Le potentiel-vecteur 139
Flux du champ magnétique 140
Équation locale portant sur le potentiel-vecteur 140
Relations de passage pour le champ magnétique 141
Induction électromagnétique 141
Expérience fondamentale de Faraday (1831) 141
Autres conditions de manifestation du phénomène d'induction 143
Induction mutuelle et auto-induction dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires 143

Étude d'une bobine réelle dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires 144
Le moteur à courant continu 144
Constitution d'un moteur 144
Phénomène d'induction 145
Couple électromagnétique 146
Moteur à excitation indépendante (ou séparée) 147
Moteur à excitation série 148
Les équations de l'électromagnétisme en régime variable 149
Équation de continuité (conservation de la charge électrique) 149
Équation de Maxwell - Ampère 149
Potentiels 150
Ondes électromagnétiques dans le vide 151
Équation de propagation 151
Une solution particulièrement simple : l'onde plane homogène 151
Ondes sinusoïdales. Polarisation 152
Énergie électromagnétique : densité volumique et flux 153
Vue d'ensemble des radiations électromagnétiques 154
Électromagnétisme de la matière : étude macroscopique des diélectriques 154
Mise en évidence du rôle des diélectriques en électrostatique : polarisation induite ... 154
Vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ 154
Susceptibilité électronique χ_e 155
Répartition des charges de polarisation 155
Potentiel et champ à l'intérieur du diélectrique 155
Équations de Maxwell et conséquences 156
Électromagnétisme de la matière : étude microscopique des diélectriques 156
Polarisation électronique des atomes 156
Polarisation des molécules 157
Bilan des polarisations des diélectriques 157
Électromagnétisme de la matière : milieux aimantés 158
Dipôle magnétique 158
Moments dipolaires magnétiques dans la matière 159
Description d'un échantillon de matière aimantée 160
Équations de Maxwell dans la matière aimantée 160
Exercices 161
Solutions 198

3. ÉLECTROCINÉTIQUE (Michel Toulmonde) 255
L'interaction électrique 257
Domaines d'étude 257
Les interactions en physique 257
Le champ électrique 257
Le potentiel électrique 258
Capacité électrique 259
Les circuits électriques 260
Courant électrique 260
Loi d'Ohm pour un conducteur 261

Dipôle électrocinétique 261
Résistance pure (conducteur ohmique) 263
Loi d'Ohm généralisée 264
Lois des circuits électriques (lois générales) 266
Loi de Joule, énergie, puissance 269
Les régimes sinusoïdaux 270
Grandeurs sinusoïdales 270
Intensité efficace (effet Joule) 271
Loi d'Ohm en régime sinusoïdal (circuit RLC série) 271
Circuit oscillant « parallèle » (circuit bouchon) 274
Puissance en régime sinusoïdal 274
Les régimes variables 276
Régime transitoire avec *R*, *L* ou *C* 276
Charge et décharge d'un condensateur 276
Courant transitoire dans une bobine 277
Décharge d'un condensateur dans une bobine (*RLC* série) 278
Mesure de déphasage à l'oscilloscope 280
Exercices 281
Solutions 287

4. ÉLECTRONIQUE (Mady Elias) 301
Réseaux linéaires en régime permanent 303
Lois de Kirchhoff 303
Théorème de superposition 303
Théorème de Thévenin 303
Théorème de Norton 304
Théorème de Millman 304
Conseils d'utilisation 305
Diodes 305
Semi-conducteurs 305
Jonction p-n d'une diode semi-conductrice 306
Caractéristiques d'une diode 308
Applications 309
Transistors 310
Description du transistor bipolaire npn 310
Le transistor amplificateur 312
Amplificateur opérationnel ou amplificateur de différence intègre 314
L'amplificateur opérationnel 314
Fonctionnement de l'A.O. en régime linéaire 316
Fonctionnement en régime de saturation 316
L'amplificateur opérationnel réel 317
Écarts à la perfection des A.O. réels 318
Modulations 318
Principe de la modulation 318
Modulation d'amplitude 319
Modulation de fréquence 322

Conversions numérique-analogique et analogique-numérique 324
Généralités sur la conversion 324
Conversion numérique-analogique (CNA) 325
Conversion analogique numérique (CAN) 326
Exercices 327
Solutions 349

5. ONDES (Jean Desbois) 383
Introduction 384
Équations d'ondes 384
Propagation unidimensionnelle (ondes planes) 384
Dispersion 386
Ondes électromagnétiques dans le vide 386
Équations de Maxwell dans le vide 386
Propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide 388
Détection des ondes centimétriques 390
Ondes électromagnétiques dans la matière 390
Équations de Maxwell dans les milieux matériels 391
Conditions de passage 391
Exemples de milieux matériels 392
Réflexion et transmission (incidence normale) 393
Onde « basse fréquence » dans un métal. Épaisseur de peau 395
Pression de radiation 397
Ondes acoustiques dans un fluide parfait 397
Équation d'ondes 398
Impédance acoustique caractéristique (ou itérative). Réflexion, transmission (incidence normale) 399
Ultrasons 399
L'effet Doppler 400
La source *S* et le récepteur *R* ont des mouvements colinéaires 400
Cas général non relativiste 401
L'onde se réfléchit sur R avant d'être captée par S 401
Effet Doppler relativiste. Décalage vers le rouge 403
Exercices 404
Solutions 425

6. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE (Jean Desbois) 459
Lois de Descartes. Stigmatisme 460
Chemin optique 460
Principe de Fermat 460
Lois de Descartes 460
Stigmatisme 461
Image d'un point objet 461
Aplanétisme. Grandissement linéaire 462

L'optique de Gauss 462
Conditions de Gauss 462
Éléments cardinaux d'un système centré 463
Dioptres 465
Lentilles. Doublets 466
Qualités des instruments d'optique 471
Grandissement linéaire γ 471
Puissance P (pour loupes et microscopes) 471
Grossissement G 473
Champ 474
Pouvoir séparateur. Limite de résolution 475
Fibres optiques 477
Fibres à saut d'indice 478
Fibres à gradient d'indice 478
Fibres multimodes. Fibres monomodes 479
Dispersion 480
Pertes. Coefficient d'atténuation linéique 481
Matériau utilisé. Procédé de fabrication 481
Utilisation et intérêt des fibres optiques 482
Compléments 482
Miroirs 482
Rétroprojecteur 483
Grandeurs photométriques 484
L'œil 485
Exercices 486
Solutions 501

7. OPTIQUE ONDULATOIRE (Nicolas Billy) 531
Description d'une onde électromagnétique 533
Onde électromagnétique monochromatique plane, polarisée rectilignement, dans le vide 533
Onde électromagnétique monochromatique plane dans un milieu d'indice n 535
Amplitude complexe et intensité de l'onde lumineuse 536
Quelques ordres de grandeur 537
La polarisation de la lumière 538
Lumière polarisée : polarisation linéaire, circulaire, elliptique 538
Polariseur, loi de Malus 539
Cohérence temporelle 540
Un modèle simple de cohérence temporelle 541
Quelques ordres de grandeur 543
Lumière naturelle (ou non polarisée) 543
Coefficients de réflexion et de transmission (à incidence normale) 544
Coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude 544
Coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie 545

Les trous de Young 546
Description 547
Méthode de calcul des déphasages en optique physique 547
Intensité des interférences lumineuses 548
Description de la figure d'interférences, interfrange 550
Quelques variations sur le thème « trous de Young » 551
Observations des interférences de type trous de Young 560
Interférences non localisées et interférences localisées 561
Interférences par division d'amplitude 562
Franges d'égale inclinaison 562
Franges d'égale épaisseur 565
Interféromètres 568
Interféromètre à deux ondes (ou interféromètre à faisceaux séparés) 568
Interféromètre à ondes multiples (ou de Fabry-Perot) 569
Principe de Huygens – Fresnel 572
Qu'est ce que la diffraction ? 572
Principe de Huygens – Fresnel 573
Validité du principe de Huygens – Fresnel 573
Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer 574
Diffraction à l'infini par une fente 575
Diffraction par une fente infinie éclairée sous incidence normale 575
Diffraction par une fente infinie éclairée sous incidence oblique 577
Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire 578
Diffraction par une ouverture circulaire, limite de résolution des instruments d'optique 581
Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire 581
Limite de résolution d'un instrument d'optique 582
Diffraction à l'infini par deux écrans complémentaires, théorème de Babinet ... 584
Processus d'interaction entre la matière et le rayonnement. Émission stimulée .. 584
Rappels 584
Description qualitative des processus d'interaction 586
Description quantitative : émission spontanée 587
Description quantitative : absorption 589
Description quantitative : émission stimulée 590
Équilibre thermodynamique, rayonnement du corps noir, relations entre coefficients d'Einstein 591
Principes de fonctionnement d'un laser 592
Cavité optique 593
Milieu amplificateur 594
Propriétés du rayonnement émis par un laser 596
Exercices 598
Solutions 610

8. THERMODYNAMIQUE (Aude Plaszczynski) 635
Vocabulaire et définitions 637
Notion de système thermodynamique 637

État d'un système 637
Transformations d'un système 638
Variables d'état communément utilisées 638
Gaz parfaits 639
Définition et équation d'état 639
Mélange de gaz parfaits 639
Transformations d'un gaz parfait 640
Quelques propriétés des corps purs 640
Coefficients thermoélastiques 640
Diagramme d'état (*P; T*) d'un corps pur 641
Diagramme (*P; V*) 641
Cas particulier de l'eau 642
Premier principe de la thermodynamique 642
Notion d'énergie interne 642
Définition énergétique du gaz parfait 643
Le premier principe de la thermodynamique (pour les systèmes fermés) 643
Notion d'enthalpie 644
Calcul du travail échangé par un système 646
Définition du travail 646
Différents types de transformations 647
Travail des forces de pression pour une transformation quasi-statique 647
Exemples de calcul du travail 647
Calcul de la chaleur échangée par un système 648
Coefficients calorimétriques 648
Chaleur échangée par des solides ou des liquides 648
Chaleur échangée par un gaz parfait 649
Changements de phase 651
Détentes de Joule 652
Détente de Joule-Gay-Lussac 652
Détente de Joule-Thomson 653
Second principe de la thermodynamique 653
Notion d'entropie, énoncé du second principe 653
Différentielle de l'entropie ; application au cas du gaz parfait 654
Bilan entropique 655
Diagrammes entropiques 657
Machines thermiques 658
Relations fondamentales. Inégalité de Clausius 659
Différents types de machines thermiques 659
Rendement et efficacité des machines thermiques 660
Exemples de fonctionnement de machines frigorifiques 661
Moteurs de Carnot 662
Théorie cinétique des gaz parfaits monoatomiques 662
Les bases de la théorie 663
Propriétés du gaz parfait : interprétation microscopique de la pression et de la température 664
Loi de distribution de Maxwell 667

Transferts thermiques 669
Aspects phénoménologiques de la diffusion thermique 669
Flux de chaleur 670
Loi de Fourier 670
Les équations de la diffusion thermique 671
Exercices 673
Solutions 686

9. PHYSIQUE MODERNE (Marie-Alix Duval) 703
Dualité onde-corpuscule 704
Phénomènes ou expériences classiquement inexplicables 704
Dualité onde-corpuscule en électromagnétisme 709
Généralisation de la dualité onde-corpuscule 709
Dynamique relativiste 710
Un peu de relativité restreinte 710
Cinématique des réactions du type $1(+2) \rightarrow 3 + 4 + 5 + \cdots$ 712
Le noyau 714
Généralités 714
Radioactivité 715
Exercices 716

10. ASTRONOMIE (Michel Toulmonde) 733
L'astronomie 735
Repères historiques 735
Domaines d'étude 735
Mouvements apparents. Les observations 735
Le mouvement diurne 736
Mouvements apparents du Soleil et de la Lune 737
Les phases de la Lune 738
Les éclipses de Soleil et de Lune 739
Mouvements apparents des planètes 740
Temps et calendrier 741
Origine astronomique des unités de temps 742
Valeur des unités 742
Le jour 743
Remarques importantes sur le vocabulaire 744
Les échelles dans l'Univers 745
Unités de distance 745
Exemples de distances 745
Parallaxe stellaire 747
Le Système solaire à l'échelle 748
Détermination des distances de la Lune et du Soleil 750
La distance Terre-Lune 750
La distance Terre-Soleil 751

Mesure de la Terre par Ératosthène 752
Copernic et le modèle héliocentrique 754
Les périodes sidérales 754
Les distances au Soleil 755
Modèle géocentrique et modèle héliocentrique 756
La gravitation universelle 757
Aspect historique de la découverte 757
Newton et la force centrale 758
Newton, la pomme et la Lune 759
Masse d'inertie et masse gravitationnelle 759
Masse de la Terre 759
Les marées 759
Attraction différentielle 759
Le marnage 761
Rythme des marées 761
Influence du Soleil 761
Ralentissement de la rotation de la Terre 762
Période de rotation de la Lune 763
Lunettes et télescopes 765
Évolution historique 765
Clarté d'un instrument (lunette ou télescope) 767
Pouvoir séparateur 767
Radiotélescopes 767
Analyse spectrale 768
Découvertes de Newton (1670) 768
Principes de l'analyse spectrale (1859) 769
Effet Doppler-Fizeau (1848) 769
Nucléosynthèse stellaire et vie des étoiles 770
Les réactions nucléaires 770
Évolution d'une étoile 771
Abondance des éléments dans l'Univers 771
Quelques lois du rayonnement 771
Exercices 772
Solutions 781

A. RAPPELS MATHÉMATIQUES 797
Formules de trigonométrie 797
Moyenne d'une fonction périodique 798
Développements limités 798
Quelques relations utiles d'analyse vectorielle 799

Chapitre 1

Mécanique

Les notes de cours de ce chapitre rappellent les grands principes et théorèmes indispensables pour passer le concours du CAPES et enseigner la physique en lycée et collège. Elles attirent d'autre part l'attention sur certains points précis dont l'expérience montre qu'ils posent souvent des problèmes aux étudiants. Elles doivent être conçues comme un guide pour les révisions. **Leur contenu doit être connu avec précision avant d'aborder les exercices et problèmes qui en permettront l'assimilation**.

Les exercices et problèmes ont été sélectionnés de manière à constituer un ensemble pédagogiquement cohérent : ils recouvrent une très large partie du contenu du programme, et requièrent l'utilisation de la plupart des méthodes mises en oeuvre pour résoudre les problèmes de mécanique.

1. Dynamique du point matériel

1.1. Grandeurs cinétiques fondamentales
1.2. Principe de l'inertie ; référentiels galiléens (1re loi de Newton)
1.3. Principe fondamental de la dynamique. Référentiels galiléens (2e loi de Newton)
1.4. Principe des actions réciproques (3e loi de Newton)
1.5. Principe fondamental de la dynamique. Cas des référentiels non galiléens
1.6. Théorème du moment cinétique
1.7. Théorème de l'énergie cinétique
1.8. Interactions conservatives. Énergie potentielle, énergie mécanique
1.9. Forces centrales

2. Oscillateur harmonique à une dimension. Oscillations libres

2.1. Mouvement d'une particule au voisinage d'une position d'équilibre stable
2.2. Oscillateur harmonique unidimensionnel non amorti
2.3. Oscillateur harmonique unidimensionnel amorti par frottement fluide
2.4. Aspect énergétique

3. Oscillations forcées : l'oscillateur harmonique entretenu ; résonance

3.1. Recherche du régime permanent
3.2. Comportement de la réponse en amplitude en fonction de la fréquence
3.3. Aspect énergétique

4. Mécanique des systèmes

4.1. Préliminaire
4.2. Centre d'inertie ; référentiel barycentrique

4.3. Quantité de mouvement
4.4. Moment cinétique
4.5. Énergie cinétique. Conservation de l'énergie
4.6. Théorèmes de Koenig
4.7. Réduction canonique du problème à deux corps

5. Mécanique du solide indéformable

5.1. Éléments de cinématique du solide
5.2. Moment cinétique, énergie cinétique, opérateur d'inertie
5.3. Solide en rotation autour d'un axe fixe
5.4. Moments d'inertie à connaître
5.5. Théorème de Huygens
5.6. Contact entre solides. Frottement de glissement, lois de Coulomb
5.7. Roulement sans glissement

6. Statique des fluides

6.1. Notion de pression
6.2. Loi fondamentale de l'hydrostatique
6.3. Théorème d'Archimède

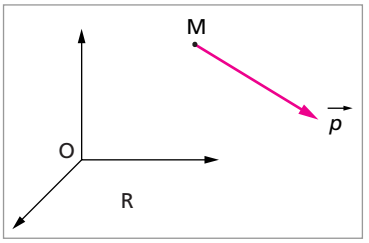
1. Dynamique du point matériel

1.1. Grandeurs cinétiques fondamentales

Pour un point matériel M, de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$ **par rapport à un référentiel R donné,** on définit les grandeurs cinétiques suivantes :

* Quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



* Moment cinétique **en un point A :**

$$\vec{\sigma_A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$$

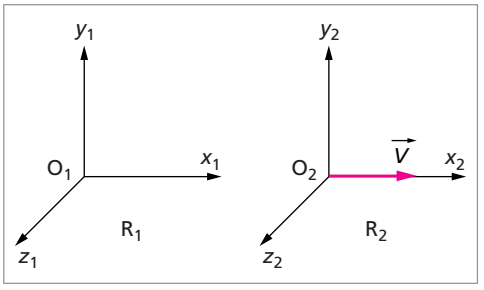
(moment en A de la quantité de mouvement).

* Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

1.2. Principe de l'inertie ; référentiels galiléens (1re loi de Newton)

Principe : Il existe des référentiels privilégiés, appelés galiléens, dans lesquels la quantité de mouvement d'une particule isolée est constante (cela correspond soit au repos, soit au mouvement rectiligne uniforme).



Cette loi fait des droites des objets cinématiques privilégiés. Ce sont aussi des objets géométriques privilégiés (dans un espace euclidien).

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. L'opérateur qui permet de passer d'un référentiel à un autre est la transformation de Galilée $G(V)$. Elle contient l'homogénéité et l'isotropie de l'espace ainsi que l'uniformité du temps. La vitesse de propagation de l'information est supposée infinie. Dans l'hypothèse où R_2 est en translation rectiligne uniforme de vitesse V par rapport à R_1, dans la direction parallèle à Ox (Fig. ci-dessus), la relation

entre les deux référentiels s'écrit (dans les repères définis par les origines O_1, O_2 et les trois axes de directions fixes associés) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Matriciellement, cette relation s'écrit :

$$[X_1] = \left[G(\vec{V})\right] [X_2]$$

Il est facile de montrer que l'ensemble $\left\{\left[G(\vec{V})\right]\right\}$ des transformations de Galilée a une structure de **groupe** :

$$\left[G(\vec{V})\right] \otimes \left[G(\vec{V}')\right] = \left[G(\vec{V}'')\right] \quad \text{où} \quad \vec{V''} = \vec{V} + \vec{V}'$$

Les lois de la mécanique classique sont invariantes dans les transformations du groupe de Galilée.

1.3. Principe fondamental de la dynamique. Référentiels galiléens (2e loi de Newton)

Principe : Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport au temps est égale à la somme des forces qu'il subit.

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{Rgal} = \sum \vec{f}$$

Dans un autre référentiel galiléen, le principe fondamental appliqué à ce point s'écrit exactement de la même façon, puisque deux référentiels galiléens ne sont pas accélérés l'un par rapport à l'autre.
Dans le cas où **la masse du point est constante**, ce principe s'écrit $m\vec{a} = \sum \vec{f}$

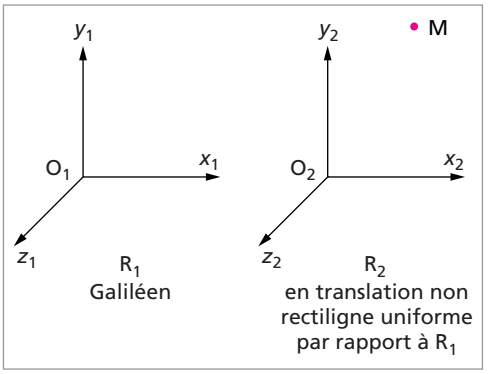
1.4. Principe des actions réciproques (3e loi de Newton)

Principe : Si un point matériel 1 exerce sur un point matériel 2 une force $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$, alors le point matériel 2 exerce sur 1 une force opposée $\overrightarrow{F_{2\to 1}} = -\overrightarrow{F_{1\to 2}}$

Cette loi suppose une transmission instantanée de l'information. Ainsi, le principe des actions réciproques n'est-il plus valable dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte.

1.5. Principe fondamental de la dynamique. Cas des référentiels non galiléens

• **R_2 est en translation par rapport à R_1** (translation non rectiligne uniforme).



Principe : Le principe fondamental de la dynamique dans R_2 non galiléen s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{R_2} = \sum \vec{f} + \vec{f_{ie}}(M)$$

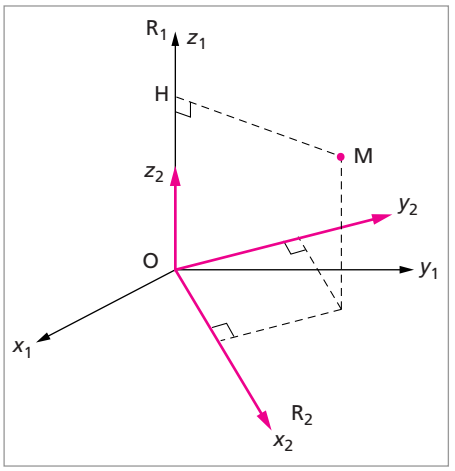
$\vec{f_{ie}}(M)$ est la force d'inertie d'entraînement du point M due à l'accélération de R_2 par rapport à R_1 galiléen.

Dans le cas d'une **translation**, l'accélération d'entraînement du point M ne dépend ni de sa position par rapport à R_2 ni de sa vitesse par rapport à R_2 et on a :

$$\vec{f_{ie}}(M) = -m\vec{a_e}(M) = -m\vec{a}(R_2/R_1) = -m\left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)$$

où $\vec{a}(R_2/R_1)$ est l'accélération de R_2 dans sa translation par rapport à R_1.

• **R_2 est en rotation autour d'un axe par rapport à R_1**



Principe : Le principe fondamental de la dynamique dans R_2 non galiléen s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{R_2} = \sum \vec{f} + \vec{f_{ie}}(M) + \vec{f_{ic}}(M)$$

où $\vec{f_{ie}}(M)$ est la force d'inertie d'entraînement du point M due à la rotation de R_2 par rapport à R_1 galiléen et $\vec{f_{ic}}(M)$ la force d'inertie de Coriolis du point M.

L'accélération d'entraînement du point M comporte deux termes **dépendant de la position de M dans R_2**. L'un d'entre eux est la cause de la célèbre force d'inertie centrifuge, l'autre n'intervient que si la rotation de R_2 par rapport à R_1 est non uniforme. Si $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$

désigne le vecteur rotation (ici parallèle à Oz_1) de R_2 par rapport à R_1, on a :

$$\overrightarrow{f_{ie}}(M) = -m\overrightarrow{a_e}(M) = \underbrace{m\Omega^2\overrightarrow{HM}}_{\text{force d'inertie centrifuge (en } m\Omega^2 r)} - m\frac{d\overrightarrow{\Omega}(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur Oz_1

L'accélération de Coriolis du point M dépend de la **vitesse de M dans le référentiel entraîné** R_2, $\overrightarrow{v_{R_2}}(M)$

$$\overrightarrow{f_{ic}}(M) = -2m\overrightarrow{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{v_{R_2}}(M)$$

1.6. Théorème du moment cinétique

Théorème : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M en un point fixe O d'un référentiel galiléen est égale à la somme des moments en ce point des forces subies par M :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_O}{dt}\right)_{Rgal} = \sum \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f}) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}$$

Pour utiliser le théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen, il faut ajouter à la somme des moments les moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, soit

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_{ie}}(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_{ic}}(M).$$

1.7. Théorème de l'énergie cinétique

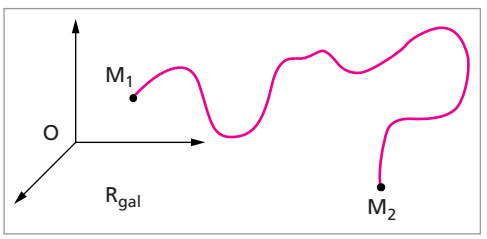
• Cas d'un référentiel galiléen

Théorème : Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique du point M entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces subies par M entre ces deux instants.

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \sum W_{1\to 2}(\overrightarrow{f})$$

où

$$W_{1\to 2}(\overrightarrow{f}) = \int_{M1}^{M2} \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{OM}$$



Si $\overrightarrow{v}$ désigne le vecteur vitesse de M, la puissance de la force $\overrightarrow{f}$ **à un instant donné** est :

$$P(\overrightarrow{f}) = \frac{dW}{dt} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$$

Il est utile de se rappeler qu'on peut calculer le travail en intégrant la puissance de $\overrightarrow{f}$ entre deux instants :

$$W_{1\to 2}(\overrightarrow{f}) = \int_{t1}^{t2} P(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t$$

• **Cas d'un référentiel non galiléen** : il faut ajouter à la somme des travaux des forces, les travaux des forces d'inertie d'entraînement.

> ***Remarque :*** **la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas**, puisqu'elle est à chaque instant normale à la vitesse du point dans le référentiel entrainé (sa puissance est toujours nulle) :
>
> $$P(\overrightarrow{f_{ic}}(\mathrm{M})) = \overrightarrow{f_{ic}}(\mathrm{M}) \cdot \overrightarrow{v_{\mathrm{R}_2}}(\mathrm{M}) = 0, (\forall t)$$

1.8. Interactions conservatives. Énergie potentielle, énergie mécanique

• **Forces conservatives** : une force est conservative si son travail lors du déplacement du point matériel M d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi. En particulier sur un contour fermé quelconque :

$$\oint_{\mathrm{C}} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0, \forall \mathrm{C}, \text{ fermé}$$

Il est alors facile de montrer qu'une force est conservative si et seulement s'il existe une fonction scalaire $E_p(x, y, z)$, ne dépendant que des coordonnées d'espace, telle que :

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} E_p(x, y, z)$$

On a alors

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}(\overrightarrow{f}) = E_p(\mathrm{A}) - E_p(\mathrm{B})$$

L'énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ n'est pas, étant donné un champ de forces, définie de façon univoque, mais à une constante additive près. On dit que le champ de forces $\overrightarrow{f}$ dérive d'un potentiel.

Etant donné un champ de forces $\overrightarrow{f}$, il est donc conservatif si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{0}$

• **Conservation de l'énergie mécanique :** en appliquant le théorème de l'énergie cinétique, dans le cas où les forces dérivent toutes d'un potentiel, on montre que :

Théorème : **L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ d'une particule soumise uniquement à des forces conservatives ne dépend pas du temps :**

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

Il est important de remarquer que cette propriété reste vraie si la particule est aussi **soumise à des liaisons (forces de contact avec une surface ou une courbe) à condition que celles-ci ne travaillent pas.** C'est en particulier le cas en l'absence de frottements, mais aussi lorsqu'on a des frottements latéraux, de résultante orthogonale à la vitesse à tout instant.

1.9. Forces centrales

Un point matériel M est soumis à une force centrale de centre O si la droite d'action de cette force passe par O quelle que soit la position de M. Une telle force dérive d'une énergie potentielle qui est obligatoirement isotrope (les lignes de force sont orthogonales aux surfaces d'égale énergie potentielle) de sorte qu'on l'écrit $\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{u_r}$, où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire radial des coordonneés sphériques, avec $f(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$.

Propriétés : Soit un point matériel M soumis uniquement à une force centrale de centre O. On observe les propriétés suivantes :

- Le moment cinétique en O $\overrightarrow{\sigma}_O(M)$ du point matériel est conservatif.
- Le mouvement de M s'effectue donc dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{\sigma}_O(M)$ et passant par O. On le décrira de manière pratique en coordonnées polaires.
- Le mouvement de M obéit à la loi des aires : pendant une durée Δt donnée, le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaie des aires égales, quelle que soit la position de M.
- L'énergie mécanique du point M dans un champ de forces central $\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{u_r}$ est conservative.

Compte tenu de la conservation du moment cinétique, on peut passer des expressions générales de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires (r, θ) à des relations ne faisant plus intervenir le temps ; ce sont les formules de Binet. En définissant la constante des aires C par $\|\overrightarrow{\sigma}_O(M)\| = mC$, on a $C = r^2\dot{\theta}$, et :

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2\right] \qquad \overrightarrow{a} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}\right]\overrightarrow{u_r}$$

➜ **Voir exercices 1 à 15**

2. Oscillateur harmonique à une dimension. Oscillations libres

2.1. Mouvement d'une particule au voisinage d'une position d'équilibre stable

Une position d'équilibre stable pour une particule placée dans un champ de forces dérivant d'une énergie potentielle se définit par l'existence d'une force de rappel lorsqu'on l'écarte de cette position ; comme $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)$, cela se traduit par un **minimum de l'énergie potentielle**. Dans le cas général multidimensionnel, l'étude des positions d'équilibre et de leur stabilité peut être difficile car les surfaces équipotentielles peuvent avoir une topologie compliquée (points selles,...)

2.2. Oscillateur harmonique unidimensionnel non amorti

L'hypothèse harmonique suppose que la réponse est linéaire : la force de rappel est proportionnelle au **déplacement x de la particule par rapport à sa position d'équilibre stable**. L'énergie potentielle est donc quadratique par rapport aux déplacements.

• **Étude dynamique :** à une dimension $F_x = -kx$, où x repère le déplacement de la particule **par rapport à l'équilibre**, est la seule force qu'elle subit. Le principe fondamental de la dynamique conduit à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution générale peut s'écrire $x(t) = a\sin(\omega_0 t + \phi)$ où $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur ; a et ϕ dépendent de deux conditions initiales.

Les oscillations d'un oscillateur harmonique non amorti sont isochrones : leur pulsation ne dépend pas de l'amplitude du mouvement.

• **Aspect énergétique** : l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti est une intégrale première du mouvement. $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ est constante, proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations et au carré de la pulsation : $E_m = \dfrac{1}{2}ma^2\omega_0^2$

Un oscillateur harmonique ne possède que des **états liés** : deux barrières de potentiel le confinent dans une région finie de l'espace.

Théorème du viriel : L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique sont oscillantes, de période égale à $T_0/2$. Leurs moyennes temporelles sont égales.

2.3. Oscillateur harmonique unidimensionnel amorti par frottement fluide

• Aspect dynamique ; mise en équation : en plus de la force de rappel $F_x = -kx$, la particule est soumise à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ ($h > 0$). L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{où} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{h}{m}$$

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et τ correspond physiquement à un temps de relaxation ; c'est le temps caractéristique du régime libre. Lorsqu'on écarte le système de l'équilibre et qu'on le lâche, il revient à sa position d'équilibre et au repos après « quelques τ ».

• **Solutions de l'équation différentielle ; représentation complexe** : l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $r^2 + (1/\tau)r + \omega_0^2 = 0$

La forme des solutions de l'équation différentielle dépend du signe de $\Delta = 1/\tau^2 - 4\omega_0^2$

– Si $\Delta > 0$ ($2\omega_0\tau < 1$), soit ($h > 2\sqrt{mk}$), le régime est apériodique : amortissement assez important. L'équation caractéristique a 2 racines réelles négatives distinctes r_1 et r_2.
La solution générale s'écrit :

$$x(t) = a\,\exp(r_1 t) + b\,\exp(r_2 t)$$

La particule retourne à sa position d'équilibre sans effectuer d'oscillations. Il est important de remarquer que le fait que les racines soient négatives assure le retour à l'équilibre (la limite de la vitesse lorsque t tend vers l'infini est zéro).
– Si $\Delta < 0$ ($2\omega_0\tau > 1$), soit ($h < 2\sqrt{mk}$), le régime est oscillatoire : amortissement assez faible. L'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes c_1 et c_2 à partie réelle négative ; la solution générale complexe s'écrit : $X(t) = \alpha\,\exp(c_1 t) + \beta\,\exp(c_2 t)$. L'élongation est alors la partie réelle (notée x) de X ; il apparaît naturellement dans le calcul la pulsation

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/4\tau^2}$$

On écrit la solution :

$$x(t) = \exp(-t/2\tau)(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t)$$

La particule retourne à sa position d'équilibre en effectuant des oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement, avec un temps caractéristique de l'ordre de 2τ ; bien que la fonction $x(t)$ ne soit pas périodique, on remarque qu'elle s'annule à des intervalles de temps égaux permettant de définir une **pseudo-période** $T = 2\pi/\Omega$.
La pseudo-période des oscillations amorties est toujours un petit peu plus élevée que la période propre, mais en reste très proche dans la limite de l'amortissement faible.
Le **décrément logarithmique** δ caractérise la rapidité de l'amortissement ; c'est le rapport entre les deux temps caractéristiques qui apparaissent naturellement dans l'équation différentielle, à savoir la période propre et le temps de relaxation. L'amplitude des oscillations décroît d'autant plus vite que δ est élevé.

$$x(t + T)/x(t) = \exp(-T/2\tau) \quad \text{et} \quad \delta = T/2\tau$$

Le rapport des amplitudes des oscillations espacées d'une pseudo-période est une constante égale à $\exp(-\delta)$.
– Si $\Delta = 0$ ($2\omega_0\tau = 1$), (soit $h = 2\sqrt{mk}$), le régime est critique : c'est le régime qui assure la transition entre le régime apériodique et le régime oscillatoire. La solution générale s'écrit :

$$x = (at + b)\exp(-t/2\tau)$$

La particule retourne à sa position d'équilibre sans effectuer d'oscillations. Il est facile de montrer que, pour des conditions initiales et pour ω_0 et τ fixés, le temps que met la particule pour retourner à l'équilibre est alors minimal.

2.4. Aspect énergétique

À partir de l'équation différentielle, on multiplie chaque membre par $\dot{x}$, et on intègre entre t_1 et t_2 :

$$m\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + kx(t)\dot{x}(t) = -h\dot{x}(t)^2$$

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} h\dot{x}(t)^2\mathrm{d}t$$

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique amorti diminue au cours du temps : la variation d'énergie mécanique du système entre deux instants est égale au travail de la force de frottement entre ces deux instants.

➜ **Voir exercices 16 à 17**

3. Oscillations forcées : l'oscillateur harmonique entretenu ; résonance

L'oscillateur harmonique entretenu est soumis de plus à une force extérieure périodique et sinusoïdale F(t) de période T.

3.1. Recherche du régime permanent

À une dimension, le principe fondamental de la dynamique conduit à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. La solution générale est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre et d'une intégrale particulière de l'équation avec second membre :

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)/m$$

La solution générale de l'équation sans second membre se caractérise par le fait que sa limite tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, quel que soit le régime transitoire ; dans la pratique, cette solution « s'écrase » sur un temps caractéristique de quelques τ. Cela sous-entend évidemment, que le frottement fluide n'est pas nul.
$F(t)$ étant une excitation sinusoïdale, on est amené à chercher une réponse sinusoïdale $z(t)$ de même fréquence. On utilise la représentation complexe ($x = \mathrm{Re}(z)$) :

$$\ddot{z}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \left(f_0/m\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Rightarrow z(t) = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

avec

$$z_0 = \frac{f_0}{m} \times \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{i}\omega/\tau}$$

– En régime permanent, l'oscillateur répond à la fréquence fixée par l'excitateur.
– L'amplitude de la réponse est proportionnelle à l'amplitude de l'excitation (réponse linéaire).
– L'amplitude de la réponse dépend des caractéristiques intrinsèques de l'oscillateur (ω_0, τ) et de la fréquence ω de l'excitateur .
– La réponse présente en général un déphasage avec l'excitation.

On peut définir la réponse en vitesse par $\dot{z} = v_0 \exp(i\omega t)$, où $v_0 = i\omega z_0$:

$$v_0 = \frac{f_0}{m} \times \frac{i\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega/\tau}$$

3.2. Comportement de la réponse en amplitude en fonction de la fréquence

• **Le phénomène de « résonance en amplitude »**

Avertissement : Il importe de remarquer que le titre est entre guillemets. **On dit qu'il y a résonance lorsque la puissance cédée par l'excitateur à l'oscillateur est maximale** ; cela se produit lorsque la fréquence de l'excitateur est rigoureusement égale à la fréquence propre de l'excitateur. La mise en évidence du phénomène de résonance proprement dit nécessite l'étude de la réponse **en vitesse** ; on ne peut donc pas en toute rigueur parler de « résonance en amplitude ».

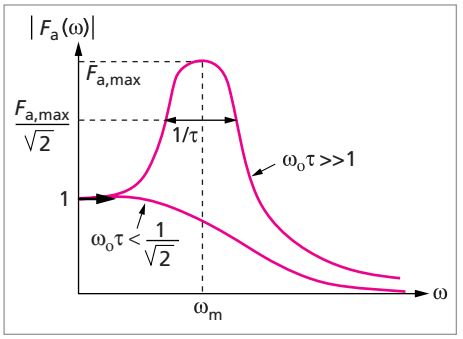
$z_0(\omega) = (f_0/m).F_a(\omega)$ conduit à :

$$|F_a(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad \text{et} \quad \tan\phi(\omega) = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

où ϕ est le déphasage entre la force excitatrice $F(t)$ et la réponse en amplitude $x(t)$. La seule donnée de $\tan\phi(\omega)$ ne suffit pas à déterminer la phase $\phi(\omega)$. Pour la déterminer, on peut remarquer que l'argument de $F_a(\omega)$ est négatif.

Si l'oscillateur est assez faiblement amorti (pour $\omega_0\tau > \frac{1}{\sqrt{2}}$) l'amplitude de la réponse présente un **maximum** pour une pulsation excitatrice ω_m légèrement inférieure à la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur ; la force excitatrice est alors en avance de un peu moins de $\pi/2$ sur le déplacement. On a

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 1/2\tau^2}$$



• **Réponse à basse fréquence** : dans la limite des basses fréquences, la force excitatrice est pratiquement en phase avec le déplacement.

• **Réponse à haute fréquence** : dans la limite des hautes fréquences, la réponse tend vers 0 comme $1/\omega^2$ (l'oscillateur n' a pas le temps de répondre à cause de son inertie). La force est pratiquement en opposition de phase avec le déplacement.

• **Acuité de la « résonance en amplitude » :** dans la limite d'un amortissement nettement faible ($\omega_0\tau \gg 1$) ω_m est très voisin de ω_0 et l'acuité de la résonance en amplitude est caractérisée par une largeur de bande passante telle que :

$$\Delta\omega_a = 1/\tau$$

La « résonance » en amplitude, lorsqu'elle existe est d'autant plus étroite que l'amortissement est faible. Il en va de même pour la résonance définie par la vitesse à la différence qu'elle n'existe pas toujours.

• **Principe de causalité :** les effets ne peuvent précéder les causes. Cela se manifeste ici par le fait que la réponse en amplitude est toujours en retard de phase sur la force excitatrice.

3.3. Aspect énergétique

• **Bilan instantané :** l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont des fonctions périodiques, de période $T/2$ dont l'amplitude dépend du module de la fonction de réponse. L'énergie mécanique est en général dépendante du temps.
Ce n'est que dans le cas où la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre de l'oscillateur que la puissance instantanée qu'il lui fournit est égale à la puissance instantanée dissipée par l'amortissement.
• **Puissance moyenne absorbée : résonance.** La puissance moyenne absorbée est la grandeur moyenne effectivement accessible à la mesure.

$$\langle P\rangle_T(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \frac{f_0^2\tau}{2m}\frac{1}{\left(\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega/\tau}\right)^2+1}$$

La puissance moyenne absorbée par l'oscillateur a un profil fréquentiel **Lorentzien.** Elle est maximale lorsque la fréquence de l'excitateur est égale (rigoureusement) à la fréquence propre de l'oscillateur ; la bande passante en puissance (largeur totale à mi-hauteur de $\langle P\rangle_T(\omega)$) est telle que :

$$\Delta\omega_{\langle P\rangle} \times \tau = 1$$

Le facteur de qualité Q ne dépend que des caractéristiques de l'oscillateur et rend compte de l'acuité de la résonance :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\langle P\rangle}} \approx \omega_0\tau$$

➜ **Voir exercices 16 à 17**

4. Mécanique des systèmes

Les définitions et théorèmes tels qu'ils sont énoncés ici sont valables aussi bien pour des **solides indéformables** que pour des **systèmes déformables**.

4.1. Préliminaire

Au sens classique, un système S peut être défini comme un ensemble de points matériels M_i, chacun étant affecté d'une masse m_i. Le passage à des distributions continues de masse s'impose souvent lorsque l'on calcule les grandeurs mécaniques (moments d'inertie ou positions de centres de gravité,...). Il est cependant plus pratique de retenir les définitions sous forme discrète et **facile de retrouver rapidement tous les théorèmes de la mécanique des systèmes en utilisant des sommes discrètes** plutôt que des intégrales.
Le **passage du discret au continu** pour une grandeur mécanique **A** s'effectue en remplaçant :

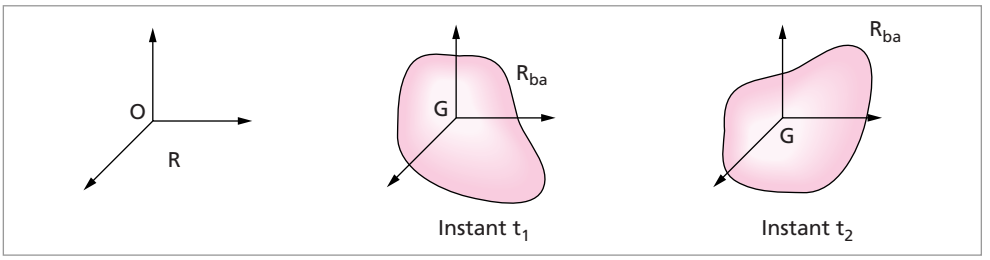
$$\sum_i A(M_i)m_i \quad \text{par} \quad \iiint A(M)\mathrm{d}m.$$

4.2. Centre d'inertie ; référentiel barycentrique

Le centre d'inertie G du système matériel S, de masse totale m est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{M_i \in S} m_i \overrightarrow{OM_i}}{m}$$

ce qui peut s'écrire $\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_S \overrightarrow{OM}\mathrm{d}m}{m}$ dans le cas d'une distribution continue.
– La position de G ne dépend pas du choix de O.
– Si la distribution de masse du système présente des symétries (plans, axes), G est à l'intersection de ses éléments de symétrie. Pour déterminer les éléments de symétrie de S, l'examen de la forme géométrique ne suffit pas. Il faut penser à l'homogénéité de la distribution de masse.
Le référentiel barycentrique (R_{ba}) **associé à R** a son origine en G et est en translation (généralement non rectiligne) par rapport à R ; les axes du repère barycentrique sont **à tout instant** parallèles aux axes de R.



4.3. Quantité de mouvement

Définition : La quantité de mouvement du système S dans le référentiel R est :

$$\overrightarrow{p}(S/\mathrm{R}) = \sum_{\mathrm{M}_i \in S} m_i \overrightarrow{v}(\mathrm{M}_i/\mathrm{R})$$

Cette définition n'est généralement pas utilisable directement pour calculer des quantités de mouvement dans un problème de mécanique. Il est donc crucial de se rappeler qu'il découle de la définition de G la **relation très utile** :

$$\overrightarrow{p}(S/\mathrm{R}) = \mathrm{M}\overrightarrow{v}(\mathrm{G}/\mathrm{R})$$

La définition même de R_{ba} implique que **la quantité de mouvement d'un système est nulle à tout instant dans le référentiel barycentrique** ($\overrightarrow{p}(S/\mathrm{R}_{\mathrm{ba}}) = \overrightarrow{0}$) ; cette propriété est utile pour traiter des problèmes de chocs.

• **Principe de l'inertie :** différents énoncés peuvent en être donnés. À ce titre-là, il est intéressant de se reporter à l'ouvrage d'Isaac Newton *De philosophiae naturalis principia mathematica* paru en 1687.

Principe : Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé est constante.

Il importe de bien avoir présent à l'esprit que cela signifie que G est **soit** au repos, **soit** en mouvement rectiligne et uniforme, et que le système peut se déformer et tourner autour de G

• **Théorème du centre d'inertie (ou résultante cinétique)**

Théorème : Le mouvement du centre d'inertie d'un système est le même que celui d'un point matériel dont la masse totale serait celle du système et auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}(S/\mathrm{R_{gal}})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Rgal}} = \sum \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}$$

Dans le cas où R n'est pas galiléen, il faut ajouter à la somme des forces extérieures, les **forces d'inertie** d'entraînement et de Coriolis (il faut en général intégrer sur la totalité du système pour les calculer).

4.4. Moment cinétique

Définition : Le moment cinétique **en un point quelconque A**, du système S par rapport à R est :

$$\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{A}}}(S/\mathrm{R}) = \sum_{\mathrm{M}_i \in S} \overrightarrow{\mathrm{AM}_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}(\mathrm{M}_i/\mathrm{R})$$

Le moment cinétique **dépend du point où on le calcule** et se transforme comme un torseur :

$$\overrightarrow{\sigma_A}(S/R) = \overrightarrow{\sigma}_B(S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{p}(S/R)$$

• **Théorème du moment cinétique :** il n'est applicable sous sa forme simple qu'en un **point fixe d'un référentiel galiléen ou au centre d'inertie.**

– Point fixe O de R_{gal} : On a souvent intérêt à l'utiliser sous cette forme si O appartient à S.

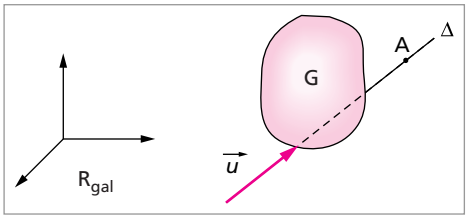
Théorème : La dérivée galiléenne par rapport au temps du moment cinétique d'un système en un point fixe O d'un référentiel galiléen est égale à la somme des moments en ce point des forces extérieures appliquées.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_O(S/R_{gal})}{dt}\right)_{Rgal} = \sum \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

– Au centre d'inertie G : puisque R_{ba} est en translation par rapport à R, **le moment cinétique en G est le même dans R et dans R_{ba}.**

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_G(S)}{dt}\right) = \sum \overrightarrow{M_G}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

• **Forme scalaire :** le théorème du moment cinétique peut se réduire à une relation scalaire dans le cas où le mouvement se fait **par rapport à un axe fixe Δ**, ou un axe dont la direction reste fixe. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ définissant la direction de cet axe :



$$\sigma_\Delta(S/R_{gal}) = \overrightarrow{\sigma_A}(S/R_{gal}) \cdot \overrightarrow{u}$$

et l'application du théorème du moment cinétique en A se ramène à :

$$\left(\frac{d\sigma_\Delta(S/R_{gal})}{dt}\right)_{R_{gal}} = \sum M_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_A} \cdot \overrightarrow{u}$ et $M_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{u}$ définissent respectivement le moment cinétique et le moment scalaire des forces par rapport à l'axe Δ.

4.5. Énergie cinétique. Conservation de l'énergie

Définition : L'énergie cinétique du système S par rapport à R est :

$$E_c(S/R) = \sum_{M_i \in S} \frac{1}{2} m_i v^2(M_i/R)$$

Théorème : La variation d'énergie cinétique du système S (dans R_{gal}) entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures appliquées au système entre ces deux instants.

$$E_{C2}(S/R_{gal}) - E_{C1}(S/R_{gal}) = \sum W_{t1\to t2}(\vec{F})$$

Remarque : si R n'est pas galiléen, il faut ajouter le travail des forces d'inertie d'entraînement.

Conservation de l'énergie : L'énergie totale d'un système S de points matériels se conserve si les forces intérieures et extérieures qu'il subit dérivent toutes d'une énergie potentielle ; chaque point matériel étant repéré par $\vec{r_i}$, cette énergie s'écrit :

$$E = E_C + E_p^{ext}\left(\{\vec{r_i}\}\right) + E_p^{int}\left(\{\vec{r_i}\}\right).$$

Il importe de remarquer qu'en toute généralité, cette expression de l'énergie prend en compte les interactions microscopiques, donc l'énergie interne du système.

4.6. Théorèmes de Koenig

Ces théorèmes permettent de calculer le **moment cinétique** en un point quelconque par rapport à R en fonction du moment cinétique en G et **l'énergie cinétique** dans R en fonction de l'énergie cinétique dans R_{ba}

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{\sigma}_G(S) + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}_G(R)$$

$$E_c(S/R) = E_c(S/R_{ba}) + \frac{1}{2}m\vec{v}_G^{\,2}(R)$$

4.7. Réduction canonique du problème à deux corps

On désigne par S un système de deux point matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en interaction. L'énergie potentielle qui décrit cette interaction est invariante par translation de l'ensemble (donc elle dépend de la seule différence de leurs positions $\vec{\rho} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = \overrightarrow{M_2M_1}$) et par rotation de l'ensemble (donc elle dépend de la seule norme de $\vec{\rho}$). Le système est supposé isolé par rapport à un référentiel galiléen R_{gal}.

Propriétés : Dans le référentiel barycentrique R_{ba}, le mouvement de chaque point matériel est un mouvement à force centrale (de centre G).

– Les deux équations traduisant la relation fondamentale de la dynamique se ramènent à $\mu\dfrac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = -\dfrac{dE_p(\rho)}{d\rho}\vec{u_\rho}$, où $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite du système et $\vec{u_\rho} = \dfrac{\vec{\rho}}{\rho}$. On dit que le mouvement se ramène à l'étude du mouvement à force centrale d'une particule dite « fictive », de masse μ.

– Le moment cinétique de S en G est $\vec{\sigma}_G(S) = \mu\vec{\rho} \wedge \dot{\vec{\rho}}$

– L'énergie cinétique de S dans R_{ba} est $E_C(S/R_{ba}) = \dfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{\rho}}^2$

➜ **Voir exercices 18 à 26**

5. Mécanique du solide indéformable

Tous les théorèmes et définitions de la mécanique des systèmes restent valables. De plus, le caractère indéformable du système implique les propriétés suivantes :

- La **somme des forces intérieures** est nulle ;
- La **somme des travaux des forces intérieures** est nulle.

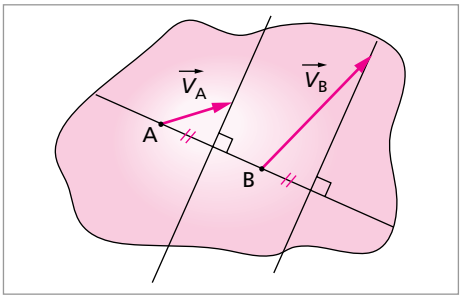
5.1. Éléments de cinématique du solide

Classiquement, le solide indéformable est un ensemble de points matériels $\{M_i\}$ tels que :

$$\forall (i,j), \left\| \overrightarrow{M_i M_j} \right\| = \text{Cte.}$$

Il est alors facile de montrer que le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif (antisymétrique), c'est-à-dire que :

$$\forall (A, B) \in \text{Solide}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_B}$$



Il s'ensuit que $\forall t, \exists \overrightarrow{\omega}$, (indépendant des points du solide considéré) tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\omega}}$$

$\overrightarrow{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée du solide à l'instant t.

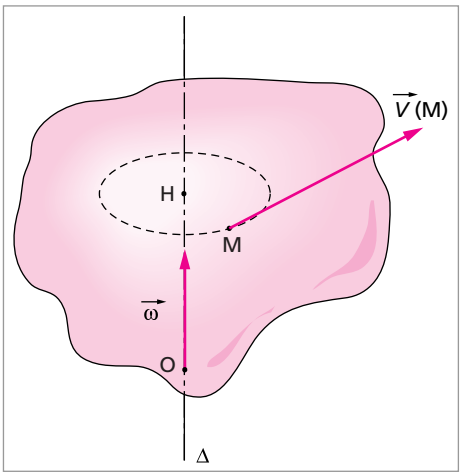
Le champ des accélérations n'est pas antisymétrique.

– Si le solide est en translation, $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}, \forall t$

– Si le solide est rotation autour d'un axe fixe, il n'y a pas de translation par rapport à l'axe et le vecteur rotation instantané conserve une direction fixe, de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$. On a $\overrightarrow{\omega} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \overrightarrow{u_\Delta}$ où l'angle θ repère la rotation autour de l'axe Δ ; un point M du solide a une trajectoire circulaire, d'axe Δ et sa vitesse est $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

L'accélération de M s'écrit par conséquent :

$$\overrightarrow{a}(M) = \omega^2 \overrightarrow{MH} + \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

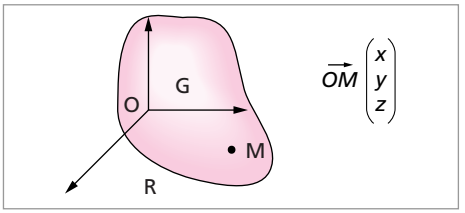


Le premier terme n'est autre que l'accélération **centripète**. Il est utile de se rappeler que c'est à partir de cette expression que l'on écrit l'accélération d'entraînement d'un point lors d'un changement de référentiel.

5.2. Moment cinétique, énergie cinétique, opérateur d'inertie

Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



$\overrightarrow{\Omega}(S/\mathrm{R})$ étant le vecteur rotation instantané du solide S, il est facile de montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_{\mathrm{O}}(S/\mathrm{R})$ peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}_{\mathrm{O}}(S/\mathrm{R}) = J(\mathrm{O}/S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathrm{R})$$

L'opérateur d'inertie **en O** du solide ***S*** est :

$$J(\mathrm{O}, S) = \begin{pmatrix} J_{xx}(\mathrm{O}) & -J_{xy}(\mathrm{O}) & -J_{xz}(\mathrm{O}) \\ -J_{xy}(\mathrm{O}) & J_{yy}(\mathrm{O}) & -J_{yz}(\mathrm{O}) \\ -J_{xz}(\mathrm{O}) & -J_{yz}(\mathrm{O}) & J_{zz}(\mathrm{O}) \end{pmatrix}$$

où $J_{xx}(\mathrm{O}), J_{yy}(\mathrm{O}), J_{zz}(\mathrm{O})$ sont les moments d'inertie par rapport aux axes $x'x$, $y'y$, $z'z$ **passant par O**. Les autres termes sont les produits d'inertie (on peut les interpréter comme des moments d'inertie par rapport à des plans). dm étant la masse de l'élément de matière infinitésimal entourant M, les termes de la matrice sont définis par :

$$J_{xx}(\mathrm{O}) = \iiint_S (y^2 + z^2)\mathrm{d}m$$

$$J_{xy}(\mathrm{O}) = \iiint_S xy\mathrm{d}m$$

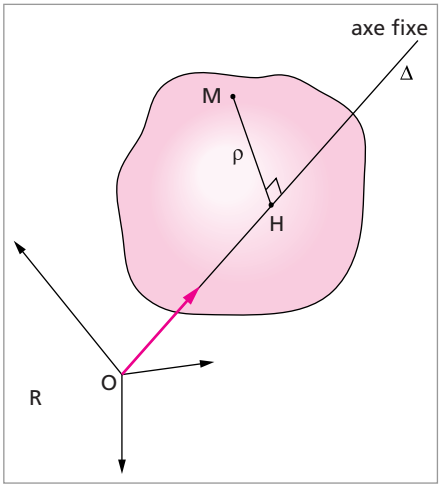
Il importe de remarquer que l'expression de $J(\mathrm{O}, S)$ dépend de la base dans laquelle les moments et produits d'inertie sont calculés. Les trois directions associées à la base dans laquelle $J(\mathrm{O}, S)$ est diagonale définissent les axes principaux d'inertie en O du solide ***S***. On montre que l'**énergie cinétique** est :

$$E_{\mathrm{c}}(S/\mathrm{R}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma}_{\mathrm{O}}(S/\mathrm{R}) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathrm{R})$$

Du point de vue des dimensions :
– Le moment cinétique est homogène à : (moment d'inertie) × (vitesse angulaire)
– L'énergie cinétique est homogène à : (moment d'inertie) × (vitesse angulaire)^2
Les relations telles qu'elles sont écrites ci-dessus permettent de traiter le mouvement d'un solide autour d'un **point** fixe.

5.3. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Il ne faut jamais traiter un problème de rotation autour d'un axe fixe en utilisant l'arsenal du paragraphe précédent. En effet, il suffit de projeter les relations sur l'axe, et le problème s'écrit totalement en termes scalaires.



– Moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Δ :

$$\sigma_\Delta(S) = \overrightarrow{\sigma}_{O\in\Delta}(S/R)\cdot\overrightarrow{u}$$

avec $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ vitesse angulaire autour de l'axe Δ et J_Δ moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :

$$J_\Delta = \iiint_S \rho^2 dm = \overrightarrow{u}\cdot J(O,S)\cdot\overrightarrow{u}$$

– Le moment cinétique du solide dans sa rotation autour de l'axe est :

$$\sigma_\Delta(S) = J_\Delta\cdot\omega$$

– L'énergie cinétique du solide dans sa rotation autour de Δ s'écrit :

$$E_c(S) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

– Le théorème du moment cinétique peut s'écrire au point fixe O et se projeter sur l'axe. Il vient :

$$\frac{d\sigma_\Delta(S)}{dt} = \sum M_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}})$$

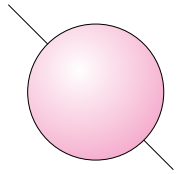
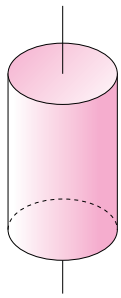
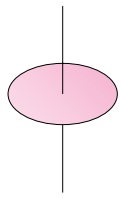
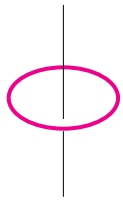
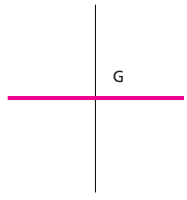
qu'il est plus pratique d'utiliser sous la forme :

$$J_\Delta\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum M_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}})$$

où la somme des moments est **algébrique**.

Dans ces conditions, le moment de la force par rapport à l'axe est scalaire. Si la direction de cette force est perpendiculaire à l'axe de rotation, $M_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}})$ est alors égale au produit, affecté du signe convenable, de l'intensité de la force par le **bras de levier**.

5.4. Moments d'inertie à connaître

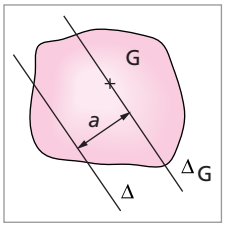
Solide	Schéma	Moment d'inertie
Sphère homogène de rayon R et de masse M. Axes passant par le centre.		$J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$
Cylindre homogène de rayon R et de masse M. Axe de révolution.		$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$
Disque homogène de rayon R et de masse M. Axe de révolution.		$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$
Anneau de rayon R et de masse M. Axe de révolution.		$J_\Delta = MR^2$
Tige de longueur l et de masse M. Axe perpendiculaire passant par le centre d'inertie.		$J_\Delta = \frac{Ml^2}{12}$

5.5. Théorème de Huygens

Théorème : Le moment d'inertie d'un solide de masse M et de centre d'inertie G par rapport à un axe Δ quelconque est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G augmenté de Ma^2 où a est la distance entre les deux axes Δ et Δ_G :

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + Ma^2$$

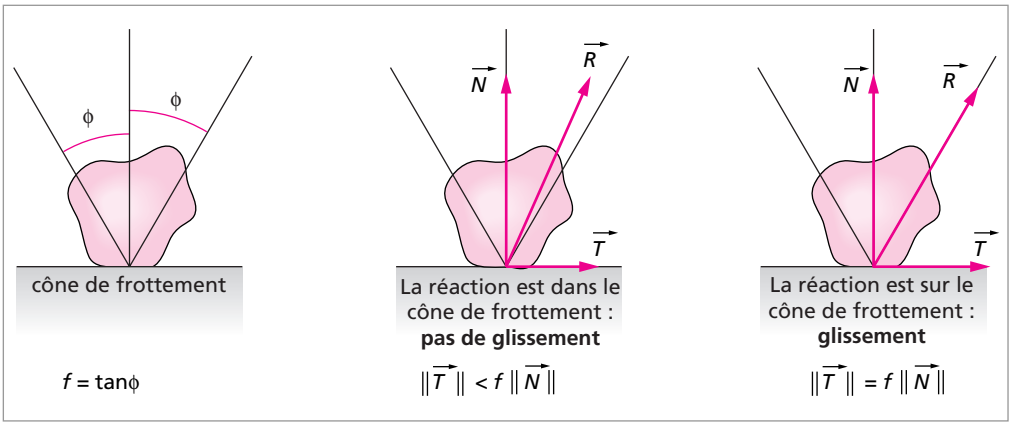
Le moment d'inertie par rapport à Δ est toujours supérieur au moment d'inertie par rapport à Δ_G.



5.6. Contact entre solides. Frottement de glissement, lois de Coulomb

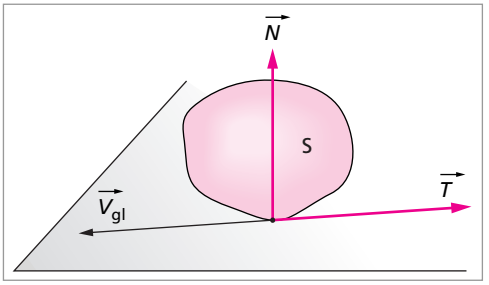
On distingue trois types de frottement lors du contact entre deux solides : pivotement, roulement, glissement. Il est indispensable de bien connaître les lois du frottement de glissement.

• **Frottement de glissement statique** : lorsqu'un solide A est en contact statique avec un solide B, le coefficient f de frottement statique définit le rapport entre la composante normale et la composante tangentielle de la réaction de contact du support sur le solide à partir duquel les deux solides glissent l'un sur l'autre (on ne représente que les forces de liaison sur les schémas suivant).



Les deux solides commencent juste à glisser l'un sur l'autre quand la réaction est **sur** le cône de frottement. f ne dépend que de la nature des corps en contact et de l'état des surfaces. Il importe de retenir que la réaction ne peut pas sortir du **cône de frottement**.

• **Lois de Coulomb du frottement de glissement** : $\overrightarrow{V_{gl}}$ étant la vitesse de glissement du solide A par rapport à B non nulle, la composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ est **colinéaire** à $\overrightarrow{V_{gl}}$ et de **sens contraire,** avec $\left\|\overrightarrow{T}\right\| = f_c \left\|\overrightarrow{N}\right\|$ où f_c est le coefficient de frottement dynamique. $f_c < f$ mais on admet souvent que $f_c \approx f$.

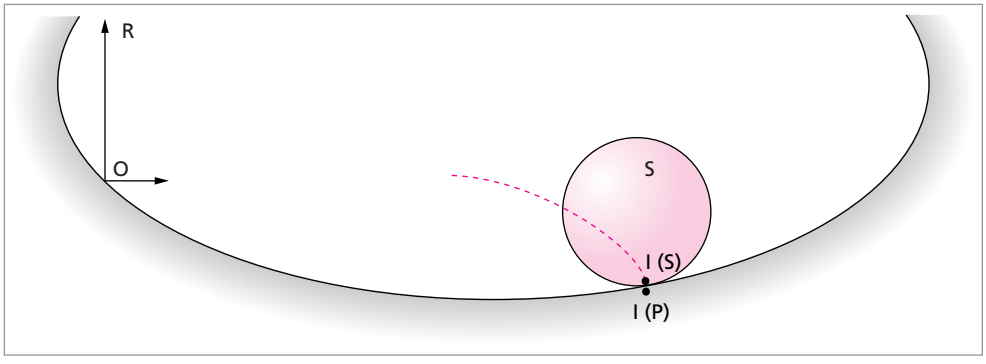


Plus mathématiquement, on peut écrire :

$$\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{V_{gl}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{V_{gl}} < 0$$

5.7. Roulement sans glissement

Il importe de bien comprendre que trois points sont impliqués dans le contact ponctuel lors du mouvement d'un solide S sur une piste P :
– Le point **géométrique** I de contact, qui dépend de la position du solide S.
– Le point **matériel** I(S) appartenant au solide (S) (« collé à S ») qui coïncide avec I à l'instant considéré ; sa trajectoire dans le référentiel R est représentée par la ligne en pointillés (notez que cette trajectoire comporte un point de rebroussement lorsque I(S) est confondu avec la surface de contact : sa vitesse **dans R** est à ce moment-là nulle) ;
– Le point **matériel** I(P) appartenant à la piste qui coïncide avec I à l'instant considéré.



C'est I, point géométrique de contact, qui permet de définir la **condition de roulement sans glissement** : la vitesse de glissement est nulle à tout instant $\overrightarrow{V_{gl}} = \overrightarrow{V_I}(R) = \overrightarrow{0}$ et I est alors le centre instantané de rotation du mouvement. Cela se conçoit bien si on remarque que le mouvement de I résulte à la fois de la rotation et de la translation de S ; ces deux mouvements ne se font pas indépendamment dans le cas du roulement sans glissement.
Dans le cas du roulement sans glissement d'un cylindre ou d'un cône sur un plan, l'ensemble des points de contact est une droite D. Il y a roulement sans glissement si $\forall t, \forall I \in D, \overrightarrow{V_I}(R) = \overrightarrow{0}$ et D est l'**axe instantané de rotation**.

6. Statique des fluides

6.1. Notion de pression

Étant donné un élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ autour d'un point M appartenant à une surface finie placée dans un **fluide au repos**, la pression $p(\mathrm{M})$ est la grandeur scalaire définie à partir de la force $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ exercée par le fluide sur cet élément :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = p(\mathrm{M})\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

La force pressante élémentaire est donc toujours **perpendiculaire à l'élément de surface**.

6.2. Loi fondamentale de l'hydrostatique

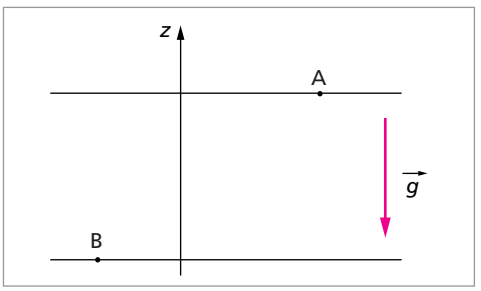
Loi : L'équilibre d'un fluide de masse volumique ρ quelconque placé dans un champ de pesanteur $\overrightarrow{g}(M)$ se traduit par la relation locale :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \rho \overrightarrow{g}$$

Dans le cas particulier d'un **fluide homogène et non compressible**, placé dans un **champ de pesanteur uniforme**, cette relation s'intègre facilement. La différence de pression entre deux points ne dépend alors que de leur différence d'altitude :

$$p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) = \rho g(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B})$$

Cette relation n'est généralement pas vraie pour un gaz.

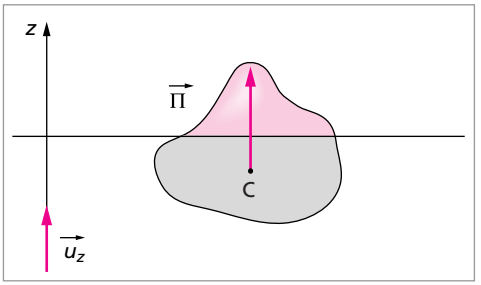


6.3. Théorème d'Archimède

Théorème : Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée verticale et dirigée vers le haut, égale au poids du volume de fluide déplacé.

Si la masse volumique de fluide ρ_f peut être considérée comme constante dans la totalité du volume immergé V, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\Pi} = \rho_f g V \overrightarrow{u_z}$$



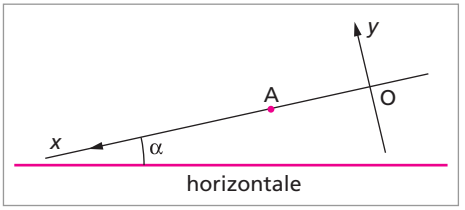
Le centre de masse C du volume de fluide déplacé est appelé centre de poussée. C est le point d'application de $\overrightarrow{\Pi}$. Pour qu'un corps flottant soit stable vis-à-vis du renversement (bateau par exemple), C doit toujours être au-dessus du centre de gravité du corps.

ÉNONCÉS

Mécanique du point : référentiels galiléens

Exercice 1 Mouvements de wagons dans une gare de triage

Ce problème, dont le niveau est proche de celui des terminales scientifiques, a pour but l'utilisation et l'exploitation de la relation fondamentale de la dynamique sur un plan incliné dans des cas de figure permettant de passer en revue différent types de frottements.



Le référentiel terrestre est supposé galiléen. On se propose d'étudier le mouvement de translation d'un wagon de masse m sur une voie rectiligne placée selon une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. La position de son centre d'inertie est repérée par $x = \overline{OM}$.

1. Absence de tout frottement : on néglige tout frottement ; le wagon est lâché de O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle. Donner l'expression de sa vitesse V, puis de x en fonction de g, α et du temps.

2. Frottement solide. La réaction de la voie sur le wagon se fait maintenant avec un frottement solide de coefficient statique f ; on admettra que le coefficient de frottement dynamique garde la même valeur. (En fait le wagon roule sans glisser, mais l'essieu est le siège de frottements solides dont on admet qu'ils sont équivalents à un frottement statique).

2.a Rappeler les lois de Coulomb du frottement solide. À quelle condition entre f et α le wagon se met-il à glisser le long de la pente ?

2.b On suppose que la condition de la question précédente est réalisée. Le wagon est alors lâché de O à $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle. Donner l'expression de x en fonction de g, α, f et du temps.

2.c On lance le wagon vers le haut de la pente avec une vitesse de valeur V_A parallèle à Ox depuis un point A tel que $\overline{OA} = L$. Donner l'expression de x en fonction du temps dans la phase où il remonte la pente. Quel critère sur les vecteurs vitesse et accélération permet de savoir si le mouvement est accéléré ou décéléré ? Discuter ce qui se passe ensuite, selon que la condition du **2.a** est réalisée ou non.

3. Frottement fluide. Le wagon est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -k \cdot \vec{V}$; il n'y a pas de frottement solide.

3.a. Quelle est la dimension de k ? Écrire l'équation différentielle en V du mouvement. Montrer que le wagon atteint une vitesse limite V_l et l'exprimer en fonction de m, g, k, et α. Comment peut-on définir une constante de temps τ caractéristique du mouvement ?

3.b. Donner l'expression de la vitesse en fonction de V_l, τ et du temps si on lâche le wagon de O à $t = 0$ avec une vitesse nulle. En cherchant les équivalents adéquats, préciser quel est le mouvement du wagon dans les cas limites où $t \ll \tau$ et $t \gg \tau$.

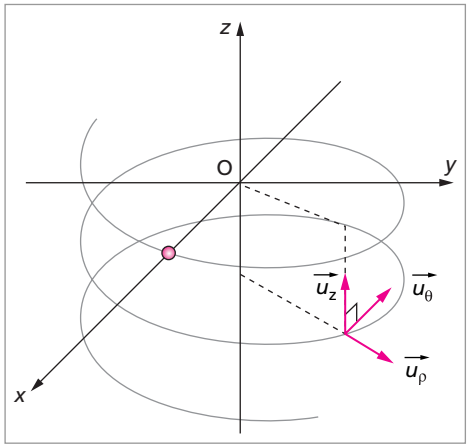
3.c. À $t = 0$, le wagon est lâché avec une vitesse initiale V_0 non nulle ; donner l'expression de la vitesse en fonction de V_l, V_0, τ et du temps. Tracer sur un même graphe l'évolution de V en fonction du temps pour ce cas et celui du **3.b**. Comment peut-on déterminer τ ?

4. Frottements solide et fluide. Le wagon est soumis à la fois à un frottement solide de coefficient f et à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -k \cdot \overrightarrow{V}$. La condition du **2.a** étant vérifiée, écrire l'équation différentielle de son mouvement. (on suppose $V > 0$). Donner l'expression de la nouvelle vitesse limite V_l' du wagon en fonction de f, g, τ, α. Commenter.

Exercice 2 Chute d'un anneau sur une hélice d'axe vertical

Cet exercice a pour but l'utilisation de la relation fondamentale de la dynamique dans un système de coordonnées où les vecteurs de la base dépendent du point, et aborde la résolution d'un problème de mécanique par une méthode énergétique.

Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M peut glisser sans frottements sur un hélice d'axe vertical Oz. On le repère en coordonnées cylindriques par M (ρ, θ, z). L'hélice se trouve sur une surface cylindrique de révolution, d'axe Oz et de rayon R ; son pas est $2\pi b$. La vitesse angulaire dans la rotation autour de l'axe Oz est $\omega = \dot{\theta}$.



1. Écrire les équations de l'hélice en coordonnées cylindriques. Donner (ou retrouver) l'expression générale du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ du point M en coordonnées cylindriques en fonction de $\dot{\rho}$, $\dot{\theta}$, $\dot{z}$, et des vecteurs unitaires du repère. Exprimer $\overrightarrow{V}$ dans le cas particulier de l'hélice en fonction de b, R, ω. Donner l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a}$ dans le cas de l'hélice en fonction de b, R, ω, $\dot{\omega} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)$.

2. La force de liaison (réaction) entre l'hélice et l'anneau sera notée $\overrightarrow{F} = F_\rho \overrightarrow{u_\rho} + F_\theta \overrightarrow{u_\theta} + F_z \overrightarrow{u_z}$. Écrire les relations auxquelles conduit le principe fondamental de la dynamique. Quelle relation peut-on écrire entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{V}$ si on néglige les frottements ? En déduire alors une relation simple entre F_θ, F_z, b et R.

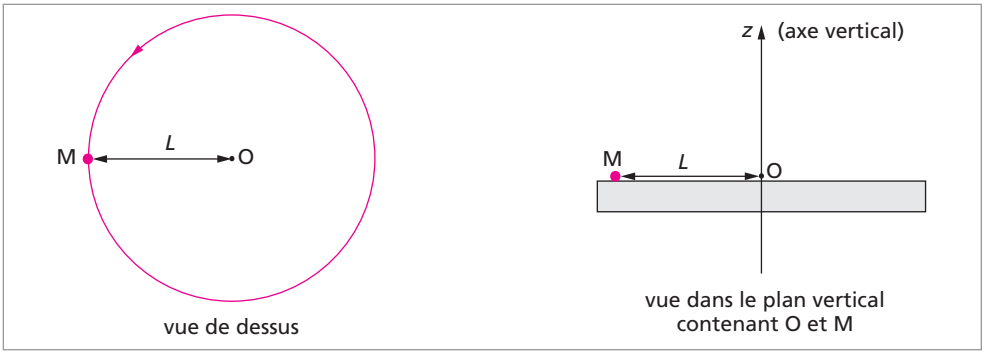
3. Exprimer $\dot{\omega} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ en fonction de g, b, et R. En déduire l'expression de la composante azimutale $\ddot{z}$ de l'accélération. Que peut-on dire de $\ddot{z}$? Sachant que les conditions initiales s'écrivent $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$, donner l'expression de z en fonction du temps.

4. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{F}$ en fonction du temps. Commenter le sens physique de ces résultats.

5. Retrouver l'expression de $\dot{\omega}$ par une méthode énergétique.

Exercice 3 Adhérence d'un véhicule dans un virage

Ce problème requiert la relation fondamentale de la dynamique et la connaissance des lois du frottement solide. L'étude du cas où le virage est relevé est moins facile ; elle est cependant très intéressante, car proche d'une situation courante dans la « vie de tous les jours ». Un véhicule de masse m, qu'on assimilera à un point matériel M, est en mouvement circulaire uniforme de vitesse V sur un cercle horizontal de **rayon** L.



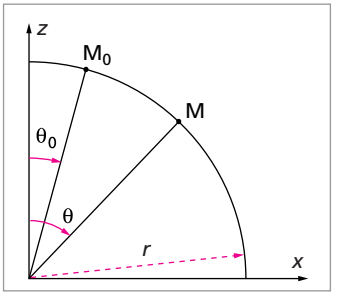
1. Montrer que le mouvement décrit ici est impossible en l'absence de frottement de contact latéral ; on notera $\overrightarrow{R_z}$ la composante verticale de la réaction du support sur M et $\overrightarrow{R_L}$ la composante latérale.

2. f étant le coefficient de frottement latéral, écrire la relation entre f, R_Z et R_L imposée par les lois du frottement solide. En déduire qu'il existe une vitesse limite V_l que le véhicule ne peut pas dépasser pour conserver un mouvement uniforme sur ce cercle ; exprimer V_l en fonction de f, de l'intensité du champ de pesanteur g, et de L.

3. Le virage est maintenant relevé : la piste est inclinée d'un angle $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur l'horizontale.
f, α, m, L étant fixés, le virage est abordé à une vitesse V. Quelle est la valeur idéale V_i de la vitesse pour aborder ce virage, de manière à ce que la réaction de la piste soit normale au support.
Discuter la condition pour que le véhicule ne glisse pas latéralement en distinguant les cas où $V < V_i$ et $V > V_i$. Calculer la nouvelle vitesse limite que le véhicule ne doit pas

dépasser pour rester en mouvement circulaire uniforme sur le cercle de rayon L. Comparer au résultat de la question **2**. Commenter.

Exercice 4 Point matériel sur une sphère

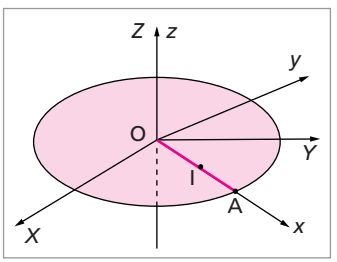


Il s'agit d'étudier un cas où la relation fondamentale de la dynamique ne s'intègre pas directement, (on aura intérêt à travailler dans le repère de Frenet) et où son utilisation conjointe avec le théorème de l'énergie cinétique permet d'aller plus loin dans la résolution.
Un point matériel de masse m est mobile sans frottements sur une demi-sphère de rayon r dont la base est horizontale. À un instant $t = 0$, il est lâché sans vitesse initiale d'un point M_o repéré par l'angle $\theta_0 = (\widehat{Oz, \overrightarrow{OM_0}})$.

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique et le principe fondamental de la dynamique, calculer la valeur de la réaction $\overrightarrow{R}$ du support sphérique en fonction de $\theta = (\widehat{Oz, \overrightarrow{OM}})$ où M est la position du point matériel à l'instant t.
2. Comment varie R en fonction de θ ? Pour quelle valeur θ_d de θ le point M quitte-t-il la sphère ? Quelle est alors la vitesse de décollage ?

Mécanique du point : forces d'inertie

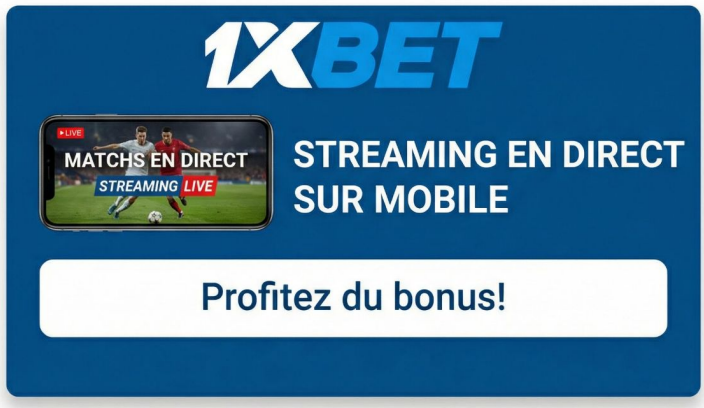
Exercice 5 Référentiel en rotation uniforme : manège



Cet exercice très simple permet de comprendre la structure des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dans le cas où le référentiel entraîné est en rotation.
Le référentiel R, muni du repère absolu $OXYZ$ est galiléen ; un plateau de rayon r tourne à vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe (vertical) OZ. On désigne par R_e le référentiel entraîné lié au plateau ; il est muni d'un repère absolu $Oxyz$. Un point matériel M de masse m, assujetti à se déplacer sur un segment de droite OA lié au plateau est animé d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0, d'amplitude $r/2$, centré en I milieu de OA (on le suppose en I à $t = 0$, de vitesse dirigée vers A). Écrire les expressions des forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}}$ subies par M dans le référentiel lié au plateau en fonction de Ω, m, ω_0, r et du temps. Indiquer soigneusement la direction et le sens de ces forces lorsque M va de O vers A, puis l'inverse.

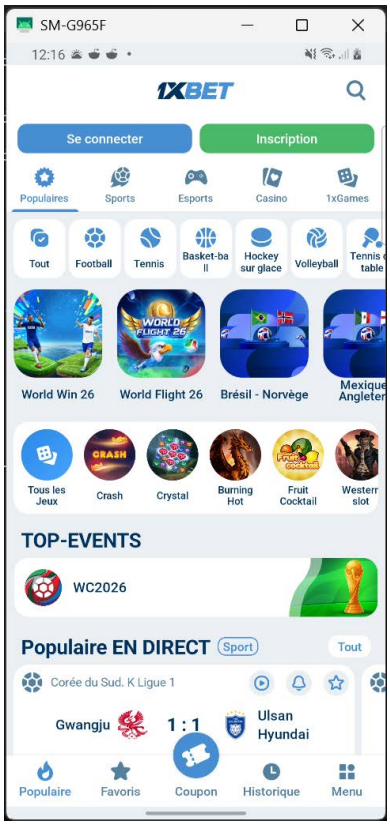
Étudier la valeur de ces forces en fonction du temps, pour $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{\omega_0}\right]$ en les comparant à la vitesse et aux coordonnées de M dans le référentiel entraîné R_e.

ÉTAPES D'INSCRIPTION
pour voir comment creer un compte

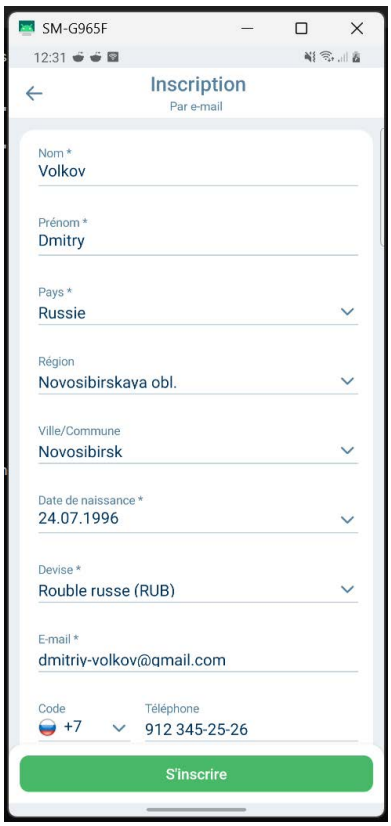

1XBET
MATCHS EN DIRECT
STREAMING LIVE
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!

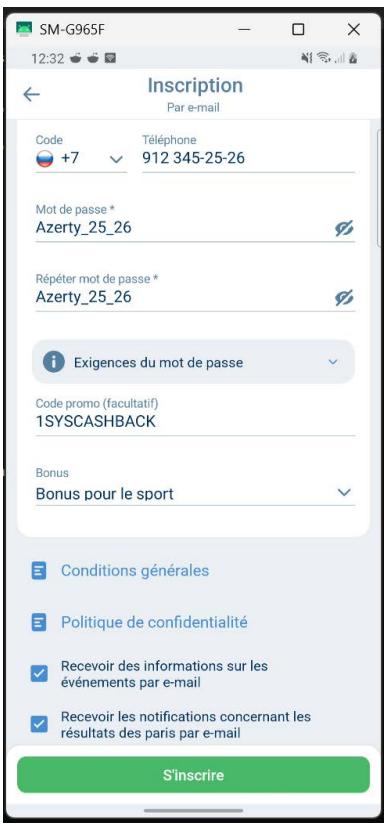
CODE PROMO
1SYSCASHBACK

UTILISATEUR VIP: D. VOLKOV - COMPTE PRO
12:36
SOLDE PRO: 147 500 ₽
1XBET PRO
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
TOP-EVENTS
WC2026
COMPTE AFFILIÉ CERTIFIÉ - ACCÈS ÉLITE
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Wimbledon, 1/8 de finale
1er set
Jeu 1 Score
Roman Safiullin (Q)
Novak Djokovic (7)
1X2
PRO
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:16
1XBET
Se connecter
Inscription
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
TOP-EVENTS
WC2026
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Corée du Sud. K Ligue 1
Gwangju 1 : 1 Ulsan Hyundai
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu

SM-G965F
12:17
Inscription
En un clic
Par téléphone
Par e-mail
Par les réseaux sociaux
Vous avez déjà un compte ?
Se connecter


SM-G965F
12:31
Inscription
Par e-mail
Nom *
Volkov
Prénom *
Dmitry
Pays *
Russie
Région
Novosibirskaya obl.
Ville/Commune
Novosibirsk
Date de naissance *
24.07.1996
Devise *
Rouble russe (RUB)
E-mail *
dmitriy-volkov@gmail.com
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
S'inscrire


SM-G965F
12:32
Inscription
Par e-mail
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
Mot de passe *
Azerty_25_26
Répéter mot de passe *
Azerty_25_26
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
Recevoir des informations sur les événements par e-mail
Recevoir les notifications concernant les résultats des paris par e-mail
S'inscrire

Exercice 6 Forces d'inertie subies sur un manège de fête foraine : montagnes russes

La première partie du problème ne nécessite que la relation fondamentale de la dynamique et le théorème de l'énergie cinétique dans les référentiels galiléens.

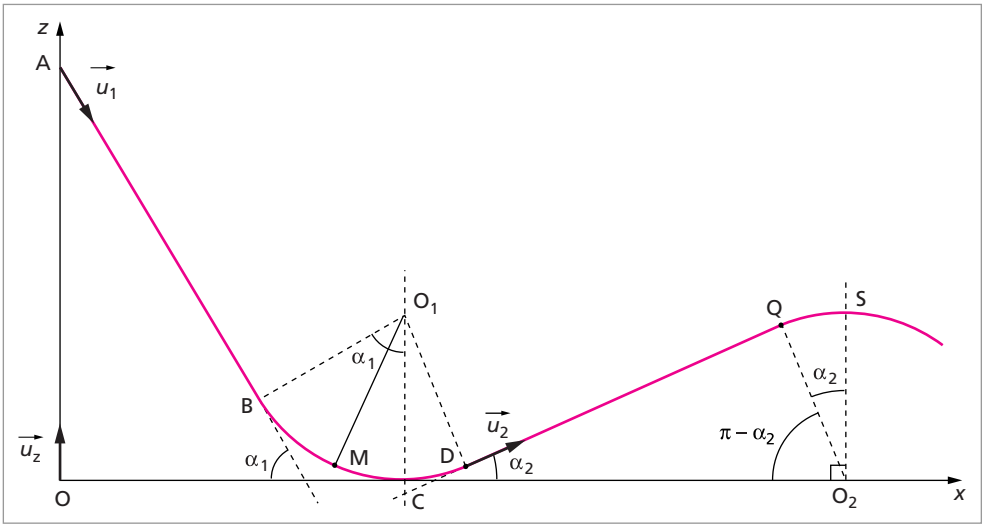
Une piste de « montagnes russes », contenue dans un plan vertical, (xOz) a le profil indiqué sur la figure ci-dessous. Un véhicule, assimilable à un point matériel M de masse m est assujetti à se déplacer sur cette piste sans jamais la quitter ; la liaison (réaction de contact de la piste sur le véhicule) se fait sans frottement de glissement, et on négligera les frottements fluides. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est considéré comme galiléen. Le véhicule part du point A de cote h (OA = h où $h > R$) avec une vitesse initiale nulle.

{AB : Droite inclinée de l'angle α_1 sur l'horizontale }.

{BCD : Arc de cercle de centre O_1, de rayon R, tangent en C à Ox, en B et D aux pistes}.

{DQ : Droite inclinée de l'angle α_2 sur l'horizontale}.

{QS : Arc de cercle de centre O_2, de rayon R, tangent en Q à la piste }.



1. Étude dynamique du mouvement du véhicule : calculer les vitesses V_B, V_C et V_S en fonction de g, h, R et α_1.

Trajet AB : calculer l'accélération a_1 du véhicule puis la réaction R_1 de la piste en fonction de m, g, α_1.

Trajet BCD : M étant repéré par l'angle $\alpha = \widehat{CO_1M}$, donner l'expression des composantes normale et tangentielle de l'accélération en fonction de R, g, h et α. Montrer que la valeur de la réaction de la piste, notée F, s'exprime simplement en fonction des seuls paramètres R, g, h et α. Préciser le sens et la valeur de l'accélération en C.

Trajet DQ : calculer l'accélération a_2 du véhicule en fonction de g et α_2 ; la réaction de la piste sur le véhicule a-t-elle une valeur plus élevée entre A et B ou entre D et Q ?

Trajet QS : écrire l'expression de l'accélération en S en fonction de g, h, R.

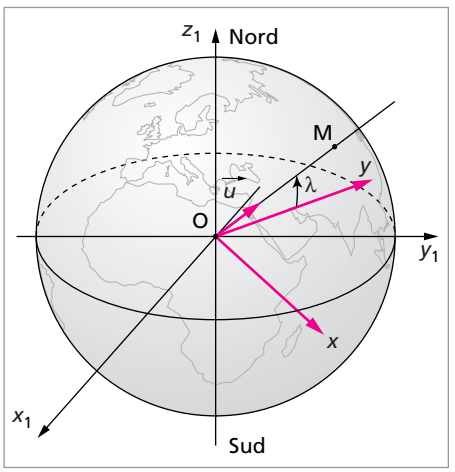
2. Aspect inertiel : on s'intéresse aux sensations (c'est-à-dire aux forces d'inertie) subies par un personnage M′ de masse m' (immobile et attaché dans le véhicule), se trouvant au point M dont on a étudié précédemment le mouvement.
Le personnage subit-il une force d'inertie de Coriolis ? Pourquoi ? On note $\overrightarrow{a_e}(M')$ l'accélération d'entraînement de M' lors du mouvement du véhicule par rapport au sol ; donner l'expression de la force d'inertie subie par M' en fonction de sa masse m' et de $\overrightarrow{a_e}(M')$. Relier l'accélération $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$ du point M par rapport au sol à $\overrightarrow{a_e}(M')$.
Représenter la force d'inertie subie par M' en un point des trajets AB, BCD, DQ, QS, puis en C, et en S. Au point S, la force d'inertie tend-elle à « enfoncer » le personnage dans le siège du véhicule ou à l'en « extraire » ?
Donner l'expression de la force d'inertie subie par le passager :

a. Entre A et B, puis entre D et Q en fonction de m', g, α_1 et α_2.

b. En C, puis en S en fonction de m', R et h.
Quelle doit être la relation entre h et R pour que le passager soit en état « d'impesanteur artificielle » au point S ? Quel serait, dans ces conditions, la valeur du rapport entre la force d'inertie et son poids au point C ? Commenter.

Exercice 7 Champ de pesanteur et champ de gravitation

Ce problème étudie quantitativement la correction sur le champ de gravitation dû à la force d'inertie d'entraînement causée par la rotation de la terre sur elle même.
On assimile la Terre à une sphère parfaite. Le référentiel R_1 représenté par le trièdre $\{O, x_1, y_1, z_1\}$ est en mouvement de translation autour du Soleil, et on le considérera comme galiléen. La Terre tourne sur elle-même dans ce référentiel avec une période $T_S = 2\pi/\Omega$, où T_S est la durée du jour **sidéral**. Le référentiel terrestre $R\{O, x, y, z\}$ lié à la Terre tourne donc avec la période T_S autour de l'axe des pôles Oz.



Soit un point matériel M, immobile dans le référentiel terrestre R et repéré en coordonnées sphériques par $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}$. Comme la répartition de matière dans le globe terrestre est à symétrie pratiquement sphérique, le champ de gravitation a aussi cette symétrie : $\overrightarrow{G}(M) = -(KM_T/r^2)\overrightarrow{u}$ où $K = 6,67.10^{-11}$ U.S.I. et M_T est la masse de la Terre. Puisque R est un référentiel tournant, il n'est pas galiléen et le point M est soumis, en plus

de la force de gravitation $\overrightarrow{F}(M) = m\overrightarrow{G(M)}$ à une force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}(M)}$. Le champ de pesanteur doit donc tenir compte de $\overrightarrow{F_{ie}(M)}$.

1. En supposant M contenu dans le plan Oyz, exprimer $\overrightarrow{g(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{G(M)}$, de Ω, de r et de la latitude λ de M . Évaluer le rapport des ordres de grandeur de $F_{ie}(M)$ par rapport à $F(M)$. Conclure.

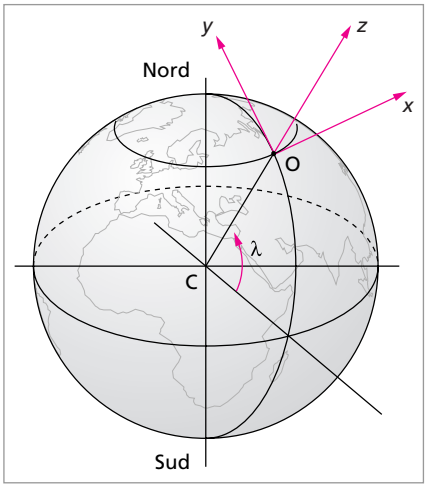
2. En faisant alors un développement limité adéquat, exprimer l'écart relatif dû à la rotation de la Terre sur la **valeur** de g, soit $\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx \left|\frac{g(M) - G(M)}{G(M)}\right|$ en fonction de Ω, de r, de la latitude λ et de $G(M)$. Comment varie cet écart relatif avec r et avec la latitude ? Commenter.

3. Exprimer de même à l'ordre le plus bas, l'écart angulaire ε entre la verticale (définie par $\overrightarrow{g(M)}$) et $\overrightarrow{OM}$ en fonction de Ω, r, λ et $G(M)$. Commenter.

Calculer numériquement $\left|\frac{\Delta g}{g}\right|$ et ε pour $\lambda = 45°$ et $r = 6\,400$ km. Commenter.

Exercice 8 Force d'inertie de Coriolis due à la rotation terrestre

On étudie la force d'inertie de Coriolis subie par quelques objets en mouvement au voisinage de la surface terrestre ; la troisième partie, consacrée à la déviation lors d'une chute libre, permet de rappeler la résolution d'un système de trois équations différentielles linéaires du premier ordre couplées. Le repère $\{O, x, y, z\}$ est appelé repère tangent en O : il est lié à la Terre et tourne donc avec elle. Oz est défini par la verticale du lieu (qui passe pratiquement par O) et le plan Oxy lui est perpendiculaire (Oy est tangent au méridien et Ox au parallèle du lieu O) ; CO a la valeur du rayon de la Terre $R = 6\,400$ km. ω désigne la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même.



1. Soit un point M, de masse m, en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{V}$ par rapport au référentiel terrestre ; on décrit son mouvement dans le repère tangent. Rappeler l'expression de la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}(M)}$ qu'il subit.

2. Mouvement de divers véhicules à la surface terrestre : donner l'expression de $\overrightarrow{f_{ic}(M)}$ en fonction de m, V, Ω et λ (dans l'hémisphère Nord). Indiquer sa direction et son sens, puis calculer numériquement la valeur de cette force en un lieu de latitude 45° :

a. Pour un wagon de masse $m = 20$ tonnes se déplaçant du Nord au Sud le long d'un méridien à la vitesse de 300 km/h ;

b. Pour un avion de même masse se déplaçant d'Ouest en Est le long d'un parallèle à la vitesse de 600 km/h. Cette force dépend-elle de l'altitude à laquelle vole l'avion ?

3. Déviation lors d'une chute libre (déviation « vers l'Est ») : À $t = 0$, le point matériel M est lâché sans vitesse initiale d'un point M_0 de l'axe Oz, d'altitude h. Écrire les équations différentielles en $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de son mouvement en tenant compte de la force d'inertie de Coriolis et en admettant que $\overrightarrow{g}$ est uniforme.

a. Après avoir intégré les équations permettant de calculer $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, établir une équation différentielle en $x(t)$ et l'intégrer en tenant compte des conditions initiales.

b. Supposant $\Omega t \ll 1$, montrer que x est proportionnel au cube du temps de chute. Montrer que $y \ll x$.

c. Exprimer alors la valeur de la déviation x due à la force d'inertie de Coriolis en fonction de h et de λ, et la calculer pour $h = 100$ m en un lieu où la latitude est 45° ; commenter.

Forces centrales et potentiels newtoniens

Les exercices proposés dans cette partie s'enchaînent comme un problème qui traite les mouvements dans des champs de forces centrales (pratiquement, l'ensemble constitue un cours) ; on aura avantage à les traiter dans l'ordre dans lequel ils sont proposés.

Dans les exercices suivants, on utilisera les données astronomiques :

Terre : rayon $R_T = 6\,400$ km ; masse $M_T = 6.10^{24}$ kg

Lune : rayon $R_L = 1740$ km ; masse $M_L = 7.10^{22}$ kg

Soleil : rayon $R_S = 7.10^5$ km ; masse $M_S = 2.10^{30}$ kg

Constante de gravitation : $K = 6,67.10^{-11}$ U.S.I.

Distance moyenne Terre-Lune : $d_{TL} = 385\,000$ km

Distance moyenne Terre-Soleil : $d_{TS} = 150.10^6$ km

Exercice 9 Lois de conservation. Énergie potentielle effective

1. Cas général : un point matériel M, de masse m est soumis à une force centrale $\overrightarrow{F(r)} = f(r)\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{r}/\|\overrightarrow{r}\|$ avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Son mouvement est décrit par rapport à un référentiel galiléen.

Montrer que le moment cinétique en O $\overrightarrow{\sigma_O}$ du point matériel est une intégrale première du mouvement (c'est-à-dire qu'il est conservatif). En déduire que le mouvement est plan. Montrer alors que l'énergie mécanique est aussi intégrale première du mouvement et peut s'écrire en fonction de la seule variable r :

$$E(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + W_{\text{eff}}(r)$$

où $W_{\text{eff}}(r)$ s'exprime en fonction de $E_p(r)$, m, C, r et de la constante des aires $C = \dfrac{\|\overrightarrow{\sigma_O}\|}{m}$.

Quel est son sens physique ? Quel est le sens physique de $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2$?

2. Cas de l'interaction gravitationnelle : l'interaction gravitationnelle donne lieu à des forces centrales dérivant d'une énergie potentielle $E_p(r) = -\dfrac{mk}{r}$ (en adoptant la convention d'une énergie potentielle nulle à l'infini). Dans un champ de gravitation, k est toujours positif ($k = \mathrm{K}.M$ où $\mathrm{K} = 6,67.10^{-11}$ U.S.I et M la masse du centre attracteur). On supposera dans toute la suite que le centre attracteur de masse M est fixe en O.

a. Montrer que $W_{\text{eff}}(r)$ présente un minimum W_{em} pour une valeur de r qu'on notera r_m. Calculer r_m et W_{em} en fonction de C, m et k. Représenter la courbe donnant les variations de $W_{\text{eff}}(r)$ en fonction de r. Dans quelle région est-il répulsif ? Discuter. Comment la position du minimum évolue-t-elle avec C ? Quel est le sens physique de la position $r = r_m$?

b. Montrer que si l'énergie mécanique est négative, le point M est confiné dans une région limitée de l'espace comprise entre deux cercles de centre O, de rayons r_1 et r_2 ; en termes énergétiques, on dit que la particule est confinée dans un puits de potentiel entre deux barrières situées aux distances r_1 et r_2 du centre de force, ce qui correspond à des états liés.

c. Montrer que si l'énergie mécanique est positive, la particule peut aller à l'infini. Discuter.

Exercice 10 Potentiels newtoniens

L'énergie potentielle d'une particule a pour expression :

• $E_p(r) = -\dfrac{mk}{r}$, dans un champ de gravitation avec $k = \mathrm{K}.M$, où $\mathrm{K} = 6,67.10^{-11}$ U.S.I et M est la masse du centre attractif ;

• $E_p(r) = \dfrac{qk}{r}$ pour un champ électrique statique avec $k = Q(1/4\pi\varepsilon_0)$, où Q est la charge du centre qui peut être attractif ou répulsif.

1. Propriétés générales du champ de gravitation : en vous basant sur la forme mathématique de chacune des interactions, dresser un tableau présentant les correspondances entre champ de gravitation et champ électrique statique : forces, champs, potentiels, propriétés du rotationnel et de la divergence, forme intégrale du théorème de Gauss, relation entre énergies potentielles et potentiels.

2. Champ de gravitation d'un astre à symétrie sphérique à l'extérieur de celui-ci : étant donné un astre de rayon R, dont la masse M est répartie selon la symétrie sphérique, calculer la valeur de G à l'extérieur de l'astre (à une altitude z), G_0 étant la valeur du champ à sa surface. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction d'une particule de masse m située à l'altitude z. Discuter le cas où $z \ll R$.

3. Champ de gravitation d'un astre homogène à l'intérieur de celui-ci : en supposant maintenant que la masse volumique de l'astre est une constante ρ, calculer le champ de gravitation à l'intérieur de l'astre. Commenter.

Exercice 11 Vitesse de libération

Soit une particule se trouvant à une distance r de O, en mouvement à la vitesse V. On appelle vitesse de libération $V_l(r)$ de cette particule pour la distance r la vitesse minimale qu'elle doit avoir pour pouvoir s'échapper à l'infini.

1. Calculer $V_l(r)$ en fonction de K, M, et r.

2. Calculer numériquement la vitesse de libération de la Terre sur son orbite dans le champ de gravitation solaire. La comparer à sa vitesse de révolution autour du Soleil et conclure.

3. Calculer numériquement la vitesse de libération d'un objet à la surface du globe dans le champ de gravitation terrestre. La comparer à la vitesse moyenne d'agitation thermique des molécules d'oxygène à 25 °C sous une pression de 1 atm. Conclure.

4. Approche classique du trou noir : rayon de Schwarzschild d'un astre. On se place à la surface d'un astre de masse M donnée et de rayon R . Le premier postulat de la relativité restreinte impose une limite supérieure à la vitesse de tout objet : $v < c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide.

a. Montrer que si R est inférieur à une certaine valeur R_{sc} (rayon de Schwarzschild de l'astre) que l'on exprimera en fonction de G, M et c, rien ne peut s'évader de la surface de cet astre, y compris la lumière. On dit que l'astre est un trou noir.

b. Déterminer le rayon de Schwarzschild du Soleil.

c. Calculer la densité de matière d'un trou noir se trouvant à la limite de Schwarzschild. La comparer à la densité de matière nucléaire. Pourquoi le Soleil ne peut-il pas devenir un trou noir ?

Exercice 12 Lois de Kepler

1. Cas général : montrer que la trajectoire d'un point matériel plongé dans un potentiel newtonien $E_p(r) = -\dfrac{KmM}{r}$ est une conique dont le centre de force est un des foyers, c'est-à-dire que son équation en coordonnées polaires peut se mettre sous la forme (l'axe polaire étant convenablement orienté) :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Calculer le paramètre p de la conique en fonction de la constante des aires C, de M et K. e est l'excentricité de la conique. Un choix correct du sens de l'axe polaire permet de se limiter à $e > 0$.

$e = 0$: cercle de rayon p.

$e = 1$: parabole.

$e > 1$: hyperbole.

$0 < e < 1$: ellipse.

Exprimer l'énergie mécanique du point en fonction de m, C, p, e ; commenter.

2. Trajectoires elliptiques : dans l'hypothèse où la trajectoire est fermée, trouver une relation entre le demi grand axe a, p, et e. Le périgée P correspond à la distance minimale à laquelle la particule s'approche du centre de force, l'apogée A à la distance maximale. Montrer que l'énergie de la particule dans le champ de l'astre s'écrit très simplement en fonction de K, M, m et du demi grand axe a de l'ellipse. Commenter.
Quelle relation simple existe-t-il entre les vitesses au périgée et à l'apogée V_A et V_P ?

3. Lois de Kepler : c'est historiquement à partir des lois de Kepler que les potentiels newtoniens sont entrés dans la physique.
1re loi : les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un foyer.
2e loi : le rayon vecteur issu du Soleil balaie des aires égales pendant des durées égales.
3e loi : les carrés des durées de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.
Commenter ces lois, après avoir démontré la troisième en toute généralité en vous servant des relations précédemment établies.

Exercice 13 Satellites circulaires

1. Cas général ; satellites géostationnaires : calculer (en fonction de R, z, G_o) la vitesse V et la période T d'un satellite de masse m suivant une trajectoire circulaire et gravitant à l'altitude z autour d'un astre de rayon R, de champ G_o en surface, la répartition de masse de l'astre étant à symétrie sphérique. Calculer numériquement l'altitude d'un satellite géostationnaire terrestre. Retrouver la troisième loi de Kepler dans ce cas particulier : montrer que le rapport $\frac{(R+z)^3}{T^2}$ s'exprime simplement en fonction de G_o et R, puis de la masse du centre attracteur M et de K ($m \ll M$)

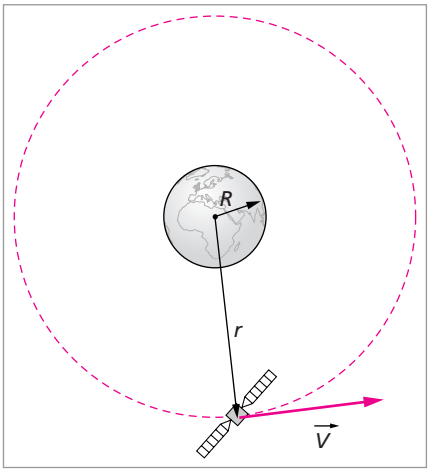
2. Satellites de Jupiter : on donne les rayons des orbites r et les périodes T pour les quatre satellites galiléens de Jupiter (découverts par Galilée en 1610). En réalisant un graphique, montrer que ces valeurs satisfont la troisième loi de Kepler. En déduire la masse de Jupiter.

Nom du satellite	Distance de Jupiter en km	Période de révolution en j
Io	422 000	1,769
Europe	671 000	3,551
Ganymède	1 071 000	7,155
Callisto	1 884 000	16,69

Exercice 14 Effets des frottements atmosphériques sur un satellite

Un satellite gravite sur une orbite pratiquement circulaire, de rayon r autour d'un astre de masse M, de rayon R. Il est de plus soumis à une force de frottement dépendant

de sa vitesse : $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{V}) = -h(V)\overrightarrow{V}$ où $h(V)$ est une fonction positive de $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ uniquement. On supposera cette force très petite devant la force d'attraction gravitationnelle.



1. Montrer que l'énergie mécanique E du satellite dans le champ de pesanteur de l'astre diminue à cause de la force de frottements. Exprimer $\frac{dE}{dt}$ en fonction de V et de $h(V)$.

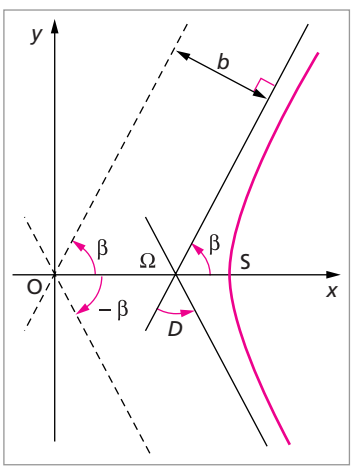
2. Quelle relation a-t-on entre la vitesse V et le rayon r ? Quelle relation peut-on déduire entre $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{dr}{dt}$? Compte tenu de la relation établie au **1**, exprimer $\frac{dV}{dt}$ en fonction de V et de $h(V)$. Comment varient V et r ? Commenter.

Exercice 15 Diffusion coulombienne : déviation d'une particule α par un noyau d'or

On étudie dans un référentiel galiléen associé à un noyau d'or considéré comme cible, de masse M et de charge $Q = Zq_e$, le mouvement d'une particule α, de charge ponctuelle q de masse m, soumise à la seule force coulombienne. La position de la particule est repérée par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$. O, centre des forces est la cible ; on pose $k = \frac{qZq_e}{4\pi\varepsilon_0}$

1. Montrer qu'il est légitime de négliger les forces gravitationnelles devant les forces coulombiennes.

2. En comparant qualitativement m et M, justifier l'approximation consistant à traiter le problème comme si la cible était immobile.



3. On repère le point M dans le plan de sa trajectoire par ses coordonnées polaires r et θ. Montrer que $r^2\dot{\theta} = C$, constante.

L'axe polaire étant orienté selon les conventions du schéma, montrer que la particule α décrit alors une branche d'hyperbole dont l'équation peut s'écrire :

$$r(\theta) = \frac{p}{\frac{\cos\theta}{\cos\beta} - 1}$$

où β est l'angle entre la direction de l'asymptote et l'axe polaire ($0 < \beta < \pi/2$). Exprimer p en fonction de C, m et k. On rappelle que l'excentricité de l'hyperbole est $e = \dfrac{1}{\cos\beta}$.

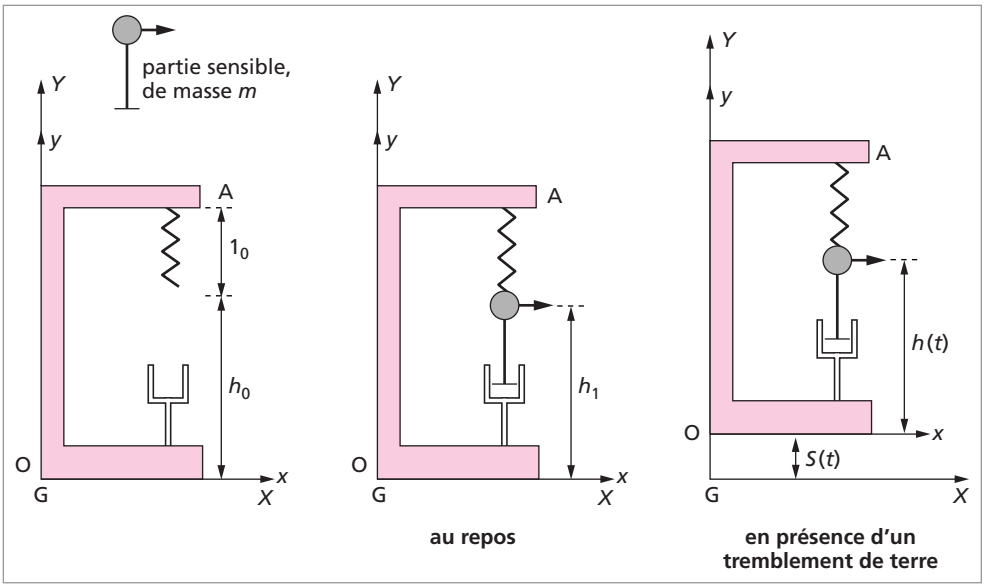
4. Montrer que l'énergie mécanique E de la particule α est aussi une constante du mouvement et s'exprime très simplement en fonction de m, k, C, e. Quelle est la signification physique du signe de E ?

5. Exprimer C en fonction du paramètre d'impact b défini sur le schéma et de la vitesse initiale V_o de la particule α (lorsque θ tend vers β). Calculer alors tan β en fonction de m, k, b et V_o. En déduire la formule de Rutherford donnant $\tan\left(\dfrac{D}{2}\right)$. Commenter le sens physique de cette formule.

Oscillateurs

Exercice 16 Le sismographe pendulaire

Ce problème traite le régime permanent sinusoïdal d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide. Les notions qui y sont abordées se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique fondamentale ; il est nécessaire de bien les maîtriser.



La partie sensible du sismographe pendulaire est une masse munie d'un index et d'une tige. Cet ensemble de masse m, assujetti à se déplacer verticalement, est suspendu à un ressort de longueur à vide l_0, de constante élastique k. Le ressort est fixé en A sur un bâti. La partie sensible (masse + index + tige) est par ailleurs reliée à un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{V}$ où $\vec{V}$ est le vecteur vitesse de la masse dans le référentiel lié au bâti (donc au sol). On pose :

– G*XYZ* : référentiel galiléen R_G du lieu ;

– O*xyz* : référentiel R_S solidaire du bâti et lié au sol. Il est animé, sous l'effet d'un tremblement de terre, d'un mouvement par rapport au référentiel galiléen du lieu.
Un tremblement de terre est modélisé en notation complexe par une vibration verticale harmonique de translation exprimée dans G*XYZ* :

$$S(t) = S_0 \exp(i\omega t) \qquad (S_0 \text{ réel})$$

où $S(t)$ repère le déplacement vertical du sol par rapport au référentiel galiléen du lieu.
∗ h_0 est la hauteur de l'extrémité inférieure du ressort à vide par rapport au sol, sans tremblement de terre ($S(t) = 0$).
∗ h_1 repère la hauteur de la masse à l'équilibre par rapport au sol dans les mêmes conditions.
∗ $h(t)$ est la hauteur de la masse par rapport au sol à un instant quelconque.

1. Trouver une relation entre m, g, k, h_0, h_1, au repos.

2. Exprimer en fonction de m, S_o, ω, t, $\overrightarrow{u_y}$ la force d'inertie d'entraînement, à ajouter aux autres forces dans le référentiel lié au sol (associé à O*xyz*) en présence du tremblement de terre défini plus haut.

3. On pose $H(t) = h(t) - h_1$, grandeur qui repère le déplacement de la masse par rapport au repos dans O*xyz*. Établir l'équation différentielle en $H(t)$ du mouvement de la masse en utilisant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen. Définir la pulsation propre ω_0 et le temps de relaxation τ. Indiquer leur sens physique.

4. Définir le régime permanent sinusoïdal. Exprimer l'amplitude complexe $H_a(\omega)$ des vibrations de la masse en fonction de S_0, ω_0, τ, et ω. Préciser le déphasage ψ entre $S(t)$ et $H(t)$. Commenter.

5. Étude de la réponse en fréquence.

a. À quelle condition le module de l'amplitude $|H_a(\omega)|$ présente-t-il un pic ? À quelle pulsation ω_r cela se produit-il ? Que valent alors le déphasage ψ_r entre $S(t)$ et $H(t)$ et l'amplitude maximale $|H_a(\omega_r)|$. Commenter.

b. Discuter le comportement de la réponse $|H_a(\omega)|$ et de $\psi(\omega)$ à basse, puis à haute fréquence ; quelle en est la signification physique ?

c. Donner l'allure des deux types de courbes représentant le module $|H_a(\omega)|$ et le déphasage $\psi(\omega)$ en fonction de ω ; interpréter ces courbes.

6. Limite d'un oscillateur faiblement amorti $\omega_0\tau \gg 1$. Montrer que $Q = \omega_0\tau$ mesure (à l'ordre le plus bas) la valeur au pic de l'amplitude relativement à S_0. Dans quelles conditions un phénomène analogue est-il rencontré en électricité ?
À quelle fréquence ω_r se produit le pic en amplitude si $Q \gg 1$ (à l'ordre 0 en $\frac{1}{Q}$). Écrire l'équation permettant de définir les fréquences de coupure, par $|H_a(\omega)| = \frac{|H_a(\omega_r)|}{\sqrt{2}}$ et la résoudre. Donner l'expression des fréquences de coupure en fonction de ω_0 et Q, à l'ordre 1 en $\frac{1}{Q}$. En déduire l'expression de la largeur du pic en fonction de ω_0 et Q. Commenter.

7. L'étude du spectre de Fourier des vibrations sismiques montre que leurs périodes se répartissent sur une gamme qui va de 0,1 s à 100 s. En fait, l'essentiel de l'énergie transportée par des ondes longitudinales, assez loin de l'épicentre, est dans le domaine de période allant de 1 s à 10 s. On souhaite une réponse uniforme de l'appareil dans la gamme de fréquence correspondante. Quel régime de fonctionnement doit-on choisir ? Quel en est l'inconvénient majeur ? Comment doit-on choisir la masse ?

Exercice 17 Modèle du dipôle oscillant

Ce problème requiert la connaissance des régimes libre et permanent sinusoïdal d'un oscillateur ; il développe un modèle classique de polarisation atomique et d'interaction matière rayonnement qu'il est nécessaire de connaître.

Un atome neutre comporte Z électrons de masse m, de charge $q = -e$, et un noyau de masse $M \gg m$. Ce dernier est supposé immobile et se trouve au point O. On repère par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$ la position d'un des électrons. Pour un atome isolé, la symétrie impose à la position moyenne d'un électron d'être nulle : $\langle \overrightarrow{r} \rangle = \overrightarrow{0}$. Cette situation peut être obtenue de manière stable si l'électron est soumis à une force centrale de rappel élastique $\overrightarrow{F_c} = -k\overrightarrow{r}$ et à une force d'amortissement $\overrightarrow{f} = -m\Gamma\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$.

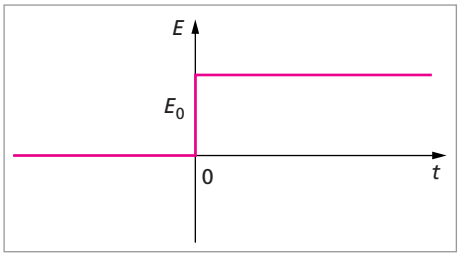
1. Écrire l'équation différentielle en $\overrightarrow{r}$ satisfaite par l'électron lorsque celui-ci est soumis, en plus des forces définies ci-dessus à une force extérieure $\overrightarrow{F}$. Définir la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur constitué par l'ensemble de l'atome et de l'électron.

2. Régime statique : on s'intéresse à l'évolution du dipôle électrique $\overrightarrow{p}$ associé au déplacement d'un seul électron de l'atome : $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{r}$. Exprimer en fonction de Γ, ω_0, $\overrightarrow{E}$, q et m, l'équation différentielle à laquelle obéit $\overrightarrow{p}$ lorsque la force $\overrightarrow{F}$ est due à un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$.

3. Régime transitoire : à $t = 0$, le champ $\overrightarrow{E}$ passe instantanément de $\overrightarrow{0}$ à $\overrightarrow{E_0}$ constant (figure suivante). On cherche le comportement de $\overrightarrow{p}$ pour $t \geqslant 0$.

a. Montrer qu'il existe une solution particulière stationnaire ($\overrightarrow{p_0}$ indépendante du temps) de l'équation différentielle obtenue. Exprimer alors, en fonction de q, m, ω_0, la polarisabilité statique α_0 définie par $\overrightarrow{p_0} = \alpha_0\overrightarrow{E_0}$.

b. Dans l'hypothèse où $\Gamma \ll \omega_0$ et en négligeant les termes d'ordre $\left(\dfrac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2$ devant 1, écrire (en revenant à une expression réelle) l'évolution de $\overrightarrow{p}$ en fonction du temps (et de Γ, ω_0 et $\overrightarrow{p_0}$) supposant que $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ et $\left(\dfrac{d\overrightarrow{p}}{dt}\right) = \overrightarrow{0}$ à t = 0. Selon quel régime le



moment dipolaire atteint-il la valeur $\overrightarrow{p_0}$? Quelle est la durée caractéristique de ce régime transitoire ? Quelle est la grandeur physique qui détermine cette durée ? Expliquer.

4. Réponse harmonique : le champ électrique est maintenant sinusoïdal de pulsation ω :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i\omega t}$$

a. Calculer le dipôle $\overrightarrow{p}$ induit en régime permanent par le champ $\overrightarrow{E}$. Exprimer la polarisabilité complexe $\alpha(\omega)$ (fonction de réponse au champ électrique) définie par $\overrightarrow{p} = \alpha(\omega)\overrightarrow{E_0} e^{i\omega t}$ en fonction de ω, ω_0, Γ et α_0. Tracer la courbe donnant l'allure des variations de $|\alpha(\omega)|$ en fonction de ω dans l'hypothèse où $\Gamma \ll \omega_0$; expliquer le sens physique de ces variations. Quel est la signification physique de $\text{Arg}(\alpha(\omega))$? Tracer la courbe donnant l'allure des variations de $\text{Arg}(\alpha(\omega))$ en fonction de ω ; discuter.

b. On pose $\alpha = \alpha_r - i\alpha_i$ (où α_r et α_i sont réels). On écrira par ailleurs :

$$\overrightarrow{p} = |\alpha(\omega)| \, e^{i\varphi} \overrightarrow{E_0} e^{i\omega t}$$

En revenant aux grandeurs physiques réelles, écrire l'expression de la puissance instantanée $P(t)$ fournie par le champ électrique à l'atome. Définir sa valeur moyenne sur une période $\langle P(t) \rangle_T$, puis la calculer en fonction de ω, E_0 et de α_i.Commenter. Que devient, dans le cadre du modèle utilisé ici la puissance fournie par le champ électrique à l'atome ?

c. On s'intéresse à ce qui se passe au voisinage de ω_0 : on note l'écart à la pulsation propre $\Delta = \omega - \omega_0$ et on suppose que $|\Delta| \ll \omega_0$. Écrire une expression approchée plus simple pour la polarisabilité α en négligeant Δ devant ω_0. Exprimer α_r et α_i en fonction de α_0, ω_0, Γ et Δ. Représenter les variations de α_r et α_i en fonction de Δ. Quel est le profil de α_i ? Montrer alors que la valeur moyenne $\langle P(t) \rangle_T$ peut s'écrire :

$$\langle P(t) \rangle_T \approx P_0 \times \frac{1}{\dfrac{4\Delta^2}{\Gamma^2} + 1}$$

où P_0 est fonction de ω_0, E_0, Γ, et α_0. Comment varie $\langle P(t) \rangle_T$ en fonction de Δ. Expliquer la signification physique de ces résultats.

Chocs

Cette partie requiert les notions de mécanique des systèmes, en particulier la réduction canonique du problème à deux corps pour l'étude des chocs dans le référentiel barycentrique.

Exercice 18 Coefficient de restitution : chocs unidimensionnels

Lors d'un choc, l'ensemble des deux particules concernées peut en général être considéré comme isolé car les forces qui s'exercent entre elles lors du choc sont très grandes devant les autres forces extérieures (puisqu'elles s'exercent pendant une durée « extrêmement courte »).

On appelle coefficient de restitution en vitesse le rapport de leurs vitesses relatives avant et après le choc. On supposera le choc unidimensionnel. Si on appelle V_1 et V_2, les vitesses respectives avant le choc, V_1' et V_2', les vitesses après le choc dans le référentiel du laboratoire, on a :

$$e = -\left(\frac{V_1' - V_2'}{V_1 - V_2}\right) = -\left(\frac{V_r'}{V_r}\right)$$

Les vitesses sont algébriques.

1. Calcul des vitesses dans le référentiel du laboratoire R_{lab}, supposé galiléen : quelle(s) grandeur(s) se conserve(nt) au cours du choc ? exprimer V_1' et V_2' en fonction de V_1, V_2, m_1, m_2 et e.

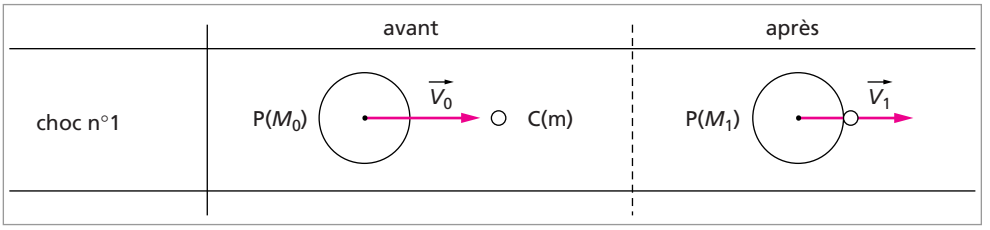
2. Calculer la variation d'énergie cinétique du système au cours du choc en fonction de V_1, V_2, m_1, m_2 et e.

3. Examiner les cas des chocs élastiques et des chocs mous.

4. Examiner le cas d'une réaction exothermique.

Exercice 19 Phénomène d'agrégation (collage)

Un objet P (cela peut être, par exemple un astéroïde) de masse initiale M_0 et de vitesse initiale $\vec{V_0}$ traverse une région de l'espace où se trouvent des objets C plus petits et immobiles, de masse m. À chaque fois que P entre en collision avec une cible C, le choc est mou. On note $\vec{V_n}$ la vitesse de l'objet juste après le choc numéro n et M_n sa masse. Les chocs sont unidimensionnels.



1. Rappeler la (les) loi(s) de conservation pour un tel choc, en précisant le système étudié.

2. Calculer V_1 en fonction de V_0, M_0 et m ; calculer V_2 en fonction de V_1, M_0 et m. En déduire l'expression de V_2 en fonction de V_0, M_0 et m. En étudiant le choc N° n, exprimer V_n en fonction de V_{n-1}, M_0 et m. Déduire de ce qui précède l'expression de V_n en fonction de V_0, M_0 et m.

3. On pose $\alpha = \dfrac{m}{M_0}$. Ecrire V_n en fonction de V_0 et α. Comment varie V_n avec n (α étant fixé) ? Calculer le nombre $n_{1/2}$ de chocs nécessaires pour que la vitesse de P soit égale à la moitié de sa vitesse initiale. Quelle est alors la masse de P ? Commenter. **A.N.** $\alpha = 0{,}001$.

4. Calculer l'énergie cinétique $E_c(n)$ de P après le choc N° n en fonction de l'énergie cinétique initiale $E_c(0)$, de M_0, m et n. Écrire $E_c(n)$ en fonction de $E_c(0)$, n et α. Comment varie $E_c(n)$ avec n à α fixé ? Quel est le sens physique de ce résultat ?

Exercice 20 Collisions élastiques en mécanique classique

Un projectile N de masse m de vitesse $\overrightarrow{V_0}$ par rapport au référentiel du laboratoire R_{lab} heurte une cible C de masse km au repos dans R_{lab}. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{\text{N}}}'$ du projectile après le choc n'est pas forcément colinéaire à $\overrightarrow{V_0}$; on se propose de calculer l'énergie cinétique moyenne du projectile après le choc en moyennant sur toutes les directions possibles. Il est beaucoup plus commode de faire ce calcul dans le référentiel du centre de masse (ou barycentrique) R_{ba}. On appelle $\overrightarrow{V_{\text{G}}}$ le vecteur vitesse du centre de masse du système $\{N, \text{C}\}$ par rapport à R_{lab}, et on notera $\overrightarrow{u_{\text{N}}}$, $\overrightarrow{u_{\text{C}}}$, $\overrightarrow{u_{\text{N}}}'$, $\overrightarrow{u_{\text{C}}}'$ les vecteurs vitesses du projectile et de la cible respectivement avant puis après le choc par rapport au référentiel R_{ba}.

1. Relations générales

a. Calculer $\overrightarrow{V_{\text{G}}}$, $\overrightarrow{u_{\text{N}}}$ et $\overrightarrow{u_{\text{C}}}$ en fonction de $\overrightarrow{V_0}$ et k. Montrer qu'on a une relation très simple entre $\overrightarrow{u_{\text{N}}}$, $\overrightarrow{u_{\text{C}}}$ et k.

b. Quelle équation relie $\overrightarrow{u_{\text{N}}}'$, $\overrightarrow{u_{\text{C}}}'$ et k ?

c. Le choc est de plus supposé élastique ; montrer alors qu'on peut en déduire une relation entre $\|\overrightarrow{u_{\text{N}}}\|$ et $\|\overrightarrow{u_{\text{N}}}'\|$, puis entre $\|\overrightarrow{u_{\text{C}}}\|$ et $\|\overrightarrow{u_{\text{C}}}'\|$.

2. Énergie cinétique moyenne du projectile après le choc

a. On note α l'angle entre les directions de $\overrightarrow{V_{\text{G}}}$ et de $\overrightarrow{u_{\text{N}}}'$; c'est la déviation mesurée dans le référentiel du centre de masse. Exprimer l'énergie cinétique $E'_{\text{C}}(\text{N}/R_{\text{lab}})$ du projectile après le choc par rapport au laboratoire en fonction de son énergie cinétique initiale $E_0 = \dfrac{1}{2}mV_0^2$, de k et de α. Que peut-on dire du rapport entre $E'_{\text{C}}(\text{N}/R_{\text{lab}})$ et E_0 ?

b. Toutes les directions sont permises dans R_{ba} ; on admettra de plus que la répartition de l'angle de déviation est isotrope dans R_{ba}. Justifier l'expression de la valeur moyenne de l'énergie cinétique du projectile après le choc par rapport au laboratoire :

$$\langle E'_{\text{C}}(\text{N}/R_{\text{lab}})\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} E'_{\text{C}}(\text{N}/R_{\text{lab}})\sin\alpha\,\text{d}\alpha$$

Montrer que la valeur moyenne de l'énergie cinétique E_1 du projectile après un choc s'écrit $E_1 = \eta E_0$, où le facteur d'efficacité du ralentissement η ne dépend que de k ; le ralentissement est d'autant plus efficace que η est faible. Tracer l'allure de la courbe donnant les variations de η en fonction de k. Commenter.

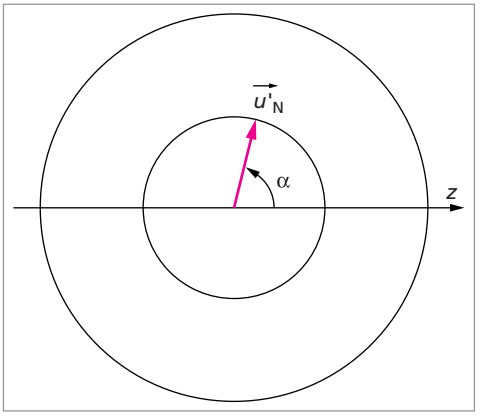
3. Cas où la cible est plus légère que le projectile : $k < 1$

Les diagrammes de collision permettent de représenter l'ensemble des lois de conservation au cours d'un choc ; on les construit de la manière suivante.

Le lieu des extrémités des vecteurs vitesse $\overrightarrow{u}'_{\text{N}}$ du projectile dans R_{ba} après le choc est un cercle de rayon r et le lieu des extrémités des vecteurs vitesse $\overrightarrow{u}'_{\text{C}}$ de la cible dans R_{ba} est un cercle de rayon 1. Que vaut r pour un choc élastique ? Le vecteur $\overrightarrow{V_{\text{G}}}$ est parallèle à l'axe Oz. α repère l'angle entre $\overrightarrow{V_{\text{G}}}$ et $\overrightarrow{u}'_{\text{N}}$ et peut varier de 0 à 2π.

Représenter $\overrightarrow{u_{\text{N}}}$, $\overrightarrow{u_{\text{C}}}$, $\overrightarrow{u}'_{\text{N}}$, $\overrightarrow{u}'_{\text{C}}$ et $\overrightarrow{V_{\text{G}}}$. Tracer alors les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_{\text{N}}}$, $\overrightarrow{V}'_{\text{N}}$ et $\overrightarrow{V}'_{\text{C}}$ dans le référentiel du laboratoire. Montrer alors que si $k < 1$, l'angle de déviation D du projectile, mesuré dans le laboratoire est obligatoirement inférieur à une certaine valeur D_{max} ne dépendant que de k . Commenter.

4. Cas où la cible est plus lourde que le projectile : application à la thermalisation des neutrons.



Tracer le diagramme de collision pour $k>1$, et montrer qu'il n'existe pas de borne supérieure de la déviation D mesurée dans le référentiel du laboratoire.

La section efficace de fission de $^{235}_{92}U$ dépend très fortement de l'énergie du neutron incident et présente des valeurs très élevées lorsque cette énergie se situe dans la gamme [0,002 eV; 0,5 eV]. On parle de neutrons thermiques. Or dans un réacteur nucléaire, l'énergie cinétique des neutrons immédiatement produits par la fission est de l'ordre du MeV. Les conditions pour qu'une réaction en chaîne se produise en régime permanent sont complexes. Quoiqu'il en soit, il est clair que les neutrons émis par une réaction de fission doivent être ralentis pour produire de nouvelles fissions.

Après n chocs, l'énergie cinétique moyenne du neutron est $E_n = \eta^n E_0$. Calculer le nombre de chocs nécessaires pour qu'un neutron d'énergie $E_0 = 2$ MeV produit par une fission devienne thermique ($E_n = 0{,}05$ eV), dans les cas des noyaux ^1H, ^2H, ^{12}C et ^{16}O. Commenter.

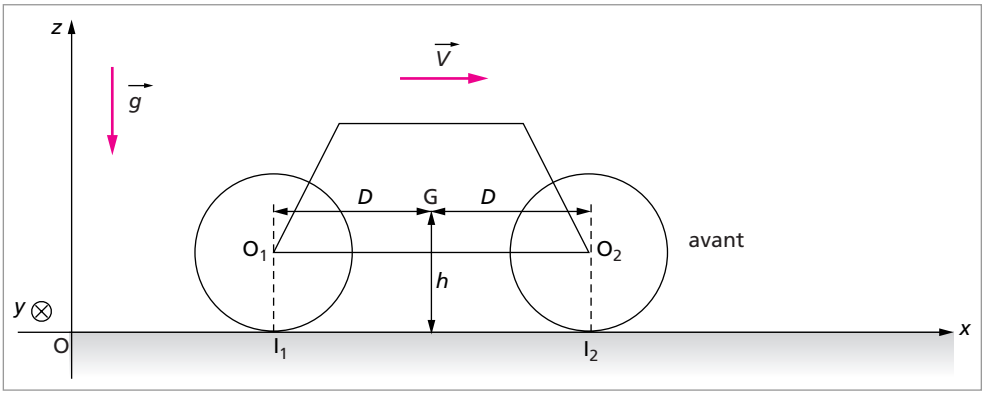
Mécanique des systèmes et du solide

Exercice 21 Mouvement d'une moto (ou d'une mobylette)

Ce problème est construit de manière à aborder l'ensemble des méthodes habituellement utilisées pour résoudre un problème de mécanique du solide. Il permet, en outre de comprendre le rôle des frottements entre le sol et les roues dans la propulsion d'un véhicule. On y retrouve de façon simple plusieurs résultats familiers dans le domaine du comportement des véhicules motorisés.

On étudie le mouvement rectiligne sur un sol horizontal d'une moto, de masse totale M avec le conducteur et dont les articulations sont parfaites : on suppose donc le système {moto + conducteur} rigide. Les deux roues sont identiques, assimilables à des anneaux parfaits homogènes de masse m et de rayon R. Seule la roue arrière est motrice ; g est l'intensité du champ de pesanteur terrestre. Le référentiel terrestre R_t supposé galiléen est muni du repère absolu $\left\{O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}\right\}$, et on désignera par R_{ba} le référentiel barycentrique relatif au système S {moto + conducteur} de centre d'inertie G.

La moto démarre, et on suppose que les roues roulent sans glisser sur le sol. S avance à la vitesse $\overrightarrow{V} = V\vec{u_x}$ par rapport au sol ($V > 0$). On considère d'autre part que les roues sont les seules parties en rotation du véhicule. On néglige donc l'énergie cinétique et le moment cinétique associés à la rotation du moteur et des organes de transmission.



1. Calculer, dans le référentiel R_t, en fonction de M, m, R, V :

- la vitesse angulaire des roues ($\vec{\omega} = \omega\vec{u_y}$) dans l'hypothèse du roulement sans glissement.
- l'énergie cinétique de la moto ;
- la quantité de mouvement $\vec{p}$ et le moment cinétique en G, $\vec{\sigma_G}$ de S.

Durant la phase de démarrage, on applique sur la roue arrière un couple de moment constant $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_y}$, $\Gamma > 0$ (qui tend à faire tourner cette roue dans le sens des aiguilles d'une montre sur le schéma.)

2. Calculer l'accélération $\vec{a} = a\vec{u_x}$ de la moto en fonction de M, m, R, Γ en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

3. On appelle $\vec{T_1} = T_1\vec{u_x}$ la composante tangentielle de la réaction exercée sur la **roue** arrière par le sol et $\vec{N_1} = N_1\vec{u_z}$ la composante normale de cette réaction. $\vec{T_2} = T_2\vec{u_x}$ est la composante tangentielle de la réaction exercée sur la roue avant par le sol, $\vec{N_2} = N_2\vec{u_z}$ sa composante normale. Dans le cas général, on prendra T_1, T_2, N_1, N_2 algébriques.

a. Écrire le théorème du moment cinétique pour le sous système {Roue avant} puis pour le sous système {roue arrière}, et en utilisant les résultats précédents, exprimer T_1 et T_2 en fonction de M, m, R, et Γ.

b. Écrire le théorème de la résultante cinétique (relation fondamentale de la dynamique) appliqué au système S . Compte tenu des relations du a), calculer a, puis T_1 et T_2 en fonction de M, m, R et Γ.

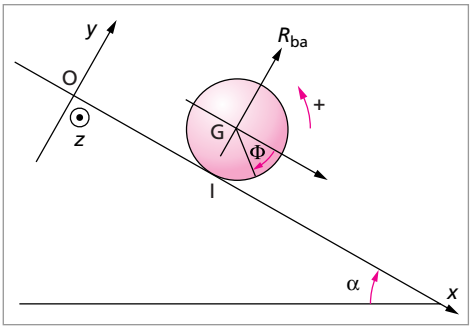
c. Après avoir appliqué le théorème du moment cinétique en G pour le système S, exprimer N_1 et N_2 en fonction de M, m, Γ, g, R, h et D. Interpréter le sens physique de la différence observée entre N_1 et N_2 ; comment cette différence varie-t-elle avec Γ ? En quoi cela correspond-il à votre expérience des voyages en deux roues ? À quoi correspond le cas où $N_2 = 0$?

4. On désigne par f_0 le coefficient de frottement pour le contact sol-roues.

a. À quelle condition sur Γ la roue arrière ne patinera-t-elle pas ? (Mouvement de la moto sans glissement de la roue arrière). Commenter le sens physique de ce résultat.

b. Sur une route enneigée, lors d'un démarrage à vitesse de rotation du moteur fixée, on constate que la roue motrice qui « patine » en première roule sans glisser si on adopte un rapport supérieur de la boîte à vitesse. Pourquoi ?

Exercice 22 Mouvement d'une bille sur un plan incline



La résolution de ce problème requiert la connaissance des lois du frottement, la notion de roulement sans glissement et les théorèmes fondamentaux de la mécanique du solide dans un référentiel galiléen.

Une bille homogène, de masse m, de rayon r est placée sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale ; on appelle f le coefficient de frottement entre la bille et le plan. Son centre d'inertie G est en mouvement rectiligne selon la ligne de plus grande pente du plan incliné et est repéré par l'abscisse x_G. Son mouvement de rotation dans le référentiel barycentrique ne comporte pas de pivotement ; la rotation se fait autour d'un axe passant par G et parallèle à Oz et est repérée par l'angle ϕ. On posera $\omega = \dfrac{d\Phi}{dt}$; noter que le produit vectoriel impose ici le sens positif pour ω : ω est négatif si la bille descend.

1. On décompose la réaction du support sur la bille en une composante normale $\overrightarrow{N}$ et une composante tangentielle $\overrightarrow{T}$. On notera algébriquement leurs projections N et T. Expliciter les trois équations, dont deux équations différentielles en x_G et ϕ, obtenues à partir des théorèmes fondamentaux de la dynamique.

2. Roulement sans glissement

a. Écrire la relation entre $\dot{x_G}$ et $\dot{\Phi}$ dans le cas où la bille roule sans glisser sur le plan.

b. Déterminer le mouvement de G.

c. Calculer N et T en fonction de m, g et α, puis montrer que le roulement sans glissement n'est possible que si α est inférieur à une certaine valeur α_l.

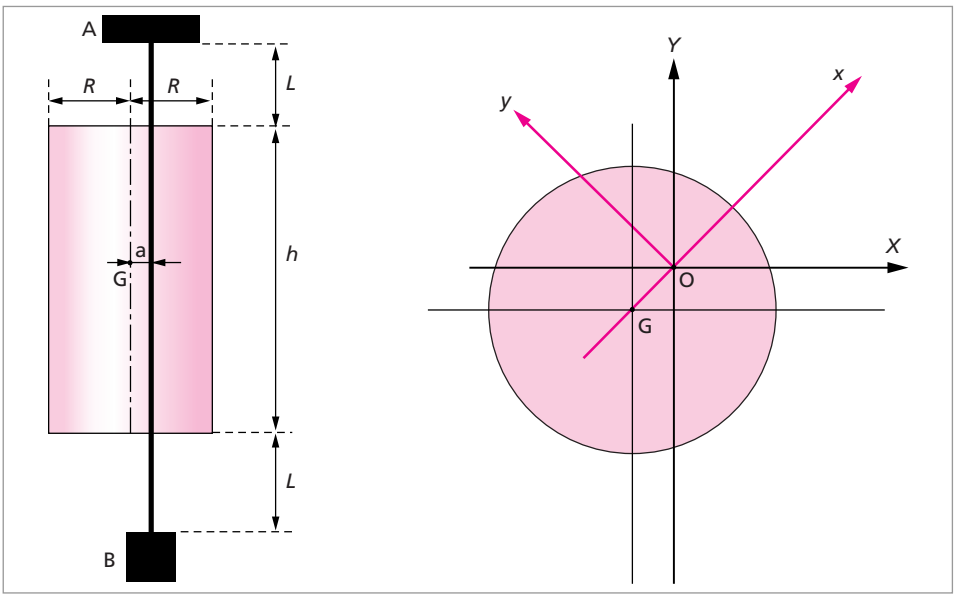
d. On lâche la bille sans vitesse initiale à $t = 0$, l'abscisse de G étant nulle. Calculer x_G en fonction du temps. Calculer l'énergie cinétique de la bille en fonction de m et de $V_G = \dot{x}_G$, puis la variation d'énergie cinétique de la bille entre $t = 0$ et t en fonction du temps. Calculer par ailleurs le travail du poids entre $t = 0$ et t en utilisant l'équation horaire.
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, en déduire le travail des forces de liaison. Que peut-on dire du travail des forces de liaison lorsque l'on a roulement sans glissement ?

3. Cas où $\alpha > \alpha_l$

Calculer l'accélération de G, puis l'accélération angulaire de la bille en fonction de f, g, r et α pour $\alpha > \alpha_l$. Tracer l'évolution de l'accélération de G en fonction de $\sin\alpha$; commenter.

Exercice 23 Équilibrage statique d'un solide mobile autour d'un axe fixe

Il s'agit d'étudier l'équilibre d'un solide dans un référentiel non galiléen en rotation.
Un cylindre homogène, de rayon R, de masse M, de hauteur h est mobile autour d'un axe OZ fixe parallèle à son axe de révolution mais qui ne passe pas par son centre de gravité ; on appelle a la distance entre OZ et G. Deux paliers A et B situés à la distance L de chaque extrémité du cylindre assurent la fixité de l'axe de rotation. On peut travailler soit dans un référentiel fixe galiléen R_g muni d'un repère $\{OXYZ\}$ qui lui est lié, soit dans un référentiel R muni d'un repère $\{Oxyz\}$ tournant avec le cylindre (G est sur Ox).



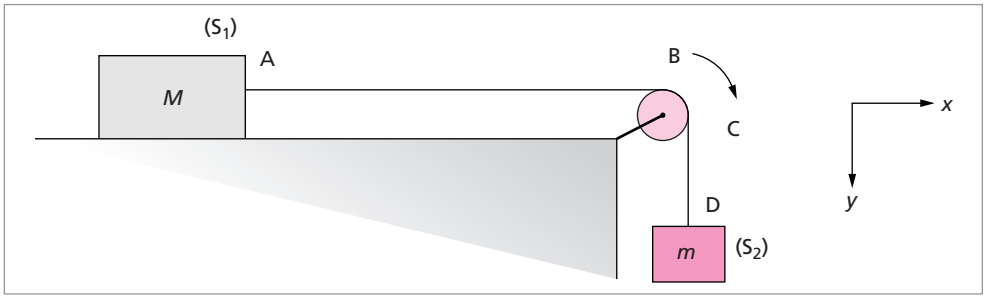
1. Déterminer les composantes des réactions $\overrightarrow{R_A}$, et $\overrightarrow{R_B}$ à l'équilibre lorsque le système ne tourne pas ; commenter.

2. Déterminer, en travaillant dans le référentiel tournant $\{Oxyz\}$ les composantes des réactions $\overrightarrow{R_A}$, et $\overrightarrow{R_B}$ subies par les paliers lorsque l'ensemble tourne à la vitesse angulaire constante ω.
A.N. $R = 30$ cm ; $h = 1$ m ; $L = 2$ cm ; $a = 0{,}1$ mm ; rotation à 3 000 tours/min pour un cylindre en acier (densité : 8,7). Commenter.

Exercice 24 Réalisation d'accélérations constantes

Il s'agit d'étudier la dynamique d'un système déformable. Cet exercice, très simple dans son principe, permettent de clarifier deux notions qui posent souvent problème : a) La notion de sous système et b) Les problèmes de signe liés à la projection de la relation fondamentale de la dynamique.

1. M est en mouvement sur un plan horizontal (on négligera tout frottement)



Le solide S_1 de masse M peut glisser d'un mouvement de translation sans frottements sur le plan horizontal. La masse $m(S_2)$ est en translation verticale. La poulie, mobile autour d'un axe horizontal a un moment d'inertie J par rapport à celui ci et un rayon r.
Calculer l'accélération de la masse M en fonction de m, M, J, r et g. Commenter.

Exercice 25 Mouvement d'une fusée à un étage

Ce problème permet de comprendre la propulsion par réaction. Il met en œuvre l'utilisation de la relation fondamentale de la dynamique pour un système déformable en faisant un bilan de quantité de mouvement entre deux instants voisins.
Une fusée dont on désignera la masse à l'instant t par m fonctionne en éjectant des gaz à une vitesse $\overrightarrow{u}$ constante par rapport à la tuyère, avec un débit constant $D = -\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ (positif).

1 En étudiant la variation de quantité de mouvement entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ d'un système convenablement choisi, établir l'équation du mouvement de la fusée en présence de forces extérieures de résultante $\overrightarrow{f_e}$, en fonction de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{f_e}$, D, m et de son vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$. Comment peut-on définir la poussée du réacteur ?

2. La fusée de masse totale $(M + m_0)$ à $t = 0$ est placée sur son aire de lancement. La masse initiale de propergol est m_0 et la masse de l'ensemble de la structure est M. A quelle condition peut-elle décoller du pas de tir ?

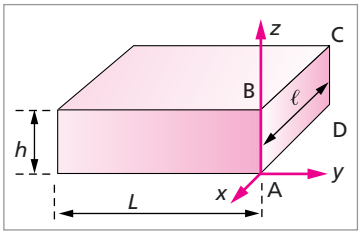
3. La condition de décollage étant réalisée, et la fusée en translation verticale, exprimer sa vitesse V_f lorsque la totalité du propergol est consommée en fonction de M, m_0, u, g et D, en négligeant la résistance de l'air. Commenter.

4. Calculer alors l'altitude z_f atteinte par la fusée lorsque tout le propergol est consommé en fonction de M, m_0, u, g et D ; discuter ce résultat en fonction des différents paramètres.

Mécanique des fluides

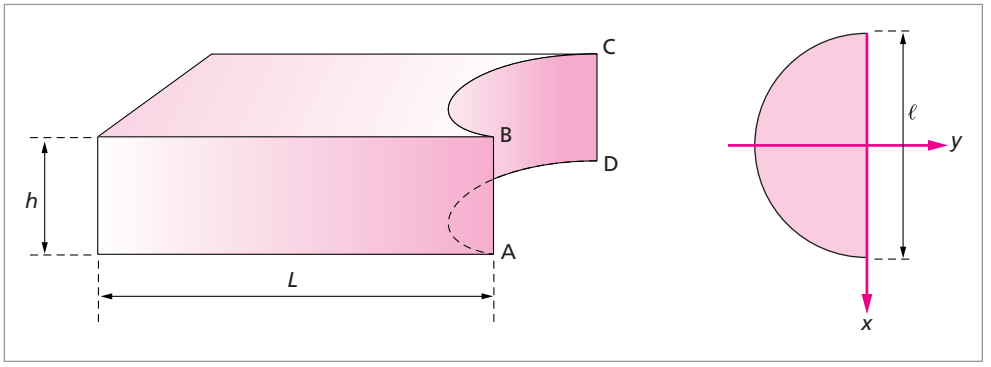
Exercice 26 Forces subies par des murs de barrages verticaux

Cet exercice est une application directe de la relation fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide incompressible.



1. Calculer la force résultante exercée par l'eau sur le mur vertical rectangulaire ABCD dans le cas du réservoir suivant :

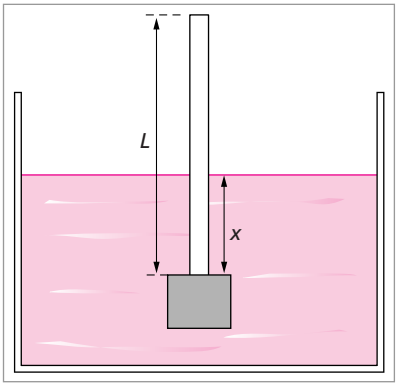
2. Même question dans le cas où le mur vertical est semi-circulaire ; Conclure.



Exercice 27 Densimètre

Cet exercice est une application directe de la poussée d'Archimède.

Un densimètre de masse M comporte un tube cylindrique fermé, de masse m, de longueur L et de section S, lesté à sa base par du mercure enfermé dans une ampoule en verre de volume V_0. On le plonge dans un liquide de masse volumique ρ, et l'équilibre est obtenu lorsque la partie immergée du tube a une hauteur x. Établir la relation entre ρ et x. La graduation en densité est-elle linéaire ?



Exercice 28 Tension artérielle ; influence de l'accélération d'inertie.

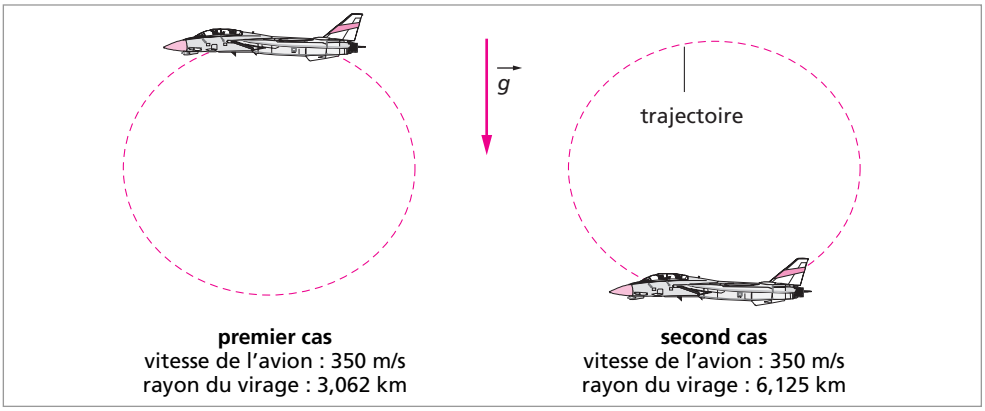
Dans la seconde partie, on étudie la relation fondamentale de l'hydrostatique dans des référentiels accélérés.

La pression artérielle (moyenne) au niveau du cœur est supérieure de 100 mm Hg à la pression atmosphérique. On prendra un individu tel que :
distance pieds-cœur : $h_p = 135$ cm
distance tête-cœur : $h_T = 45$ cm

1. Calculer la pression hydrostatique au niveau du cerveau et des pieds dans les cas suivants :

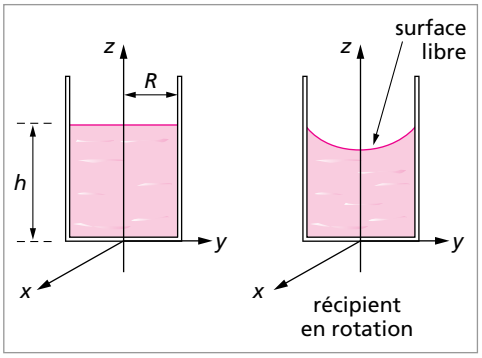
- Individu debout à la surface de la terre ;
- Individu « la tête en bas, les pieds en l'air », les mains posées à la surface terrestre.

2. Les pilotes de chasse sont soumis, lorsqu'ils effectuent des virages serrés à grande vitesse à des accélérations apparentes pouvant atteindre plusieurs fois le champ de pesanteur g. Expliquer qualitativement ce phénomène. Les effets de ces accélérations sur la circulation sanguine provoquent des troubles connus sous les noms de « voile rouge » ou « voile noir ». Calculer la pression hydrostatique au niveau du cerveau et des pieds dans les deux cas suivants, puis commenter ces résultats.



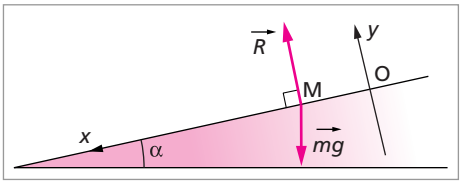
Exercice 29 Fluide en équilibre dans un référentiel tournant

Un récipient cylindrique, de rayon R, contient un fluide parfait de masse volumique ρ sur une hauteur h. Il tourne autour de son axe de révolution, vertical, dans le champ de pesanteur uniforme g à la vitesse angulaire constante ω. Trouver le profil de sa surface libre à l'équilibre.



SOLUTIONS

1 **1.** Absence de tout frottement : le système étudié est le wagon, et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement est galiléen. Le théorème du centre de masse nous apprend que le mouvement de son **centre d'inertie** noté M est le même que celui d'un point matériel qui serait doté de sa masse totale et soumis aux mêmes forces extérieures. On étudie donc le mouvement de ce point.



Les deux seules forces qu'il subit sont :

– Force à distance : poids $m\vec{g}$

– Force de contact : réaction du support $\vec{R}$

Le bilan des forces est présenté sur la figure ci-dessus. Puisqu'il n'y a aucun frottement de contact, $\vec{R}$ ne travaille jamais, donc sa puissance $\vec{R}.\vec{V}$ est nulle à tout instant ; la direction de $\vec{R}$ est donc normale au plan incliné, puisque $\vec{V}$ est parallèle à Ox. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$$

où $\vec{a}$ est l'accélération de M, ce qui donne en projection sur les axes Ox et Oy : $R = mg\cos\alpha$ et $\ddot{x} = g\sin\alpha$. Le mouvement du wagon est à accélération constante. Compte tenu des conditions initiales, on a :

$$x = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha\right)t^2$$

2.a. La réaction du support $\vec{R}$ travaille lorsque M se déplace ; elle a donc une composante tangentielle $\vec{R_T}$, contenue dans le plan incliné et une composante normale $\vec{R_N}$. La figure ci-dessous présente le bilan des forces, lorsque le wagon est supposé descendre la pente. Il importe de bien comprendre que le frottement solide est un phénomène à effet de seuil (donc non linéaire). Les lois de Coulomb du frottement solide de glissement imposent que :

* $\left\|\vec{R_T}\right\| \leqslant f\left\|\vec{R_N}\right\|$

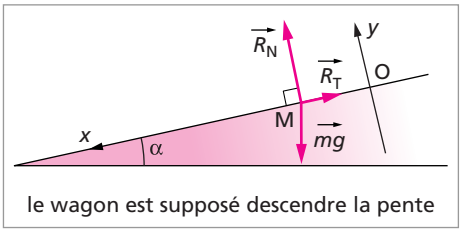
* Si le solide glisse avec une vitesse de glissement $\vec{V}$, alors $\left\|\vec{R_T}\right\| = f\left\|\vec{R_N}\right\|$ et $\vec{R_T}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires avec $\vec{R_T}.\vec{V} < 0$. Cette dernière relation exprime que le travail dû à des forces de frottements est résistant.

Tant que l'angle α est inférieur à une certaine valeur limite, le wagon est immobile ; en dessous du seuil de glissement, la force de frottement solide « s'ajuste » de manière à ce que $m\vec{g} + \vec{R_T} + \vec{R_N} = \vec{0}$, pourvu que la contrainte $\left\|\vec{R_T}\right\| < f\left\|\vec{R_N}\right\|$ soit satisfaite avec

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$. En projetant $\overrightarrow{R}$ sur les axes, on a alors $R_N = mg\cos\alpha$ et $R_T = mg\sin\alpha$, où R_T et R_N sont comptés arithmétiquement.
La relation fondamentale de la dynamique $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} = m\overrightarrow{a}$ conduit en projection à :

$$R_N = mg\cos\alpha \quad \text{et} \quad \ddot{x} = g\sin\alpha - \frac{R_T}{m}$$

Il est facile de voir que le wagon glissera à condition que $mg\sin\alpha > R_T$, en tenant compte de la contrainte due au glissement, $R_T = fR_N = fmg\cos\alpha$. Le wagon se met donc à glisser dès que $mg\sin\alpha > fmg\cos\alpha$, c'est-à-dire dès que $\tan\alpha > f$.
La condition de glissement $\tan\alpha > f$ étant réalisée, on a $\ddot{x} = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$, qui est strictement positif.



le wagon est supposé descendre la pente

b. Si M est lâché de O sans vitesse initiale, on a $x = \frac{1}{2}g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)t^2$; son mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

c. Le wagon est lancé vers le haut de la pente avec une vitesse de valeur V_A et parallèle à Ox depuis un point A distant de O de L ; pendant la phase où il remonte la pente, $\dot{x} < 0$ et la projection du principe fondamental sur l'axe Ox s'écrit :

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha + R_T$$

avec $R_T = fR_N = fmg\cos\alpha$ tant que sa vitesse ne s'annule pas. L'accélération vaut donc $\ddot{x} = g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)$; cette relation s'intègre en :

$$x = \frac{1}{2}g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)t^2 - V_A t + L$$

Le wagon s'arrête lorsque $\dot{x} = 0$, à $t_S = \dfrac{V_A}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}$, en un point S d'abscisse $x_S = L - \dfrac{V_A^2}{2g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}$.
Ce dernier résultat se retrouve plus commodément en appliquant le théorème de l'énergie cinétique au point M entre A et S :

$$0 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W_{A\to S}(m\overrightarrow{g}) + W_{A\to S}(\overrightarrow{R_T}) = -\left\|\overrightarrow{AS}\right\| mg\sin\alpha - \left\|\overrightarrow{AS}\right\| .R_T$$

avec $\left\|\overrightarrow{AS}\right\| = L - x_S$, d'où on tire

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = (L - x_S)(mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha)$$

Ce qui redonne bien la valeur de x_S obtenue à partir de l'équation du mouvement.
Le produit scalaire $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{V} = g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\left(\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)t - V_A\right)$ étant négatif pour $t < t_S$, le mouvement est décéléré.

Pour $t > t_S$ deux cas sont à considérer :
– $\tan\alpha < f$: le wagon reste immobile en S ;
– $\tan\alpha > f$: le wagon repart en sens inverse : Il redescend la pente avec une accélération $\ddot{x} = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$.

3.a. k est homogène à $[M][T]^{-1}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\vec{g} + \vec{R} - k\vec{V} = m\vec{a}$, où $\vec{R}$ est perpendiculaire au plan incliné, ce qui donne, en projection sur les axes Ox et Oy : $R = mg\cos\alpha$ et $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - k\dot{x}$. Une constante de temps $\tau = \dfrac{m}{k}$ apparaît naturellement dans l'équation différentielle (linéaire) du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = g\sin\alpha$$

En posant $V = \dot{x}$, on cherche à résoudre l'équation du premier ordre relative à la vitesse :

$$\dot{V} + \frac{1}{\tau}V = g\sin\alpha$$

Le wagon atteint une vitesse limite V_l lorsque $\dot{V} = 0$, c'est-à-dire $V_l = g\tau\sin\alpha$; c'est une solution particulière de l'équation avec second membre.

3.b. L'équation sans second membre $\dot{V} + \dfrac{1}{\tau}V = 0$ a pour solution générale $V = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$.
La solution de l'équation différentielle du mouvement relative à la vitesse s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.
Compte tenu des conditions initiales $V = 0$ et $x = 0$ à $t = 0$, on a :

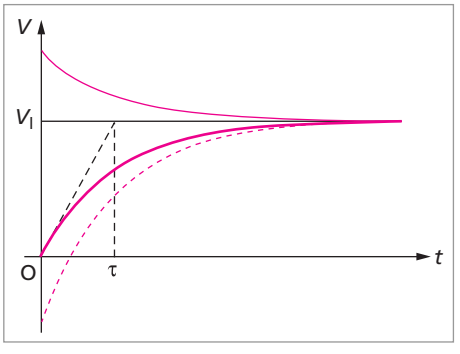
$$V = V_l\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{d'où on tire } x = V_l\left(t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right)$$

Lorsque $t \ll \tau$, $V \sim gt\sin\alpha$: La vitesse a un comportement asymptotique linéaire en temps, où l'accélération est celle du mouvement sur un plan incliné, sans frottements. En effet, on se trouve dans des conditions dans lesquelles la vitesse est si faible que la force de frottement fluide est négligeable devant la pesanteur.
Lorsque $t \gg \tau$, $V \sim g\tau\sin\alpha$: Le mouvement est rectiligne et uniforme de vitesse V_l : Lorsque la vitesse limite est atteinte, la force de frottement fluide et la pesanteur se compensent.

3.c. Compte tenu de la condition initiale $V = V_0$ à $t = 0$, on a :

$$V = \left(V_0 - g\tau\sin\alpha\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + g\tau\sin\alpha$$

La figure ci-contre montre l'évolution de la vitesse en fonction du temps pour $V_0 = 0$ (trait foncé), $V_0 = \dfrac{3}{2}V_l$ (trait plein fin) et $V_0 = -\dfrac{1}{2}V_l$ (trait pointillé) ; il est facile de



montrer que τ est donné par l'intersection de la tangente à l'origine dans le cas où $V_0 = 0$ avec la droite horizontale correspondant à la vitesse limite (c'est faux pour les autres cas).

4. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\vec{g} + \vec{R_T} + \vec{R_N} - k\vec{V} = m\vec{a}$. En la projetant sur les axes, on obtient, supposant la condition $\tan\alpha > f$ vérifiée et $\dot{x} > 0$:
$R_N = mg\cos\alpha$ et donc $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - k\dot{x}$, soit
$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$
La vitesse limite $V_l' = g\tau\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$ est inférieure à celle calculée au § 3.b, du fait des frottements solides supplémentaires.

2

1. Le point M est repéré en coordonnées cylindriques par $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u_\rho} + z\vec{u_z}$
L'hélice décrite est une courbe d'équations $\begin{cases}\rho = R\\ z = -b\theta\end{cases}$. Le point M descend si $\omega = \dot{\theta} > 0$
La vitesse sur cette courbe a pour expression, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z} = R\omega\vec{u_\theta} - b\omega\vec{u_z}$$

Comme la dérivée d'un vecteur **unitaire** $(\vec{u_\theta})$ par rapport à son angle polaire θ est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire, $(-\vec{u_\rho})$ on en tire directement l'accélération :

$$\vec{a} = -R\omega^2\vec{u_\rho} + R\dot{\omega}\vec{u_\theta} - b\dot{\omega}\vec{u_z}$$

2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel s'écrit $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$, ce qui donne les expression suivantes des composantes radiale, orthoradiale et azimutale de $\vec{F}$:

$$\begin{cases}F_\rho = -mR\omega^2\\ F_\theta = mR\dot{\omega}\\ F_z - mg = -mb\dot{\omega}\end{cases}$$

Ce système ne peut évidemment pas être intégré directement, puisqu'a priori les trois composantes des forces peuvent être des fonctions du temps.
C'est l'absence de frottements qui permet d'obtenir une relation supplémentaire. La force de liaison $\vec{F}$ ne travaille pas si sa puissance est nulle, ce qui se traduit par $\vec{F}.\vec{V} = 0, \forall t$, c'est-à-dire :

$$\vec{F}.\vec{V} = \left(F_\rho\vec{u_\rho} + F_\theta\vec{u_\theta} + F_z\vec{u_z}\right)\left(R\omega\vec{u_\theta} - b\omega\vec{u_z}\right) = 0$$

ce qui impose donc :

$$RF_\theta = bF_z$$

3. Compte tenu de l'expression des composantes de $\vec{F}$ tirées de la relation fondamentale de la dynamique et de l'absence de frottement, on a :

$$mR^2\frac{d\omega}{dt} = b\left(mg - mb\frac{d\omega}{dt}\right)$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = g\frac{b}{\left(R^2 + b^2\right)}$$

L'accélération angulaire autour de Oz est constante, donc $\ddot{z}$ aussi. Les conditions initiales conduisent à :

$$z = -b\theta = -\frac{1}{2}g\frac{b^2}{\left(R^2 + b^2\right)}t^2$$

Le comportement de z montre que tout se passe comme si on avait une accélération azimutale égale à g pondéré par un facteur géométrique $\dfrac{1}{\left(1 + \left(\dfrac{R}{b}\right)^2\right)}$ qui n'est fonction que du rapport entre le rayon de l'hélice et le pas (divisé par 2π), à savoir une fonction lorentzienne en $\left(\dfrac{R}{b}\right)$.

Il est clair que ce facteur étant toujours inférieur à 1, l'accélération azimutale a toujours une valeur inférieure à g. On retrouve la chute libre de direction verticale pour $\dfrac{R}{b} \to 0$ (hélice de rayon négligeable devant le pas), et le cercle horizontal pour lequel l'accélération azimutale vaut 0 pour $\dfrac{R}{b} \to \infty$ (hélice de pas négligeable devant le rayon).

4. On peut alors exprimer les composantes des forces de liaison en fonction du temps :

$$\begin{cases} F_\rho = -mR\left(\dfrac{gb}{R^2 + b^2}\right)^2 t^2 \\ F_\theta = mg\left(\dfrac{Rb}{R^2 + b^2}\right) \\ F_z = mg\left(\dfrac{R^2}{R^2 + b^2}\right) \end{cases}$$

La composante radiale est centripète, proportionnelle à ω^2, donc ici à t^2 ; les composantes orthoradiale et azimutale sont constantes.

5. L'énergie mécanique E du point matériel en mouvement sur l'hélice se conserve, car le poids dérive d'un potentiel et les liaisons de contact $\overrightarrow{F}$ ne travaillent pas ; on a $E = \dfrac{1}{2}mV^2 + mgz$. Sa dérivation par rapport au temps donne :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = mV\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

L'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques est $V = \sqrt{\left(R^2 + b^2\right)\omega^2}$. Comme $\dot{z} = -b\omega$, il vient alors $\omega\sqrt{\left(R^2 + b^2\right)} \times \dot{\omega}\sqrt{\left(R^2 + b^2\right)} = gb\omega$ (en supposant $\omega > 0$).

Cela implique $\dot{\omega} = g\dfrac{b}{\left(R^2 + b^2\right)}$, qui est l'expression trouvée par la méthode dynamique.

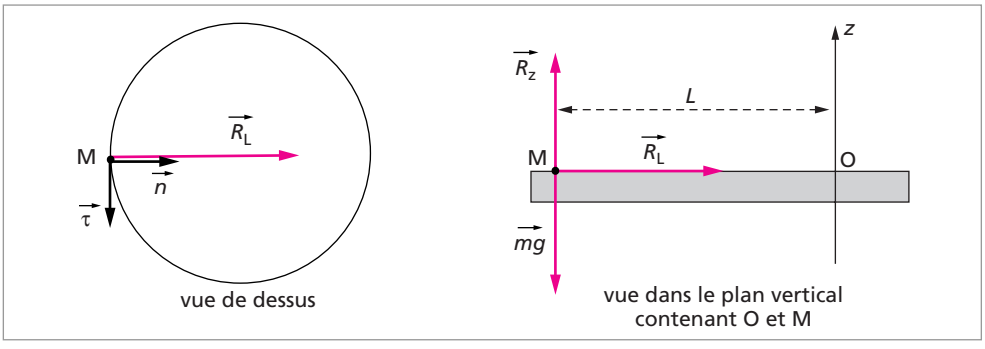
3 **1.** La figure ci-dessous présente le bilan des forces et définit les vecteurs de la base de Frenet. Dans cette base, l'accélération a pour expression :

$$\vec{a} = \frac{V^2}{L}\vec{n} + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\tau}$$

où la vitesse du point M est $\vec{V} = V\vec{\tau}$. Le rayon de courbure de la trajectoire est constant et égal à celui du cercle L, $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires normal et tangent à la trajectoire au point M. Le mouvement étant de plus uniforme, la valeur de la vitesse est constante (mais évidemment pas le vecteur vitesse) de sorte que pour un tel mouvement, l'accélération est purement normale :

$$\vec{a} = \frac{V^2}{L}\vec{n}$$

Notons alors que $\vec{a} \to \vec{0}$, si $V = 0$, ce qui correspond à l'immobilité, ou si $L \to \infty$, ce qui correspond à un mouvement uniforme sur un objet géométrique de rayon de courbure infini, à savoir une droite ; on retrouve évidemment le principe de l'inertie.



La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M dans le référentiel galiléen lié à la terre, et exprimée dans la base de Frenet montre la nécessité d'une force normale à la trajectoire, de valeur constante, qui se trouve être ici la composante latérale de la réaction du support

$$\vec{R_L} = m\frac{V^2}{L}\vec{n}$$

(il importe de bien distinguer la **normale à la trajectoire** et la **normale au sol**). On note qu'en l'absence totale de frottements, (situation proche d'un véhicule à pneus lisses sur un sol gelé) la réaction de contact entre le véhicule et le sol est normale au sol, donc que $\vec{R_L} = \vec{0}$; l'accélération est alors nulle, et le mouvement ne peut pas être courbe.

Le point M étant soumis à son poids $m\vec{g}$, à $\vec{R_L}$ et à la composante verticale $\vec{R_z}$ de la réaction du sol, on a :

$$m\vec{g} + \vec{R_z} + \vec{R_L} = m\vec{a}$$

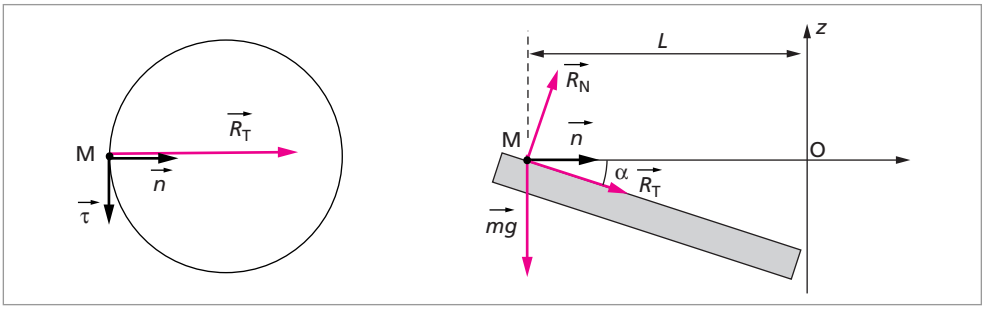
ce qui donne

$$R_z = mg$$

en projection sur l'axe vertical en plus de la relation donnant $\vec{R_L}$.

2. Il n'y a pas de glissement **latéral** (c'est-à-dire dans la direction normale à la trajectoire, de manière centrifuge) tant que le rapport entre la composante de la réaction de contact normale au support R_z et sa composante tangentielle latérale R_L vérifie la relation $R_L < fR_z$. Cela implique $R_L < fR_z$, soit $V < \sqrt{fgL}$. La vitesse limite est $V_l = \sqrt{fgL}$. Elle augmente avec le coefficient de frottement entre le véhicule et la piste et le rayon de la trajectoire.

3.



On désigne par $\overrightarrow{R_N}$ la réaction normale au sol et $\overrightarrow{R_T}$ la réaction latérale tangente au sol. La figure ci-dessus présente le nouveau bilan des forces. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} = m\overrightarrow{a}$, où l'accélération vaut $\overrightarrow{a} = \dfrac{V^2}{L}\overrightarrow{n}$ si le mouvement est circulaire et uniforme. En projetant sur les axes vertical et horizontal, on obtient :

$$\begin{cases} mg = R_N \cos\alpha - \overline{R}_T \sin\alpha \\ m\dfrac{V^2}{L} = R_N \sin\alpha + \overline{R}_T \cos\alpha \end{cases}$$

où on note la réaction tangentielle algébriquement. ($\overline{R}_T > 0$ sur le schéma).
Il est naturel d'adopter le point de vue d'un conducteur pour lequel f, α, m, L étant fixés le virage est abordé à une vitesse V que l'on prend comme variable. Les valeurs des composantes de la réaction de la piste sur le véhicule se calculent facilement à partir des deux égalités ci dessus :

$$\begin{cases} R_N = m\left(\dfrac{V^2}{L}\sin\alpha + g\cos\alpha\right) \\ \overline{R}_T = m\left(\dfrac{V^2}{L}\cos\alpha - g\sin\alpha\right) \end{cases}$$

On peut donc dire que la vitesse idéale V_i pour aborder ce virage relevé de α, telle que $\overline{R}_T = 0$, vaut $V_i = \sqrt{gL\tan\alpha}$.
Si $V < V_i$, on est dans le cas où $\overline{R}_T < 0$. Si on aborde le virage trop lentement, la projection de $\overline{R}_T$ sur la normale est « centrifuge ».
Si $V > V_i$, on a $\overline{R}_T > 0$.
On peut alors discuter la condition d'adhésion à la piste imposée par les lois de Coulomb du frottement : Il n'y a pas de glissement dans la direction latérale tant que $\left|\overline{R}_T\right| < fR_N$.

∗ Cas où $V < V_i$, donc $\overline{R}_T < 0$

$$\left|\overline{R}_T\right| < fR_N \Rightarrow m\left(g\sin\alpha - \frac{V^2}{L}\cos\alpha\right) < fm\left(\frac{V^2}{L}\sin\alpha + g\cos\alpha\right),$$

ce qui conduit à :

$$V^2 > gL\left(\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{f\sin\alpha + \cos\alpha}\right)$$

Si $\tan\alpha < f$, cette condition est toujours vérifiée puisque le terme de droite est négatif .
Si $\tan\alpha > f$, elle devient une contrainte qui borne inférieurement la vitesse. La plage de vitesse permise pour que le véhicule ne glisse pas est alors telle que :

$$gL\left(\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{f\sin\alpha + \cos\alpha}\right) < V^2 < gL\tan\alpha.$$

En clair, cela signifie que si l'on aborde le virage à une vitesse inférieure à la vitesse « idéale » et que l'angle α est supérieur à la valeur seuil $\arctan f$, la vitesse doit être supérieure à une certaine valeur pour que le véhicule ne glisse pas latéralement vers le bas de la pente.
Notons que la largeur de la plage de vitesse permise tend vers zéro, lorsque $f \to 0$, car les deux bornes tendent vers la même valeur V_i. Seule la vitesse ajustant la réaction dans la direction normale à la piste est permise en l'absence de frottements.
∗ Cas où $V > V_i$, donc $\overline{R}_T > 0$

$$\left|\overline{R}_T\right| < fR_N \Rightarrow m\left(\frac{V^2}{L}\cos\alpha - g\sin\alpha\right) < fm\left(\frac{V^2}{L}\sin\alpha + g\cos\alpha\right)$$

ce qui conduit à :

$$V^2\left(\cos\alpha - f\sin\alpha\right) < gL\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)$$

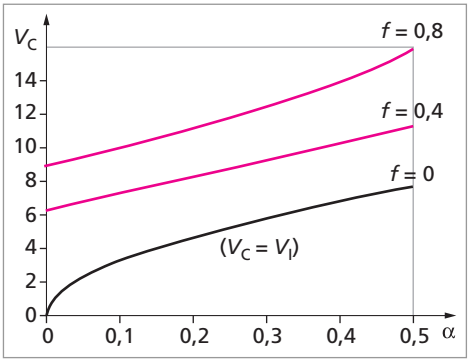
Si $\text{cotan}\alpha < f$, cette inégalité est toujours vérifiée, et il suffit que $V > V_i$ pour que le véhicule ne glisse pas.
Si $\text{cotan}\alpha > f$, la plage de vitesse permise pour que le véhicule ne glisse pas est telle que :

$$gL\tan\alpha < V^2 < gL\left(\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}\right)$$

Cette plage se réduit naturellement à un point si $f = 0$ pour les mêmes raisons que pour le premier cas.
La situation où $V > V_i$ est très différente de celle décrite dans le cas d'un sol horizontal. On voit notamment que si le virage est suffisament relevé ($\text{cotan}\,\alpha < f \Leftrightarrow \tan\alpha > \frac{1}{f}$), le mouvement peut se faire sans glissement avec une vitesse aussi grande que l'on veut !
Le cas pertinent pour la sécurité routière est évidemment celui où $\text{cotan}\alpha > f$ (les virages des routes ne sont que « légèrement relevés » ; on retiendra alors que la vitesse critique V_C à ne pas dépasser pour rester en contact avec la route est :

$$V_C = \sqrt{gL\left(\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}\right)}$$

Il est facile de montrer que V_C est une fonction croissante de α ($\alpha \in [0, \pi/2]$) à f donné, et de f à α donné.
La figure ci-contre montre différentes courbes donnant l'évolution de V_C en fonction de α (en rad) pour différentes valeurs de f et $L = 10$ m.

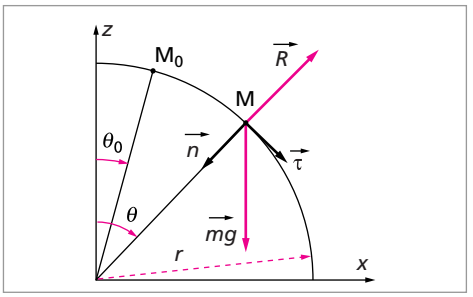


4 **1.** Le bilan des forces est présenté sur la figure ci-contre. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M dans le référentiel galiléen projetée sur la base de Frenet conduit aux deux relations :

$$mg\cos\theta - R = m\frac{V^2}{r}$$

et

$$mg\sin\theta = m\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)$$



Ces relations ne sont pas utilisables en l'état, puisque R et θ dépendent du temps d'une manière que l'on ne connaît pas ; remarquons que la vitesse V n'est pas une inconnue supplémentaire, puisque $V = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ tant que le point M est sur la sphère.
On peut cependant aller plus loin en écrivant la conservation de l'énergie, puisqu'il n'y a pas de frottements (ou en appliquant le théorème de l'énergie cinétique). Il importe de bien comprendre que cette invariance permet de relier la variable de lieu (en l'occurrence θ) à la vitesse. Tant que M reste en contact avec la sphère, l'énergie du point M dans le champ de pesanteur terrestre s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + mgz = \frac{1}{2}mV^2 + mgr\cos\theta$$

en choisissant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$. Comme en M_0, on a $E = mgr\cos\theta_0$, il vient $V^2 = 2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)$. On peut alors calculer R en fonction de θ, en réinjectant la valeur de V dans la relation donnée par la projection de la relation fondamentale de la dynamique sur la normale obtenue précédemment ; on trouve :

$$R = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0).$$

2. On note que R diminue lorsque θ augmente. Le point M quitte la sphère lorsque la réaction du support s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_d tel que :

$$\cos\theta_d = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$

La vitesse de décollage vaut alors :

$$V_d = \sqrt{\frac{2gr\cos\theta_0}{3}}$$

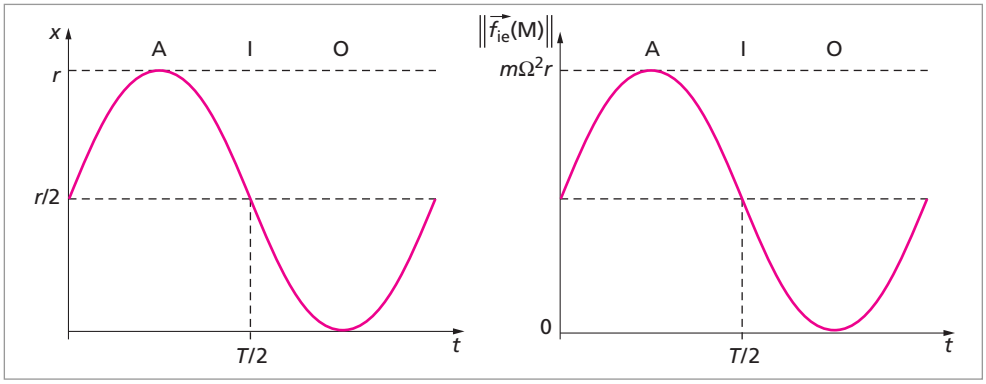
5 Le mouvement du point M s'effectue sur le segment de droite OA. La manière la plus simple de décrire son mouvement est de le faire dans la base tournante liée au référentiel en rotation O*xyz*. Le mouvement est décrit par $\overrightarrow{OM} = \frac{r}{2}(1 + \sin\omega_0 t)\,\overrightarrow{u_x} = x(t)\overrightarrow{u_x}$.
L'expression générale de la force d'inertie d'entraînement du point M dans le cas d'un référentiel en rotation est : $\overrightarrow{f_{ie}}(M) = -m\overrightarrow{a_e}(M) = m\Omega^2\overrightarrow{HM} - m\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$, où $\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur rotation du référentiel entraîné et H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (ici H = O). $\overrightarrow{\Omega}$ étant indépendant du temps, seul le premier terme subsiste, si bien que :

$$\overrightarrow{f_{ie}}(M) = m\Omega^2\overrightarrow{OM} = m\Omega^2\frac{r}{2}(1 + \sin\omega_0 t)\,\overrightarrow{u_x} = m\Omega^2 x(t)\overrightarrow{u_x}$$

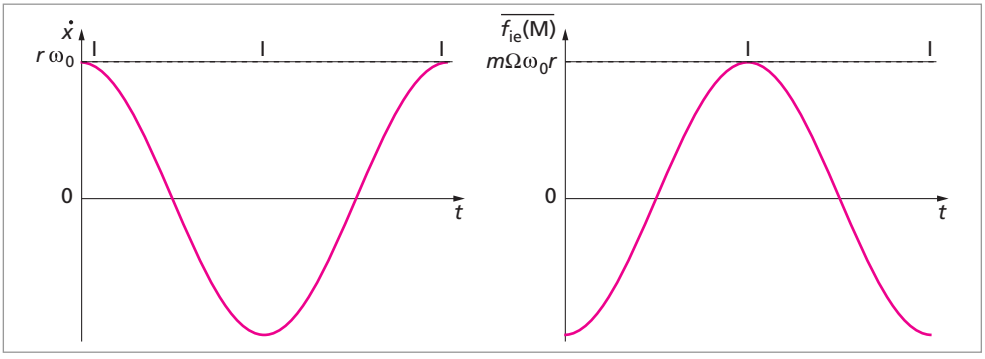
La force d'inertie de Coriolis est $\overrightarrow{f_{ic}}(M) = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}_e}}(M)$, où $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}_e}}(M)$ est la vitesse de M dans le référentiel entraîné (lié au manège). On a donc :

$$\overrightarrow{f_{ic}}(M) = -2m\Omega\overrightarrow{u_z} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_e} = -2m\Omega\overrightarrow{u_z} \wedge \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$$
$$= -m\Omega\omega_0 r\cos\omega_0 t\,\overrightarrow{u_y} = -2m\Omega\dot{x}(t)\overrightarrow{u_y},$$

Il est crucial de comprendre que la dérivation de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à t se fait dans le référentiel entraîné dans lequel $\overrightarrow{u_x}$ est donc indépendant du temps.
La force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}}(M)$ est toujours centrifuge et sa valeur augmente lorsque M va de O vers A. La figure ci-dessous montre l'évolution de $\left\|\overrightarrow{f_{ie}}(M)\right\|$ en fonction du temps, pour t allant de 0 à $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ comparée à celle de x.



La force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}}(M)$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse de M dans le référentiel du manège, c'est-à-dire à $\overrightarrow{u_x}$. Lorsque M va de O vers A, $\overrightarrow{f_{ic}}(M)$ a le sens de $-\overrightarrow{u_y}$, (celui de $\overrightarrow{u_y}$ lorsqu'il va de A vers O). La valeur de $\overrightarrow{f_{ic}}(M)$ est maximale lorsque la vitesse de M par rapport au manège est maximale, soit en I ; elle s'annule en O et en A. La figure ci-dessous montre l'évolution de la valeur algébrique $\overline{f_{ic}(M)}$ de la force de Coriolis en fonction du temps, comparée à celle de la vitesse $\dot{x}$ de M.



6 **1.** On s'intéresse au mouvement du centre d'inertie du véhicule, soumis à son poids $m\overrightarrow{g}$ et à la réaction du support ; cette dernière ne travaille pas et reste donc normale à la piste pendant toute la durée du mouvement. On applique le théorème de l'énergie cinétique, où seul le poids travaille :

Entre A et B :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - 0 = mg(z_A - z_B) = mg(z_A - z_C + z_C - z_{O_1} + z_{O_1} - z_B) = mg(h - R + R\cos\alpha_1)$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2g(h - R + R\cos\alpha_1)}$$

Entre A et C :

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - 0 = mg(z_A - z_C) = mgh \Rightarrow V_C = \sqrt{2gh}$$

Entre A et S :

$$\frac{1}{2}mV_S^2 - 0 = mg(z_A - z_S) = mg(h - R) \Rightarrow V_S = \sqrt{2g(h - R)}$$

$\overrightarrow{R_1}$ désignant la réaction du support sur le véhicule entre A et B, et $\overrightarrow{a_1}$ son accélération, la projection de la relation fondamentale de la dynamique sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_1}$ et sur celui qui lui est directement perpendiculaire conduit à : $R_1 = mg\cos\alpha_1$ et $a_1 = g\sin\alpha_1$

Entre B et D, α varie de $-\alpha_1$ à $+\alpha_2$; $\overrightarrow{F}$ désignant la réaction du support sur le véhicule, on projette la relation fondamentale de la dynamique sur la base de Frenet $\{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\tau}\}$, en prenant garde au signe de l'accélération tangentielle (entre B et C, $\alpha < 0$ et $\frac{dV}{dt} > 0$). On a donc :

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = m\frac{V^2}{R}\overrightarrow{n} + m\frac{dV}{dt}\overrightarrow{\tau}$$

d'où on tire :

$$m\frac{V^2}{R} = F - mg\cos\alpha \quad \text{et} \quad m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -g\sin\alpha$$

On ne peut pas calculer facilement la vitesse (ou α) en fonction du temps à partir de ces équations. Une information facile à exploiter est donnée par le théorème de l'énergie cinétique qui permet de relier la vitesse V au lieu (ici repéré par α) ; entre A et M, il s'écrit :

$$\frac{1}{2}mV^2 - 0 = mg(h - R + R\cos\alpha),$$

d'où $V^2 = 2g(h - R + R\cos\alpha)$

En reportant cette expression de V^2 dans la première égalité donnée par la relation fondamentale de la dynamique, il vient :

$$F - mg\cos\alpha = m\frac{2g(h - R + R\cos\alpha)}{R}$$

On obtient donc :

$$F = mg\left(3\cos\alpha - 2 + \frac{2h}{R}\right)$$

Au point C, $\alpha = 0$, de sorte que l'accélération est centripète en ce point :

$$\vec{a}(\mathrm{C}) = 2g\frac{h}{R}\vec{n} = 2g\frac{h}{R}\vec{u_z}$$

Entre D et Q, la projection de la relation fondamentale de la dynamique sur le vecteur unitaire $\vec{u_2}$ et sur celui qui lui est directement perpendiculaire conduit à : $R_2 = mg\cos\alpha_2$ et $a_2 = -g\sin\alpha_2$, où $\vec{R_2}$ désigne la réaction du support sur le véhicule entre D et Q, et $\vec{a_2}$ son accélération. La comparaison entre les deux plans inclinés est évidente : Puisque $\alpha_2 < \alpha_1$, $R_2 > R_1$.

En S, $\vec{F}$ et $m\vec{g}$ sont normales, si bien que l'accélération l'est aussi. En ce point, on a $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}(\mathrm{S}) = m\frac{V_\mathrm{S}^2}{R}\vec{n} = m\frac{2g(h-R)}{R}\vec{n}$, de sorte que

$$\vec{a}(S) = 2g\left(\frac{h}{R} - 1\right)\vec{n} = -2g\left(\frac{h}{R} - 1\right)\vec{u_z}$$

2. La vitesse relative de M′ dans le référentiel entraîné étant nulle, il ne subit pas de force d'inertie de Coriolis. La force d'inertie d'entraînement est $\vec{f_{ie}}(\mathrm{M}') = -m\vec{a_{ie}}(\mathrm{M}')$. Comme M′ est immobile par rapport à M, on a :

$$\vec{a}(\mathrm{M}/\mathcal{R}) = \vec{a}(\mathrm{M}'/\mathcal{R}) = \vec{a_{ie}}(\mathrm{M}')$$

L'accélération d'entraînement de M′ est donc égale à celle de M par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$, étudiée en détail précédemment. Pour représenter la force d'inertie subie par le passager, il suffit de dessiner cette accélération et d'en changer le sens.

La force d'inertie d'entraînement s'écrit :

- entre A et B : $\vec{f_{ie}}(\mathrm{M}) = -m'g\sin\alpha_1\vec{u_1}$
- entre D et Q : $\vec{f_{ie}}(\mathrm{M}) = m'g\sin\alpha_2\vec{u_2}$

– en C : $\overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{C}) = -2m\,'\mathrm{g}\dfrac{h}{R}\overrightarrow{u_z}$

– en S : $\overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{S}) = 2m'g\left(\dfrac{h}{R} - 1\right)\overrightarrow{u_z}$

Le passager sera en état d'impesanteur artificielle au point S si la force d'inertie y compense exactement son poids, c'est-à-dire :

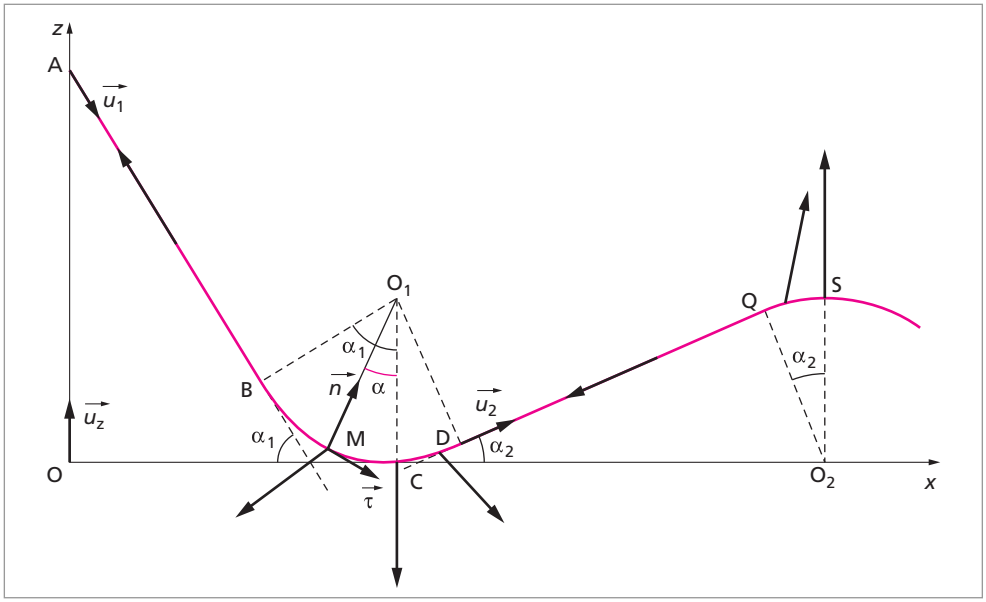
$$m'\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{S}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow -m'g\overrightarrow{u_z} + 2m'g\left(\frac{h}{R} - 1\right)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}.$$

Il faut donc que $h = \dfrac{3}{2}R$.

Dans ces conditions, la force d'inertie au point C vaudrait trois fois le poids du passager :

$$\overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{C}) = -2m'g\frac{h}{R}\overrightarrow{u_z} = -3m'g\overrightarrow{u_z}$$

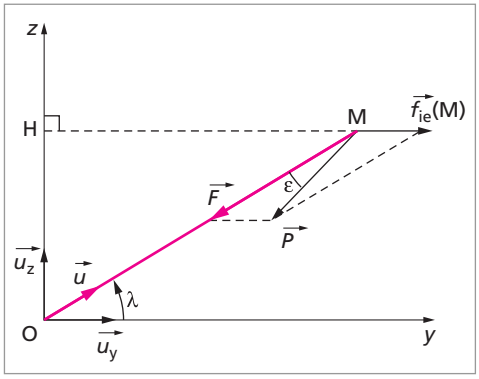
La force d'inertie subie par le passager du véhicule est représentée en différents points du trajet sur la figure ci-dessous.



7 **1.** Dans le référentiel géocentrique $Ox_1y_1z_1$ (qui ne tourne pas avec la Terre) supposé galiléen, le point M, extérieur à l'astre est soumis à la force de gravitation $\overrightarrow{F} = -K\dfrac{M_\mathrm{T}m}{r^2}\overrightarrow{u}$, radiale attendu que la distribution de masse de l'astre est à symétrie sphérique ; en effet, le champ de gravitation obéissant au théorème de Gauss, le champ de gravitation créé par l'astre est le même que celui que créerait un point matériel de masse M placé en O.

Dans le référentiel terrestre Oxyz, tournant à vitesse angulaire constante de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u_z}$ autour de l'axe des pôles Oz_1 = Oz, M est soumis de plus à la force d'inertie d'entraînement :

$$\overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{M}) = m\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}} - m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$= m\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}$$



où H est le projeté de M sur l'axe Oz.
En posant $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{u}$, on peut écrire $\overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{M}) = m\Omega^2 r\cos\lambda\overrightarrow{u_y}$. Ainsi, le poids qui est la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie centrifuge a pour expression :

$$\overrightarrow{P} = m\left(-\mathrm{K}\frac{M_\mathrm{T}}{r^2}\overrightarrow{u} + \Omega^2 r\cos\lambda\overrightarrow{u_y}\right) = m\overrightarrow{g}(\mathrm{M})$$

Ces forces sont représentées sur la figure ci-dessus. On peut donc définir le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}(\mathrm{M})$ en fonction du champ de gravitation $\overrightarrow{G}(\mathrm{M}) = -\mathrm{K}\frac{M_\mathrm{T}}{r^2}\overrightarrow{u} = -G(\mathrm{M})\overrightarrow{u}$ et d'une accélération centrifuge de valeur $a = \Omega^2 r\cos\lambda$, due à la rotation de la Terre sur elle même.
Cette expression fait apparaître une dépendance du champ de pesanteur avec la latitude en cos λ, due à la rotation de la Terre. Il existe une cause supplémentaire de la dépendance du champ de pesanteur avec la latitude due à l'aplatissement de la Terre aux pôles (en fait cet aplatissement a pour cause la rotation de la Terre sur elle-même, parce qu'elle brise la symétrie sphérique de répartition de masse).
La valeur du champ de pesanteur s'écrit :

$$g^2(\mathrm{M}) = G^2(\mathrm{M}) + \left(\Omega^2 r\cos\lambda\right)^2 - 2G(\mathrm{M})\Omega^2 r\cos\lambda\,\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u_y}$$

avec $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u_y} = \cos\lambda$, puisqu'il importe de remarquer que ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux. On a donc :

$$g^2(\mathrm{M}) = G^2(\mathrm{M}) + \left(\Omega^2 r\cos\lambda\right)^2 - 2G(\mathrm{M})\Omega^2 r\cos^2\lambda$$
$$= G^2(\mathrm{M})\left(1 + \left(\frac{a}{G}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{G}\right)\cos\lambda\right)$$

Si on se place à la surface de la Terre ($r = R_\mathrm{T} \approx 6\,400$ km) la valeur maximale de a est obtenue à l'équateur et vaut $a_\mathrm{eq} = \Omega^2 R_\mathrm{T} \approx 0{,}034\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Il est donc loisible de se contenter d'un développement de $g(\mathrm{M})$ au premier ordre en $\left(\frac{a}{G}\right)$. On a en définitive :

$$g(\mathrm{M}) \approx G(\mathrm{M})\left(1 - \left(\frac{a}{G}\right)\cos\lambda\right)$$

2. La rotation de la Terre impose que l'on ait toujours $g \leqslant G$; l'écart relatif sur la valeur du champ de pesanteur, dû à la rotation de la Terre vaut : $\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx \frac{\Omega^2 r}{G}\cos^2\lambda$

À l'équateur, cet écart est maximal : $\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx 0{,}35\ \%$.

Sous les latitudes de la France métropolitaine : $\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx 0{,}175\ \%$, avec $\lambda = 45°$.

3. Soit ε l'angle entre les directions de $\overrightarrow{G}(M)$ et $\overrightarrow{g}(M)$; en effectuant le produit vectoriel par $\overrightarrow{g}$ de chaque côté de l'égalité $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{g} + \overrightarrow{a}$, et en prenant la norme, on a : $\left\|\overrightarrow{g} \wedge \overrightarrow{G}\right\| = \|\overrightarrow{g} \wedge \overrightarrow{a}\|$, ce qui conduit à : $gG|\sin\varepsilon| = ga\left|\sin(\widehat{\overrightarrow{g}, \overrightarrow{a}})\right|$, où $(\widehat{\overrightarrow{g}, \overrightarrow{a}})$ désigne l'angle entre $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{a}$. Si on se limite à l'hémisphère nord, convenant que $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\varepsilon \geqslant 0$, on peut écrire : $gG\sin\varepsilon = ga\,|\sin(\pi - (\lambda + \varepsilon))| = ga\sin(\lambda + \varepsilon)$
L'angle ε étant petit, on peut ne garder que les termes du premier ordre en ε dans cette égalité, de sorte que $G\sin\varepsilon = a(\sin\lambda\cos\varepsilon + \cos\lambda\sin\varepsilon) \Rightarrow G\varepsilon \approx \Omega^2 r\cos\lambda(\sin\lambda + \varepsilon\cos\lambda)$
L'expression de l'angle entre les directions de $\overrightarrow{G}(M)$ et $\overrightarrow{g}(M)$ est alors :

$$\varepsilon \approx \frac{\Omega^2 r\cos\lambda\sin\lambda}{G - \Omega^2 r\cos^2\lambda} \approx \frac{\Omega^2 r}{2G}\sin 2\lambda$$

r étant fixé, cet angle est maximal lorsque $\lambda = 45°$; à la surface de la terre, il vaut, dans ces conditions $\varepsilon \approx 1{,}74.10^{-3}$ rad $\approx 0{,}1°$.

8 **1.** L'expression de la force d'inertie de Coriolis est $\overrightarrow{f_{ic}}(M) = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_t}$, où $\overrightarrow{\Omega}$ désigne le vecteur rotation de la Terre sur elle même. Il importe tout d'abord d'exprimer $\overrightarrow{\Omega}$ dans le repère lié au référentiel tangent R_t ; comme il est parallèle à la direction de l'axe des pôles, il est contenu dans le plan Oyz, et $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\left(\cos\lambda\,\overrightarrow{u_y} + \sin\lambda\,\overrightarrow{u_z}\right)$

2.a. Pour un wagon se déplaçant dans l'hémisphère Nord, du Nord au Sud le long d'un méridien dans le référentiel terrestre, on a localement $\overrightarrow{V}(M) = -V\overrightarrow{u_y}$, (où $V > 0$), soit :

$$\overrightarrow{f_{ic}}(M) = -2m\Omega V\sin\lambda\,\overrightarrow{u_x}$$

Cette force a donc la direction du parallèle local et est dirigée d'Est en Ouest. Pour un wagon de masse égale à 20 tonnes se déplaçant à 300 km/h on trouve $\left\|\overrightarrow{f_{ic}}(M)\right\| = 172$ N pour $\lambda = 45°$. Si une voie de chemin de fer est empruntée toujours dans le même sens, ce sera donc le rail de droite dans l'hémisphère Nord et celui de gauche dans l'hémisphère Sud.

2.b. Pour un avion se déplaçant dans l'hémisphère Nord d'Ouest en Est le long d'un parallèle dans le référentiel terrestre, on a cette fois $\overrightarrow{V}(\mathrm{M}) = V\overrightarrow{u_x}$, où $V > 0$, ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{f_{ic}}(\mathrm{M}) = -2m\Omega V \sin\lambda\,\overrightarrow{u_y} + 2m\Omega V \cos\lambda\,\overrightarrow{u_z}$$

Elle comporte une composante horizontale dirigée vers le Sud et une composante verticale dirigée vers le haut. Elle ne dépend pas de l'altitude à laquelle vole l'avion.
Pour un avion de même masse se déplaçant à 600 km/h on trouve $\left\|\overrightarrow{f_{ic}}(\mathrm{M})\right\| = 488$ N pour $\lambda = \dfrac{\pi}{4}$.
En conclusion, pour des véhicules se déplaçant à ces vitesses, la force d'inertie de Coriolis n'excède pas quelques millièmes de leur poids.

3.a. On néglige les forces de frottement fluides avec l'air. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au pont M dans le référentiel terrestre non galiléen s'écrit : $m\overrightarrow{a}(\mathrm{M}/R_\mathrm{t}) = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{M}) + \overrightarrow{f_{ic}}(\mathrm{M})$, où la force de gravitation est $\overrightarrow{F} = -\mathrm{K}\dfrac{M_\mathrm{T}m}{r^2}\overrightarrow{u}$.
Compte tenu des résultats de l'exercice 7, le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}(\mathrm{M})$ est tel que : $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f_{ie}}(\mathrm{M}) = m\overrightarrow{g}(\mathrm{M})$; il inclut donc la force d'inertie centrifuge.
On fait l'hypothèse que la région dans laquelle a lieu la chute est suffisamment restreinte pour que le champ de pesanteur puisse être considéré comme uniforme : $\overrightarrow{g}(\mathrm{M}) = -g\overrightarrow{u_z}$. On note $\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur vitesse de M **dans le référentiel terrestre** tangent. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\overrightarrow{a}(\mathrm{M}/R_\mathrm{t}) = -g\overrightarrow{u_z} - 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}(\mathrm{M}/R_\mathrm{t})$, ce qui conduit à un système de trois équations différentielles linéaires à coefficients constants couplées.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = -2\Omega V_z \cos\lambda + 2\Omega V_y \sin\lambda \\ \dfrac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = -2\Omega V_x \sin\lambda \\ \dfrac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = -g + 2\Omega V_x \cos\lambda \end{cases}$$

On intègre tout d'abord les deux dernières équations, compte tenu des conditions initiales à $t = 0$: $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$
Il vient $V_y = -2\Omega x \sin\lambda$ et $V_z = -gt + 2\Omega x \cos\lambda$
On reporte ces expressions dans la première équation et on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} + 4\Omega^2 x = 2\Omega g t \cos\lambda$$

On résout cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, avec second membre par la méthode standard : Une solution particulière de l'équation avec second membre est telle que $\frac{d^2x}{dt} = 0$, soit $x_P(t) = \frac{g\cos\lambda}{2\Omega}t$; la solution générale de l'équation sans second membre étant $x_G(t) = a\sin(2\Omega t + \varphi)$, il est ensuite facile de trouver la solution $x(t) = x_P(t) + x_G(t)$ qui satisfait les conditions initiales $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$:

$$x(t) = \frac{g\cos\lambda}{2\Omega}\left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega}\right)$$

b. Si, conformément aux hypothèses, la région dans laquelle s'effectue la chute est assez restreinte pour que le champ de pesanteur puisse être considéré comme uniforme, la durée de la chute est alors petite devant la période (sidérale) de rotation de la Terre $T_S = \frac{2\pi}{\Omega}$; l'on peut ainsi considérer que $\Omega t \ll 1$ pendant toute la chute. On peut donc faire un développement limité de $\sin 2\Omega t$ au voisinage de 0. On remarque qu'il est nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 3 (sinon $x = 0$). On trouve : $x(t) \approx \frac{1}{3}g\Omega(\cos\lambda)t^3$

c. Puisque x est positif, on observe dans l'hémisphère Nord une déviation vers l'Est pour un objet tombant en chute libre. La dépendance en Ω permet tout de suite de conclure que x reste petit (la durée de chute est assez petite). On obtient $z(t)$ en intégrant la relation $\frac{dz}{dt} = -gt + 2\Omega x\cos\lambda$, que l'on peut écrire, compte tenu de l'expression de $x(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = -gt + \frac{2}{3}g\Omega^2(\cos^2\lambda)t^3 = -gt\left(1 - \frac{2}{3}(\Omega t)^2(\cos^2\lambda)\right)$$

L'hypothèse $\Omega t \ll 1$ montre qu'il est loisible de négliger l'infiniment petit du second ordre devant 1 ; on a donc $z(t) \approx -\frac{1}{2}gt^2 + h$. L'élimination du temps de chute $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ entre les expressions de $x(t_c)$ et $z(t_c)$ conduit à une expression de la déviation en fonction de la hauteur de chute :

$$x(t_c) \approx \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{g}}\Omega(\cos\lambda)h^{\frac{3}{2}}$$

Notons que l'intégration de l'équation différentielle en V_y donne une déviation vers le Sud très petite devant la déviation vers l'Est, (attendu que V_x est très petit) : $y(t) = -\frac{1}{12}g\Omega^2(\sin 2\lambda)t^4$, puisque l'on a :

$$\left|\frac{y(t_c)}{x(t_C)}\right| \approx \frac{\frac{1}{12}g\Omega^2(\sin 2\lambda)t_c^4}{\frac{1}{3}g\Omega(\cos\lambda)t_c^3} = \frac{1}{2}\sin\lambda\,(\Omega t_c) \ll 1$$

Pour $h = 100$ m en un lieu où $\lambda = 45°$, on trouve $x(t_c) \approx 1{,}55$ cm. La mesure est difficile dans des conditions correctes, car elle suppose l'absence de tous frottements avec

l'air. C'est le pendule de Foucault qui constitue l'expérience la plus spectaculaire de mise en évidence de la force d'inertie de Coriolis due à la rotation de la Terre sur elle même.

9 **1.** Le théorème du moment cinétique appliqué au point matériel M s'écrit en O :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F(r)}$$

Puisque la force est centrale, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{F(r)}$ sont parallèles, quelle que soit la position de M ; $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}}{\mathrm{d}t}$ est donc toujours nul et le moment cinétique est alors constant :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = m\overrightarrow{C}$$

Comme $\overrightarrow{\sigma_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V} = m\overrightarrow{C}$, la définition du produit vectoriel permet d'en déduire immédiatement que le mouvement est plan, puisque les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{V}$ sont orthogonaux au vecteur constant $\overrightarrow{C}$ à tout instant.
Le mouvement dans un champ de forces central s'effectue dans un plan perpendiculaire au moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}$. On se place dans ce plan et on repère le point matériel par ses coordonnées polaires. Avec les notations habituelles, la vitesse s'écrit $\overrightarrow{V} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$.
L'énergie du point matériel de masse m dans le champ de forces central dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r)$ s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right) + E_p(r)$$

La conservation du moment cinétique s'écrit par ailleurs $\overrightarrow{\sigma_O} = m\overrightarrow{C}$, avec $C = r^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$.
En remplaçant $\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$ par $\dfrac{C}{r^2}$ dans l'expression de E, on obtient :

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

Le potentiel effectif $W_{\text{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r)$ apparaît ainsi naturellement comme incluant la conservation du moment cinétique ; la variable angulaire a été éliminée de la conservation de l'énergie. Il importe de garder présent à l'esprit que le terme $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2$ dans l'expression de E n'est pas l'énergie cinétique du point matériel, mais seulement sa partie radiale.

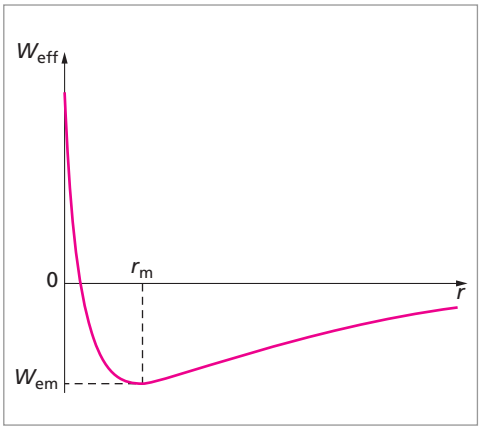
2.a. Dans le cas de l'interaction gravitationnelle :

$$W_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - m\frac{k}{r}$$

avec $k = \mathrm{KM} > 0$.

$\frac{dW_{eff}}{dr} = -m\frac{C^2}{r^3} + m\frac{k}{r^2}$ s'annule pour $r_m = \frac{C^2}{k}$. L'énergie vaut alors en r_m :

$$W_{eff}(r_m) = W_{em} = -\frac{1}{2}m\frac{k^2}{C^2}$$

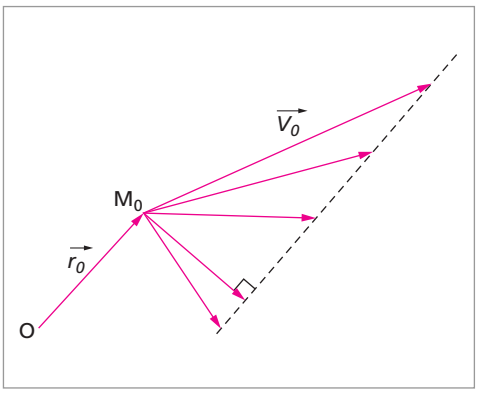


Les variations de W_{eff} en fonction de r sont représentées ci-contre.

Les variations de W_{eff} en fonction de r sont fixées si le moment cinétique, c'est-à-dire C est donné. Pour $r < r_m$, W_{eff} est répulsif (radialement) ; la force associée à la partie répulsive est $m\frac{C^2}{r^3} = mr\left(\dot{\theta}\right)^2$, où on reconnaît l'analogue d'une force d'entraînement centrifuge. Le premier terme du potentiel en $\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$ est une barrière centrifuge. Il empêche le point matériel de s'approcher du centre attractif : on voit que la conservation du moment cinétique imposerait à sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de tendre vers l'infini lorsque $r \to 0$.

Si C augmente, la position du minimum r_m s'éloigne du centre attractif (r_m augmente comme C^2), tandis que la profondeur du puits diminue (comme $\frac{1}{C^2}$). Cette barrière centrifuge en $\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$ apparaît pour tout point matériel en mouvement dans un champ central lorsqu'on cherche une équation radiale. Elle a son analogue dans une description quantique : c'est elle qui est responsable de la présence du nombre quantique azimutal l dans la partie radiale de l'équation de Schrödinger décrivant le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène.

Pour $r > r_m$, W_{eff} est attractif ; la barrière centrifuge devient négligeable devant la force d'attraction gravitationnelle lorsque r augmente.



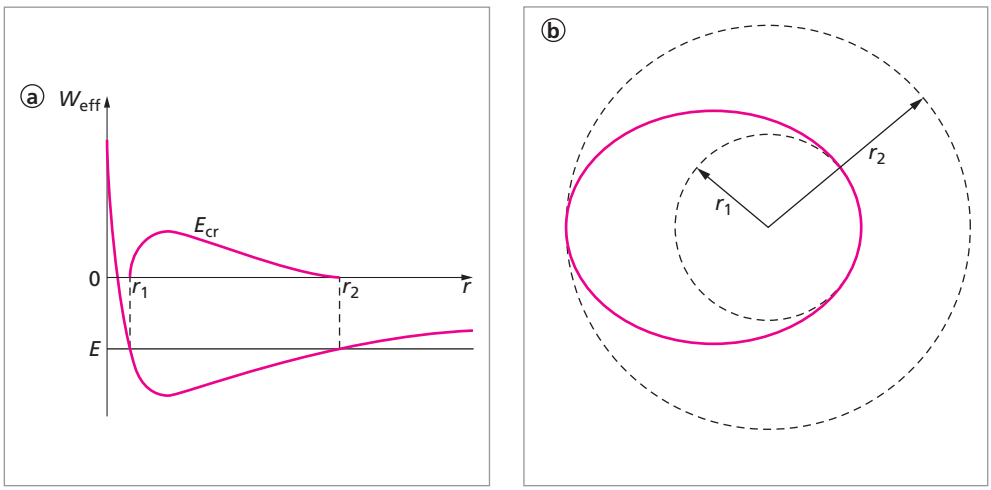
$\vec{r_0}$ et $\vec{V_0}$ étant la position et la vitesse initiales, on a $C = r_0 V_0 \sin(\widehat{\vec{r_0}, \vec{V_0}})$, où $(\widehat{\vec{r_0}, \vec{V_0}})$ désigne l'angle entre les vecteurs position et vitesse à $t = 0$. L'énergie vaut alors $E = \frac{1}{2}mV_0^2 - m\frac{k}{r_0}$. L'angle entre les deux vecteurs n'intervient pas dans l'expression. Or, si le moment cinétique, c'est-à-dire C, est fixé, les variations de $W_{eff}(r)$sont données. Il reste encore la possibilité de faire varier l'énergie. Supposons, pour fixer les idées, que $\vec{r_0}$ soit fixé ; C est constant tant que $V_0 \sin(\widehat{\vec{r_0}, \vec{V_0}})$, c'est-à-dire la projection

de $\overrightarrow{V_0}$ sur une normale à $\overrightarrow{r_0}$ a la même valeur. La figure page précédente montre des conditions initiales de même moment cinétique, mais d'énergie différente.

Si $E = W_{em}$, la conservation de l'énergie impose à la vitesse radiale $\frac{dr}{dt}$ d'être nulle à tout instant ; le mouvement est circulaire uniforme sur un cercle de rayon r_m. Géométriquement, on voit alors que $\overrightarrow{r_0}$ et $\overrightarrow{V_0}$ sont perpendiculaires, ce qui correspond à la plus petite valeur possible de l'énergie à C fixé.

b. Si $W_{em} < E < 0$, le point matériel est confiné dans une région de l'espace limitée par les valeurs r_1 et r_2 du rayon vecteur pour lesquelles vitesse radiale $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ s'annule parce que les contraintes physiques imposent à $E_{cr} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ de ne pas pouvoir être négative ; on a un état lié. La figure a ci-dessous montre l'évolution des différentes énergies en fonction de r, à C fixé, et la figure b donne un exemple des trajectoires qui peuvent lui être associées.

c. Si $E > 0$, aucune contrainte physique n'empêche le point matériel d'aller à l'infini ; on a un état libre (ou de diffusion).



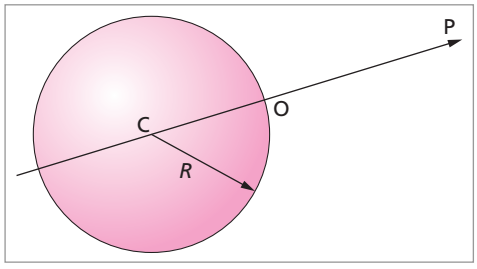
Les trajectoires d'énergie E négative sont telles que $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Les barrières de potentiel sont liées au mouvement radial ; ce sont des cercles de rayons r_1 et r_2.

10 **1.** Les forces électrostatique et d'interaction gravitationnelle ont la même forme mathématique. Les lois de symétrie qui leur sont attachées sont donc les mêmes. On passe de l'expression de la première à la seconde moyennant les transformations $\left\{\begin{array}{l}\text{charges} \rightarrow \text{masses} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow -K\end{array}\right\}$.

Le tableau ci-dessous met en correspondance les propriétés de ces forces et des champs associés.

Force d'interaction entre deux particules Charges $\{q, Q\}$. Masses $\{m, M\}$	$\overrightarrow{F_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	$\overrightarrow{F_g} = -\mathrm{K}\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
Forces électrostatique $\overrightarrow{F_e}$ et gravitationnelle $\overrightarrow{F_g}$ subies par des particules dans des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{G}$	$\overrightarrow{F_e} = q\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{F_g} = m\overrightarrow{G}$
Les champs électrostatique $\overrightarrow{E}$ et gravitationnel $\overrightarrow{G}$ dérivent de potentiels scalaires V et Φ_g	$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$	$\overrightarrow{G} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi_g$
$\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{G}$ sont à circulation conservative	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{G} = \overrightarrow{0}$
Forme locale du théorème de Gauss : ρ_e est la densité volumique de charge électrique et ρ la masse volumique	$\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\overrightarrow{G} = -4\pi\mathrm{K}\rho$
Forme intégrale du théorème de Gauss : ρ_e est la charge intérieure et M_{int} la masse intérieure à la surface de Gauss	$\oiint \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint \overrightarrow{G}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\pi\mathrm{K}M_{\mathrm{int}}$
Relations entre énergies potentielles et potentiels	$E_p^e = qV + \mathrm{C}^{te}$	$E_p^g = m\Phi_g + \mathrm{C}^{te}$
Energies potentielles d'interaction entre deux particules. Charges $\{q, Q\}$. Masses $\{m, M\}$	$E_p^e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} + \mathrm{C}^{te}$	$E_p^g = -m\frac{\mathrm{K}M}{r} + \mathrm{C}^{te}$

2. C est le centre de l'astre, O se trouve à sa surface et le point P est à une altitude $z = \mathrm{OP}$.



La répartition de masse étant invariante dans toute rotation de centre C, le champ $\overrightarrow{G}$, (dont la direction appartient aux plans de symétrie de la distribution de masse) est alors radial. D'après le théorème de Gauss pour $z > 0$, $\overrightarrow{G}$ est le même que celui que créerait la masse totale de l'astre concentrée en C :

$$\overrightarrow{G}(\mathrm{P}) = -\mathrm{K}\frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\mathrm{K}\frac{M}{(R+z)^2}\overrightarrow{u_r}$$

En faisant apparaître le champ de gravitation à la surface de l'astre $G_0 = K\frac{M}{R^2}$, la valeur du champ de gravitation à l'altitude z est :

$$G(z) = G_0\frac{1}{\left(1+\frac{z}{R}\right)^2}$$

L'énergie potentielle d'une particule de masse m dans le champ de l'astre est :

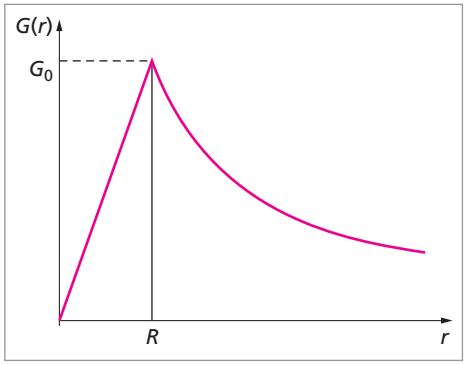
$$E_p^g = -m\frac{\mathrm{K}M}{r} = -m\frac{\mathrm{K}M}{R+z}$$

(elle augmente avec z). Si $z \ll R$, E_p^g s'écrit, au premier ordre en $\frac{z}{R}$:

$$E_p^g \approx -m\frac{\mathrm{K}M}{R}\left(1-\frac{z}{R}\right) \approx mG_0 z + \mathrm{C}^{te}$$

avec l'axe des z orienté en sens inverse de celui de $\overrightarrow{G}$. L'expression habituelle de l'énergie potentielle de pesanteur dans un champ uniforme néglige donc les termes en $\frac{z}{R}$ dès le second ordre.

3. À l'intérieur d'un astre dont la répartition de masse est à symétrie sphérique et la masse volumique constante, $\overrightarrow{G}$ (qui est encore radial) se calcule en appliquant le théorème de Gauss à une surface sphérique de centre C, de rayon $\overrightarrow{G}$:



$$\oiint \overrightarrow{G}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\pi\mathrm{K}M_{\mathrm{int}}$$

où

$$M_{\mathrm{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

et

$$\oiint \overrightarrow{G}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\pi r^2 G(r)$$

en tenant compte de ce que ce flux est négatif (on désigne par $G(r)$ **l'intensité** du champ de gravitation). Il vient $G(r) = G_0\frac{r}{R}$. On remarque qu'à l'intérieur d'un astre de masse volumique constante, la force de gravitation aurait la forme d'une force de rappel élastique par rapport au centre. Les variations de $G(r)$ sont représentées sur la figure ci-dessus.

11 **1.** L'énergie mécanique d'un point matériel de masse m, animé de la vitesse V à une distance r du centre attractif est :

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - m\frac{\mathrm{K}M}{r}$$

Ainsi, avec la convention d'une énergie potentielle de gravitation nulle lorsque r tend vers l'infini, les états d'énergie négative sont des états liés. Cela signifie que r est borné supérieurement (sinon, il est clair que $\frac{1}{2}mV^2$ deviendrait négatif). En revanche, les états d'énergie positive sont des états libres au sens où aucune contrainte physique n'empêche r de tendre vers l'infini. $E = 0$ correspond à la transition entre les états liés et les états libres ; le point matériel a alors une énergie cinétique nulle à l'infini. Cela permet de définir la

vitesse de libération pour un objet se trouvant à une distance r du centre attractif par :

$$V_l(r) = \sqrt{2\frac{\mathrm{K}M}{r}}$$

2. La vitesse de libération du champ de gravitation du Soleil pour la Terre, ou tout objet se trouvant à la distance r_{TS} du centre du Soleil, est $V_l^{\mathrm{S}} = \sqrt{2\dfrac{\mathrm{K}M_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{TS}}}} \approx 42{,}2 \text{ km.s}^{-1}$. Il est instructif de la comparer à la vitesse de la Terre dans sa révolution autour du Soleil (29,8 km.s^{-1}) pour se convaincre que la Terre est bien liée au Soleil.

3. La vitesse de libération du champ de gravitation de la Terre pour un objet se trouvant à la surface de celle-ci est $V_l^{\mathrm{T}} = \sqrt{2\dfrac{\mathrm{K}M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}} \approx 11{,}2 \text{ km.s}^{-1}$. Il est intéressant de la comparer à la vitesse moyenne $\langle V \rangle$ d'agitation thermique des molécules de l'air à la surface terrestre à température ambiante pour se rendre compte que la Terre retient son atmosphère (même si une petite fraction de celle-ci s'en échappe chaque jour). Dans le cas d'un gaz parfait diatomique, $\langle V \rangle$ est donné par $\dfrac{1}{2}m\langle V \rangle^2 = \dfrac{5}{2}\mathrm{k}_B T$. Cette relation est issue de la théorie cinétique des gaz, où l'on compte une énergie cinétique d'agitation thermique de $\dfrac{1}{2}\mathrm{k}_B T$ par degré de liberté. Pour le dioxygène, on obtient $\langle V \rangle \approx 0{,}622 \text{ km.s}^{-1}$.

4.a. Le premier postulat de la théorie de la relativité impose que la vitesse d'un point matériel soit toujours inférieure à la célérité c de la lumière dans le vide. Cela doit être en particulier le cas de la vitesse de libération du champ de gravitation d'un astre de masse M et de rayon R à sa surface. Le rayon de Schwarzchild d'un astre est donné par $V_l(R_{\mathrm{SC}}) = \mathrm{c}$, c'est-à-dire $R_{\mathrm{SC}} = 2\dfrac{\mathrm{K}M}{\mathrm{c}^2}$. C'est le rayon limite que devrait avoir un astre de masse M donnée pour que la lumière ne puisse pas en sortir ; en clair, c'est le rayon à partir duquel l'astre deviendrait un trou noir.

b. Pour le Soleil, $R_{\mathrm{SC}} \approx 3$ km. Si les $2 \cdot 10^{30}$ kg de matière solaire étaient confinés dans une sphère de rayon inférieure à 3 km, le Soleil serait un trou noir. À la surface de cet hypothétique trou noir solaire, le champ de gravitation vaudrait

$$G^*(R_{\mathrm{SC}}) = \frac{\mathrm{K}M_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{SC}}^2} \approx 1{,}5 \cdot 10^{13} \text{ m.s}^{-2}$$

à comparer à la valeur du champ de gravitation à la surface du Soleil actuel :

$$G(R_{\mathrm{S}}) = \frac{\mathrm{K}M_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{S}}^2} \approx 300 \text{ m.s}^{-2}.$$

c. La masse volumique moyenne de ce trou noir solaire vaudrait

$$\rho^* = \frac{M_{\mathrm{S}}}{\dfrac{4}{3}\pi R_{\mathrm{SC}}^3} \approx 1{,}8 \cdot 10^{19} \text{ kg.m}^{-3}.$$

Or, la valeur moyenne de la masse volumique de la matière nucléaire est de l'ordre 10^{17} kg.m^{-3} (la masse d'un noyau d'hydrogène vaut $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, et son rayon est de l'ordre du fermi, soit 10^{-15} m). A une densité 100 fois supérieure à celle de la matière nucléaire, il est clair que les particules qui constituent le noyau (les hadrons) ont subi une transition vers un état de la matière qu'il est difficile de décrire ; une telle augmentation de densité produirait un déconfinement des quarks (qui sont les constituants des hadrons). Quoiqu'il en soit, le Soleil ne pourra jamais devenir un trou noir, car il n'est pas assez massif : son énergie gravitationnelle n'est pas assez importante pour provoquer un effondrement conduisant à de telles densités.

12 **1.** Il est commode d'utiliser la deuxième formule de Binet qui donne une expression de l'accélération d'un point matériel soumis à une force centrale dans laquelle la variable temps a été éliminée grâce à la conservation du moment cinétique. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\overrightarrow{f} = -K\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -m\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r}\right]\overrightarrow{u_r}$$

d'où l'équation différentielle linéaire du second ordre en $\frac{1}{r}$ à coefficients constants :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{KM}{C^2}$$

Sa solution, somme de la solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{1}{r} = \frac{KM}{C^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \varphi)$$

φ est l'angle de l'axe focal avec l'axe polaire (axe Ox). Si l'axe focal et l'axe polaire sont confondus, $\varphi = 0$. Dans ces conditions, l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad \text{où} \quad p = \frac{C^2}{KM}$$

p est le paramètre de la conique et e son excentricité. Le centre attracteur O est un des foyers de la conique.
Si $e = 0$, la trajectoire est un cercle, puisque r ne dépend pas de θ.
Si $0 < |e| < 1$, la trajectoire est visiblement bornée dans le plan (il n'existe pas de valeur de θ pour laquelle r tend vers l'infini) : il s'agit d'une ellipse.
Si $|e| = 1$, la trajectoire est une parabole d'axe Ox : r tend vers l'infini pour $\theta = \pi$ si $e = 1$, pour $\theta = 0$ si $e = -1$.
Si $|e| > 1$, la trajectoire est une hyperbole d'axe Ox.

L'utilisation de la première formule de Binet permet d'exprimer la vitesse en fonction de $\frac{1}{r}$ et de sa dérivée par rapport à l'angle polaire. L'énergie mécanique s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - m\frac{KM}{r} = \frac{1}{2}mC^2\left(\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right) - m\frac{KM}{r}$$

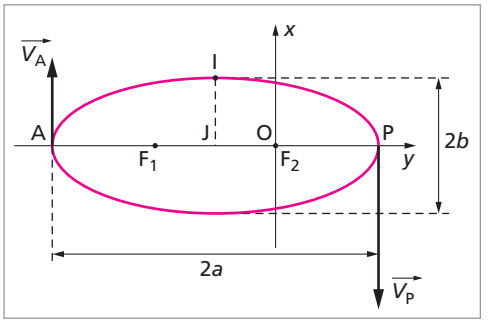
$$= \frac{1}{2}mC^2\left(\frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2} + \left(-\frac{e\sin\theta}{p}\right)^2\right) - m\frac{C^2}{p}\left(\frac{1+e\cos\theta}{p}\right)$$

Tous calculs faits, on a :

$$E = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{p^2}\left(e^2 - 1\right)$$

Il apparaît clairement que l'énergie des ellipses (et des cercles) est négative, celle des paraboles nulle et celle des hyperboles positive.

2. Le cas représenté sur la figure ci-contre correspond à $0 < e < 1$. Les deux foyers de l'ellipse sont F_1 et $F_2 = O$. Les distances au centre attractif à l'apogée A et au périgée P sont obtenues respectivement pour $\theta = \pi$ ($r_A = \frac{p}{1-e}$) et $\theta = 0$ ($r_P = \frac{p}{1+e}$). On conçoit bien que e procure une mesure de « l'écart au cercle » : plus $0 < e < 1$ est proche de 1, plus r_A et r_P sont différents et plus l'ellipse est « aplatie ». Comme $r_A + r_P = 2a$, on a $p = a(1-e^2)$ et l'énergie s'écrit :



$$E = -\frac{mC^2}{2ap} = -m\frac{KM}{2a}.$$

On remarque que le seul paramètre géométrique qui intervient dans l'expression de l'énergie est le demi grand axe a ; on note par ailleurs que l'énergie mécanique d'une particule en mouvement sur une ellipse de demi grand axe a est la même que l'énergie potentielle d'une particule qui se trouverait à la distance $2a$ du centre attractif.

Puisque la composante radiale du vecteur vitesse est nulle en A et en P, l'égalité des moments cinétiques en ces deux points s'écrit $V_A r_A = V_P r_P$. On utilise alors l'expression de la vitesse en fonction de θ donnée en tout point par la première formule de Binet pour exprimer $V_A r_A = V_P r_P$ et $V_A r_A = V_P r_P$ en fonction des paramètres géométriques de l'ellipse. De $V^2 = \frac{C^2}{p^2}\left(1 + 2e\cos\theta + e^2\right)$, on tire :

$$V_A = \sqrt{\frac{MK}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \quad \text{et} \quad V_P = \sqrt{\frac{MK}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}.$$

3. La première loi de Kepler a été abondamment commentée au paragraphe précédent. La seconde loi de Kepler, qui exprime la loi des aires est valable dans un cadre plus large que celui des potentiels newtoniens : elle est vraie pour toute force centrale, qu'elle soit en $\frac{1}{r^2}$ ou non.
La troisième loi de Kepler se démontre en toute généralité en utilisant les résultats du **2.** Il est de plus nécessaire de savoir que :

- l'aire d'une ellipse est πab, où a est le demi grand-axe et b le demi petit-axe.
- une ellipse de foyers F_1 et F_2 est le lieu des points Q qui vérifient $F_1Q + F_2Q = C^{te}$

La loi des aires s'écrit : $A = \frac{C}{2}t$, avec le choix d'une origine des temps convenable. T étant la période de révolution, on a $\pi ab = \frac{C}{2}T$. En reprenant les notations de la figure page précedente, et en écrivant la seconde propriété des ellipses en P, on obtient :

$$F_1P + F_2P = r_A + r_P = 2a.$$

Puisqu'elle s'écrit $F_1I + F_2I = 2a$, on remarque qu'au point I, on a $F_1I = F_2I = a$. Le théorème de Pythagore conduit à $JF_1^2 + JI^2 = F_1I^2$, soit $b^2 = a^2 - JF_1^2$. Comme $JF_1 = \frac{1}{2}F_1F_2$ et que $F_1F_2 = F_1P - F_2P = r_A - r_p = 2ae$, on a $b^2 = a^2 - OF_1^2$. En élevant au carré la relation exprimant la loi des aires, on obtient $\pi^2 a^4 \left(1 - e^2\right) = \frac{C^2}{4}T^2$, où $C^2 = KMp = KMa(1 - e^2)$.
On en tire la relation : $4\pi^2 a^3 = KMT^2$ qui exprime la troisième loi de Kepler.

13 **1.** D'après l'exercice précédent, on a $e = 0$, donc $V^2 = \frac{C^2}{p^2} = \frac{KM}{a}$ est constant, et le mouvement est uniforme. On retrouve très vite directement toutes les relations concernant le satellite circulaire en remarquant que, les vecteurs de la base de Frenet sont confondus (au sens près) avec $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $mG(z) = m\frac{V^2}{(R+z)}$. Comme on a montré à l'exercice 10 que $G(z) = G_0\frac{R^2}{(R+z)^2}$ à l'extérieur d'un astre à symétrie sphérique, où G_0 est la valeur du champ de gravitation à l'altitude $z = 0$, on a $V = \sqrt{\frac{G_0R^2}{(R+z)}}$. La vitesse angulaire du satellite étant $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{V}{(R+z)}$, on peut alors écrire la troisième loi de Kepler sous la forme :

$$T = 2\pi\frac{(R+z)^{3/2}}{\sqrt{G_0R^2}}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{(R+z)^3}{T^2} = \frac{G_0R^2}{4\pi^2}$$

Un satellite géostationnaire est immobile dans un repère lié à la Terre. La répartition de masse de la Terre étant supposée sphérique, le plan orbital du satellite passe par le centre de la Terre. Un satellite ne peut donc être géostationnaire que si sa trajectoire est un cercle

contenu dans le plan équatorial, et qu'il y tourne dans le sens de rotation terrestre en faisant un tour complet en un **jour sidéral** (la Terre fait un tour complet sur elle même en un jour sidéral, soit 23*h*56 min). On trouve que l'altitude à laquelle un tel satellite doit graviter est $z = 36\,000$ km.

2. On trace R^3 en fonction de T^2 ; c'est une droite dont la pente vaut $\frac{KM_J}{4\pi^2}$. D'après la question précédente, la troisième loi de Kepler est ainsi vérifiée. On en déduit la masse de Jupiter $M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.

14 **1.** L'énergie mécanique d'un satellite de masse m en mouvement dans le champ de gravitation à symétrie sphérique d'un astre de masse M est $E = \frac{1}{2}mV^2 - m\frac{KM}{r}$. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit, $dE_C = dW(\vec{F_g}) + dW\left(\vec{F}\right)$, où le travail de la force de gravitation $\vec{F_g}$ est $dW(\vec{F_g}) = -dE_p$. On a donc $dE_C = -dE_P + dW\left(\vec{F}\right)$, d'où on tire $\left(\frac{dE}{dt}\right) = P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V} = -h(V).V^2$. Ainsi, l'énergie mécanique du satellite diminue sous l'effet de la force de frottement. En dérivant l'énergie par rapport au temps, on montre facilement que cela se manifeste par des variations de la vitesse et de la distance au centre attracteur qui obéissent à l'équation :

$$mV\left(\frac{dV}{dt}\right) + m\frac{KM}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right) = -h(V).V^2$$

Par ailleurs, l'orbite du satellite étant circulaire et $\left\|\vec{F}\right\| \ll \left\|\vec{F_g}\right\|$, la projection du principe fondamental de la dynamique sur la normale à la trajectoire s'écrit $m\frac{V^2}{r} = m\frac{KM}{r^2}$, soit $V^2 = \frac{KM}{r}$. Dans ces conditions, une variation dV de vitesse est reliée à une variation dr de rayon par la relation $2V\left(\frac{dV}{dt}\right) = -\frac{KM}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)$. Il en ressort d'ores et déjà que r et V varient en sens inverse : une diminution de r est liée à une augmentation de vitesse. L'élimination de $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ entre ces deux équations conduit à $\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{V.h(V)}{m} > 0$.
Les frottements atmosphériques provoquent une augmentation de la vitesse du satellite, ce qui fait qu'il tombe sur l'astre puisque r diminue. Si son énergie mécanique diminue, c'est parce que son énergie potentielle diminue plus vite que son énergie cinétique n'augmente.

15 **1.** Le rapport entre l'attraction gravitationnelle et la répulsion coulombienne qui s'exercent entre un noyau de masse M, de numéro atomique Z et un noyau ${}^4_2\text{He}$, de masse m distants de r vaut $\frac{F_G}{F_C} = \frac{\frac{KmM}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Zq_e^2}{r^2}} \approx 10^{-36}$. Cela justifie que l'on néglige

l'attraction gravitationnelle devant la répulsion coulombienne, quelle que soit la distance entre les deux noyaux.

2. Le rapport entre les masses du noyau d'or et du noyau d'Hélium vaut environ $\frac{197}{4} \approx 50$. La quantité de mouvement de la particule α est pratiquement la même dans le référentiel barycentrique et celui du laboratoire car la masse réduite du système constitué de la particule α et du noyau d'or est pratiquement égale à celle de la particule α (à environ 2 % près) $\mu = \frac{mM}{m+M} \approx 3.92$. Dans ces conditions, le recul du noyau d'or est négligeable.

3. Les propriétés générales des forces centrales permettent d'affirmer que le moment cinétique se conserve. Le mouvement de la particule α dans le champ de forces du noyau d'or est donc plan et $r^2\dot{\theta} = C$ (exercice 9).
En utilisant l'expression de l'accélération donnée par la formule de Binet, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{-k}{mC^2}$$

équation qui s'intègre en :

$$\frac{1}{r} = \frac{-k}{mC^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \varphi).$$

Avec les conventions de la figure de l'énoncé, l'axe polaire passe par le sommet S de l'hyperbole, donc $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta=0} = 0$, ce qui impose $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. Par ailleurs, les asymptotes sont telles que $\lim_{\theta\to\pm\beta}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. β étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ne retient que la solution $\varphi = 0$. On a alors :

$$\mathrm{A} = \frac{k}{mC^2\cos\beta}$$

ce qui conduit à l'équation demandée :

$$r = \frac{p}{\frac{\cos\theta}{\cos\beta} - 1} \quad \text{avec} \quad p = \frac{mC^2}{k}$$

4. Un problème analogue a déjà été traitée dans l'exercice 12, mais dans le cas d'une interaction gravitationnelle. L'énergie mécanique de la particule dans le champ coulombien répulsif du noyau d'or s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{k}{r}$$

On utilise la première formule de Binet pour exprimer la vitesse en fonction de $\frac{1}{r}$ et de sa dérivée par rapport à l'angle polaire. Il vient :

$$E = \frac{k^2}{2mC^2}\left(e^2 - 1\right)$$

Comme $e > 1$, l'énergie mécanique est positive, ce qui correspond à des états libres (de diffusion) pour un potentiel newtonien, au sens où la particule peut aller à l'infini (ici pour $\theta = \pm\beta$).

5. La constante des aires s'écrit :

$$C = r.V. \left|\sin(\widehat{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}})\right|$$

où $(\widehat{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}})$ désigne l'angle entre les vecteurs vitesse et position. Lorsque $\theta \to \beta$, $r \to \infty$, tandis que $\sin(\widehat{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}}) \to 0$. En remarquant que $r. \left|\sin(\widehat{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}})\right|$ est la projection du vecteur position sur la normale à l'asymptote, on obtient :

$$C = V_0 b.$$

Par ailleurs, l'énergie de la particule vaut $E = \frac{1}{2} m V_0^2$ lorsque $r \to \infty$.
On réécrit alors la conservation de l'énergie en reprenant l'expression de E en fonction de $e = \frac{1}{\cos\beta}$ établie dans l'exercice 12 :

$$E = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{k^2}{2 m V_0^2 b^2} \left(\frac{1}{\cos^2\beta} - 1\right)$$

Comme $\frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \tan^2\beta$, on a $\tan\beta = \frac{m V_0^2 b}{k}$ (avec la convention $\beta \geqslant 0$). On remarque sur le dessin que $D = \pi - 2\beta$. On obtient la célèbre formule de Rutherford donnant la déviation de la particule α :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{Z q q_e}{4\pi\varepsilon_0 m V_0^2 b}$$

Naturellement, pour des particules d'énergie (donc de vitesse) donnée, la déviation D augmente lorsque b diminue .
– si $b \to 0$, on a $D \to \pi$: c'est la rétrodiffusion totale ;
– si $b \to \infty$, on a $D \to 0$.
Il est intéressant de remarquer que la déviation est fonction d'un simple rapport d'énergies :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \left(\frac{Z q q_e}{4\pi\varepsilon_0 b}\right) \times \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{2} m V_0^2\right)}$$

$$= \frac{\text{Energie potentielle coulombienne à la distance } b \text{ de la cible}}{2 \times \text{Energie mécanique du projectile}}$$

Dire que la déviation augmente lorsque b diminue revient à dire que la particule α est d'autant plus sensible à la présence de la cible que son énergie mécanique est petite devant l'énergie potentielle coulombienne à la distance b.

$\tan\left(\frac{D}{2}\right)$ n'est pas directement accessible expérimentalement. Un détecteur permet de mesurer la section efficace différentielle de diffusion, dont on montre qu'elle varie comme $\frac{1}{\sin^4\left(\frac{D}{2}\right)}$ si on ne tient pas compte des déflexions multiples (ce qui impose une cible de très faible épaisseur).

En 1909, Geiger et Mardsen ont étudié l'interaction d'un faisceau de particules α produites par la désintégration radioactive d'un nucléide noté *Ra*C avec de minces feuilles d'or (environ 0,4 μm d'épaisseur). La vitesse des particules α était de l'ordre de 20 000 km.s^{-1}. Les résultats de cette expérience historique ont jeté les bases du modèle planétaire de l'atome proposé par Rutherford en 1911 : d'une part la section efficace différentielle est fortement piquée vers l'avant (cela signifie que la plus grande partie des particules α^* émises par la source est peu déviée), et d'autre part une particule α sur 20 000 est rétrodiffusée, c'est-à-dire déviée d'un angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$. Ce dernier point met en échec le modèle de Thomson dans lequel la charge positive est répartie dans une sphère dont la taille est celle de l'atome, car la rétrodiffusion n'est possible dans ce dernier cas qu'à très basse énergie.

On se réfère souvent à l'expérience de Geiger et Mardsen pour parler de « structure lacunaire de la matière » au sens où « l'essentiel de la masse d'un atome est concentré dans une toute petite portion d'espace chargée positivement : le noyau ».

16 **1.** Le système étudié est la « partie sensible » de masse m. A l'équilibre, les deux référentiels sont équivalents : GXYZ et Oxyz sont confondus. Ce système est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$ et à la force de rappel exercée par le ressort $\overrightarrow{T} = k(h_0 - h_1)\,\overrightarrow{u_y}$. La condition d'équilibre de ce système s'écrit $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$, et conduit donc à la relation $mg = k(h_0 - h_1)$.

2. En cas d'un tremblement de terre, le système est soumis dans le référentiel lié au sol à la force d'inertie d'entraînement due à la translation de ce dernier par rapport au référentiel galiléen du lieu. Cette force est donc proportionnelle à l'accélération de R_S par rapport à R_G :

$$\overrightarrow{F_{ie}}(M) = -m\overrightarrow{a}\left(R_S/R_G\right) = -m\left(\frac{d^2\overrightarrow{GO}}{dt^2}\right)$$

et s'écrit en notation complexe $\overrightarrow{F_{ie}}(M) = m\omega^2 S_0 e^{i\omega t}\overrightarrow{u}_y$.

3. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système de masse m dans le référentiel non galiléen R_S lié au sol s'écrit :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F_{ie}}(M) = m\overrightarrow{a}.$$

$\overrightarrow{T} = k(h_0 - h(t))\,\overrightarrow{u_y}$ est la force de rappel du ressort, $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{V}$ est la force de frottement fluide. $\overrightarrow{a} = \ddot{h}(t)\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{V} = \dot{h}(t)\overrightarrow{u_y}$ désignent respectivement l'accélération et

la vitesse de la masse dans le référentiel lié au sol. La projection de cette relation sur l'axe Oy conduit à :

$$-mg + k\,(h_0 - h(t)) - \lambda\dot{h}(t) + m\omega^2 S_0 e^{i\omega t} = m\ddot{h}(t)$$

En repérant la position de la masse par rapport à l'équilibre par $H(t) = h(t) - h_1$ et en tenant compte de la condition d'équilibre du système, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{H}(t) + \frac{\lambda}{m}\dot{H}(t) + \frac{k}{m}H(t) = \omega^2 S_0 e^{i\omega t}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire dans laquelle de simples considérations liées à l'analyse dimensionnelle font apparaître de façon naturelle deux temps caractéristiques. On vérifie que l'homogénéité de chacun des termes permet de poser $\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. τ est le temps de relaxation lié à l'amortissement des oscillations sous l'effet de la force de frottement fluide, c'est-à-dire le temps caractéristique au bout duquel le système oscillant librement rejoint sa position d'équilibre stable (dans la pratique, cette position est atteinte au bout de « quelques τ »). $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la période propre de l'oscillateur, soit la période de ses oscillations sous la seule action de la force de rappel élastique.

La linéarité de l'équation différentielle du mouvement permet d'écrire sa solution générale comme la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (transitoire) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre ; c'est cette dernière qui définit le régime permanent sinusoïdal.

En régime permanent, l'égalité entre les deux membres de l'équation différentielle ne peut être assurée que si $H(t)$ est une fonction sinusoïdale de même fréquence que l'excitation. On cherche $H(t) = H_a e^{i\omega t}$. Il vient en reportant $\dot{H}(t) = i\omega H(t)$ et $\ddot{H}(t) = -\omega^2 H(t)$ dans l'équation différentielle :

$$H_a = S_0 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega/\tau}$$

$H_a(\omega) = |H_a(\omega)|\, e^{i\psi(\omega)}$, où le déphasage entre la réponse en amplitude et la force excitatrice est défini de façon pratique par sa tangente : $\tan\psi(\omega) = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Il importe de remarquer que la seule donnée de $\tan\psi(\omega)$ ne permet pas de déterminer $\psi(\omega)$ de manière univoque ; si l'on remarque que la partie imaginaire de H_a est toujours négative, on en déduit alors que $-\pi \leqslant \psi(\omega) \leqslant 0$

5. Étude de la réponse fréquentielle

$$|H_a(\omega)| = S_0 \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}$$

a. Plutôt que de calculer directement la dérivée de $|H_a(\omega)|$, il est plus judicieux de poser :

$$|H_a(\omega)| = S_0 \frac{1}{\sqrt{D(\omega)}} \quad \text{où} \quad D(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}{\omega^4}$$

$|H_a(\omega)|$ présente alors un pic lorsque $D(\omega)$ est minimum. Avec $X = \dfrac{1}{\omega^2}$, on a :

$$D(X) = \left(\omega_0^2 X - 1\right)^2 + \frac{X}{\tau^2}$$

et on calcule facilement :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}X}\right)\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\omega}\right) = \left(\frac{-2}{\omega^3}\right)\left(2\omega_0^2\left(\omega_0^2 X - 1\right) + \frac{1}{\tau^2}\right)$$

$\left(\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega}\right) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 X = 1 - \dfrac{1}{2\omega_0^2\tau^2}$. Or, les seules valeurs de X qui ont un sens physique sont réelles, ce qui impose que $\omega_0\tau > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $D(\omega)$ a alors un extremum pour la valeur (positive) de la pulsation $\omega_r = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2\omega_0^2\tau^2}}}$. On peut facilement montrer qu'il s'agit d'un minimum en calculant $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}\omega^2}\right)_{\omega_r} = 8\dfrac{\omega_0^4}{\omega_r^6} > 0$.

En conclusion, le module de l'amplitude $|H_a(\omega)|$ présente un pic à condition que $\omega_0\tau > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\lambda < \sqrt{2}$ km c'est-à-dire lorsque l'amortissement n'est pas trop important. Ce pic s'observe pour une pulsation ω_r légèrement supérieure à la pulsation propre. On retrouve que, si l'oscillateur n'est pas amorti, (dans la limite où $\tau \to \infty$) ce pic est atteint pour $\omega_r = \omega_0$.

En remplaçant ω par ω_r dans les expressions du module et du déphasage, on trouve :

$$\tan\psi(\omega_r) = \sqrt{2}\sqrt{2\omega_0^2\tau^2 - 1} \quad \text{et} \quad |H_a(\omega_r)| = S_0\frac{2\omega_0^2\tau^2}{\sqrt{4\omega_0^2\tau^2 - 1}}$$

b. Limite des basses fréquences : $|H_a(\omega)| \underset{\omega\to 0}{\sim} S_0\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et $\tan\psi(\omega) \underset{\omega\to 0}{\sim} -\dfrac{\omega}{\tau\omega_0^2}$. Le module de l'amplitude est faible et la réponse en amplitude est pratiquement en phase avec la force excitatrice, donc en opposition de phase avec le déplacement $S(t)$ dû au tremblement de terre.

Limite des hautes fréquences : $\lim\limits_{\omega\to\infty} |H_a(\omega)| = S_0$ et $\lim\limits_{\omega\to\infty} \psi(\omega) = -\pi$.

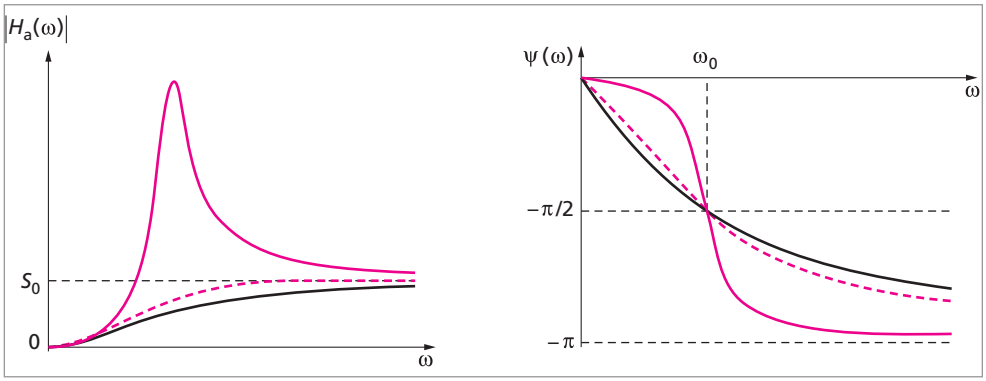
La réponse est alors en opposition de phase avec la force excitatrice.

c. Les figures ci-dessous montrent l'allure des variations du module et de la phase de la fonction de réponse en fréquence pour trois valeurs différentes de τ, à ω_0 fixé.

– oscillateur fortement amorti : $\omega_0\tau < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (trait noir).

– oscillateur peu amorti : $\omega_0\tau > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (trait coloré continu).

– régime intermédiaire de l'existence d'un pic : $\omega_0\tau = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (trait coloré pointillé).



Ces courbes ont été abondamment discutées précédemment. On notera que les courbes représentant $\psi(\omega)$ ont un point fixe en $\left\{\omega_0, -\dfrac{\pi}{2}\right\}$ et que le déphasage varie très vite avec la fréquence au voisinage de ω_0 si l'amortissement est faible.

6. Limite d'un oscillateur faiblement amorti $\omega_0\tau \gg 1$. À l'ordre le plus bas, $\omega_r \sim \omega_0$, $\tan\psi(\omega_r) \simeq 2\omega_0\tau$ et $|H_a(\omega_r)| \simeq S_0\omega_0\tau$. L'analogie avec le cas d'un circuit *RLC* série en régime sinusoïdal montre que $Q = \omega_0\tau$ apparaît comme l'équivalent d'un facteur de surtension (aux bornes de L ou C). On peut définir une bande passante par les valeurs de la pulsation telles que $|H_a(\omega)| = \dfrac{|H_a(\omega_r)|}{\sqrt{2}}$, ce qui conduit à une équation du second degré en $Y = \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2$:

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + \left(1 - \frac{2}{Q^2}\right) = 0$$

dont les solutions s'écrivent $Y = \dfrac{2Q^2 - 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q^2}$. Un développement à l'ordre le plus bas en $\left(\dfrac{1}{Q}\right)$ conduit à $Y = 1 \pm \dfrac{1}{Q}$, d'où on déduit les deux fréquences de coupure $\omega_\pm = \omega_0\left(1 \pm \dfrac{1}{2Q}\right)$.

La largeur typique du pic vaut $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{\tau}$. On retrouve que la largeur du pic est inversement proportionnelle au temps de relaxation, et que $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$ est le facteur de qualité de l'oscillateur : plus Q est élevé, plus le pic est étroit.

7. On se place dans des conditions où la courbe de réponse ne comporte pas de pic ; plus $\omega_0\tau$ se rapproche de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, plus la courbe est plate. On choisira donc $\omega_0\tau = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Si l'on souhaite une réponse uniforme dans la gamme de périodes des vibrations sismiques, c'est-à-dire pour des pulsations comprises entre 0,63 rad $\cdot\, s^{-1}$ et 6,3 rad $\cdot\, s^{-1}$, il faut que

$\omega_0 \ll 0{,}63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Comme $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, il faut que m soit élevé. Dans ces conditions, le sismographe se comporte comme un capteur d'amplitude dont la réponse fréquentielle est voisine de celle de chacune des composantes de Fourier de la vibration sismique. L'inconvénient est qu'il n'y a aucune amplification.

17 **1.** Le référentiel étant supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\overrightarrow{r} = \frac{\overrightarrow{F}}{m} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

2. En multipliant par q l'équation différentielle précédente avec $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\overrightarrow{p} = \frac{q^2}{m}\overrightarrow{E}$$

3.a. La solution particulière stationnaire de cette équation, qui correspond à $\dot{\overrightarrow{p}} = \overrightarrow{0}$ est $\overrightarrow{p_0} = \dfrac{q^2}{m\omega_0^2}\overrightarrow{E_0}$, ce qui permet de définir la polarisabilité statique par $\alpha_0 = \dfrac{q^2}{m\omega_0^2}$.

b. On cherche tout d'abord la solution générale de l'équation sans second membre ; l'équation caractéristique associée est : $x^2 + \Gamma x + \omega_0^2 = 0$. Dans l'hypothèse où $\Gamma \ll \omega_0$, son discriminant est négatif et les solutions s'écrivent $x_\pm = \dfrac{\Gamma}{2} \pm \mathrm{i}\omega_0$ en négligeant les termes en $\left(\dfrac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2$. La solution générale de l'équation sans second membre est donc en notation complexe de la forme $\overrightarrow{A}\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\Gamma}{2}+\mathrm{i}\omega_0\right)t} + \overrightarrow{B}\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\Gamma}{2}-\mathrm{i}\omega_0\right)t}$. En notation réelle, on l'écrit $\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\overrightarrow{a}\cos\omega_0 t + \overrightarrow{b}\sin\omega_0 t\right)$, d'où $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\overrightarrow{a}\cos\omega_0 t + \overrightarrow{b}\sin\omega_0 t\right)$. Les condition initiales conduisent à $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{p_0}$ et $\overrightarrow{b} = -\dfrac{\Gamma}{2\omega_0}\overrightarrow{p_0}$, et l'on obtient finalement :

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\cos\omega_0 t + \frac{\Gamma}{2\omega_0}\sin\omega_0 t\right)\right).$$

Le moment dipolaire atteint donc la valeur statique $\overrightarrow{p_0}$ selon un régime transitoire oscillatoire exponentiellement amorti de temps caractéristique $\tau = \dfrac{2}{\Gamma}$, de pseudo période $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

4.a. On revient à la notation complexe. En régime permanent $\overrightarrow{E}(t) = \overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, on cherche alors $\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{\mathrm{A}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. En reportant $\dot{\overrightarrow{p}}(t) = \mathrm{i}\omega\overrightarrow{p}(t)$ et $\ddot{\overrightarrow{p}}(t) = -\omega^2\overrightarrow{p}(t)$ dans l'équation différentielle, la réponse linéaire au champ électrique, $\overrightarrow{p}(t) = \alpha(\omega)\overrightarrow{E}(t)$, permet de définir la polarisabilité complexe $\alpha(\omega) = \dfrac{\dfrac{q^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} = \alpha_0\dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$

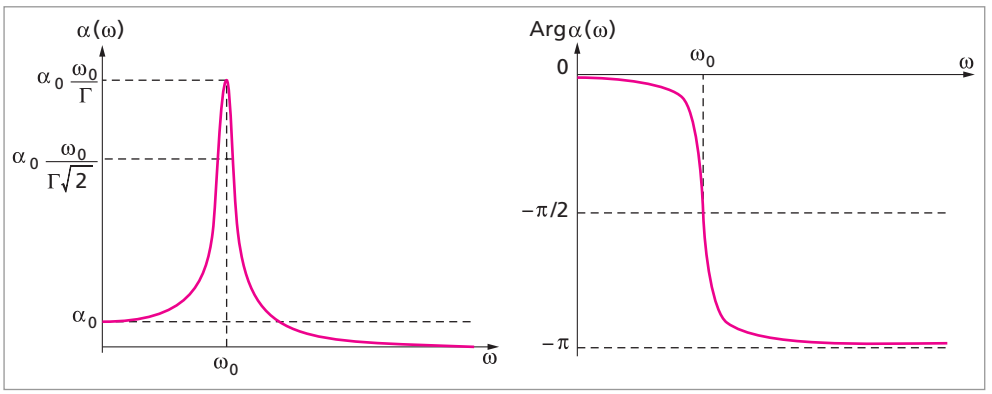
On a $|\alpha(\omega)| = \alpha_0 \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2}}$ et le déphasage $\mathrm{Arg}\,\alpha(\omega)$ entre $\overrightarrow{p}(t)$ et $\overrightarrow{E}(t)$, compris entre 0 et $-\pi$ est commodément défini par sa tangente $\tan(\mathrm{Arg}\,\alpha(\omega)) = \dfrac{-\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

La recherche d'un pic dans $|\alpha(\omega)|$ revient à celle d'un minimum du dénominateur

$$D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}.$$

On montre facilement que cet extremum est un minimum. L'existence d'un pic dans la polarisabilité impose $\omega_0 > \dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}$, condition satisfaite dans le cadre des hypothèses envisagées ici. En négligeant les termes d'ordre 2 en $\left(\dfrac{\Gamma}{\omega_0}\right)$ devant 1, ce pic se produit en $\omega_m = \omega_0$ et la polarisabilité vaut alors $|\alpha(\omega_m)| = \alpha_0 \dfrac{\omega_0}{\Gamma}$. Par ailleurs, $|\alpha(\omega)| \underset{\omega\to\infty}{\sim} \alpha_0 \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$. On en déduit les courbes représentatives du module de la polarisabilité et du déphasage entre le champ électrique et le moment dipolaire en fonction de ω, reportées sur les figure ci-dessous. La polarisabilité est importante si la fréquence du champ électrique se trouve dans la bande passante ; le moment dipolaire est alors proche de la quadrature avec le champ électrique.



b. En revenant aux grandeurs physiques réelles, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos\omega t$ et $\overrightarrow{p} = |\alpha(\omega)|\cos(\omega t + \varphi)\overrightarrow{E_0}$, où $\varphi = Arg\alpha(\omega)$. La puissance instantanée fournie par le champ électrique à l'atome est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique et sa fréquence deux fois plus grande :

$$P(t) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{V} = q\overrightarrow{E}\cdot\dot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{E}\cdot\dot{\overrightarrow{p}} = -\omega\,|\alpha(\omega)|\sin(\omega t + \varphi)\cos\omega t E_0^2$$

Sa valeur moyenne est $\langle P(t)\rangle_T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)\mathrm{d}t = -\omega\,|\alpha(\omega)|\,E_0^2\,\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\cos\omega t\mathrm{d}t$

L'intégrale se calcule aisément en développant le sinus :

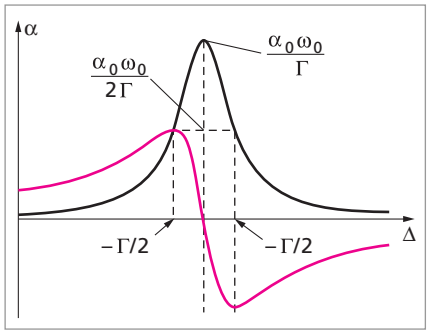
$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi)\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \left[\cos\varphi\frac{1}{T}\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t\,\mathrm{d}t + \sin\varphi\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{2}\sin\varphi$$

En tenant compte du fait que $\alpha = \alpha_r - i\alpha_i$, on a $\alpha_i = -|\alpha|\sin\varphi$ et $\langle P(t)\rangle_T = \frac{1}{2}\omega\alpha_i E_0^2$

c. On fait apparaître l'écart à la pulsation propre $\Delta = \omega - \omega_0$ dans l'expression de la polarisabilité :

$$\alpha = \frac{\alpha_0\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} = \frac{\alpha_0\omega_0^2}{-\omega_0\Delta(2+\Delta/\omega_0) + i\Gamma\omega_0(1+\Delta/\omega_0)}$$

En négligeant les termes en Δ/ω_0 devant 1 au dénominateur, on a $\alpha \approx \frac{\alpha_0\omega_0}{-2\Delta + i\Gamma}$, et les parties réelle et imaginaire de la polarisabilité s'expriment alors simplement en fonction de α_0, ω_0, Γ et Δ : $\alpha_r(\Delta) \approx \frac{-2\alpha_0\omega_0\Delta}{4\Delta^2+\Gamma^2}$ et $\alpha_i(\Delta) \approx \frac{\alpha_0\omega_0\Gamma}{4\Delta^2+\Gamma^2}$; $\alpha_r(\Delta)$ est impaire en Δ et $\alpha_i(\Delta)$ a un profil lorentzien. La figure ci-contre montre des courbes typiques de l'évolution de $\alpha_r(\Delta)$ (trait coloré) et $\alpha_i(\Delta)$ (trait noir) en fonction de l'écart Δ à la pulsation propre.



La puissance moyenne fournie par le champ à l'atome s'écrit :

$$\langle P(t)\rangle_T \approx \frac{1}{2}\omega_0\alpha_i E_0^2 \approx P_0\frac{1}{\dfrac{4\Delta^2}{\Gamma^2}+1}, \quad \text{où} \quad P_0 = \frac{\alpha_0\omega_0^2E_0^2}{2\Gamma}.$$

Elle a un profil lorentzien de largeur Γ en Δ, comme α_i.

Lorsque l'écart à la pulsation propre est nul, c'est-à-dire que la pulsation du champ électrique est égale à la pulsation propre de l'atome, la puissance absorbée par l 'oscillateur que constitue ce dernier est maximale ; rappelons que c'est ainsi que se définit la résonance de manière générale.

On remarquera que lorsque $\Delta = \pm\frac{\Gamma}{2}$, la puissance absorbée par l'atome vaut la moitié de sa valeur à la résonance, ce qui permet de définir la bande passante en puissance $\Delta\omega_P = \Gamma$, et le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_P} = \frac{\omega_0}{\Gamma}$, qui est par hypothèse très grand devant 1.

18 On notera algébriquement les vitesses, c'est à dire que V_1, V_2, V_1', V_2' peuvent être positives ou négatives.

1. La conservation de la quantité de mouvement de l'ensemble des deux particules dans le référentiel du laboratoire au cours du choc s'écrit, en projection sur l'axe portant tous les vecteurs vitesse :

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2'$$

Pour pouvoir calculer les vitesses après le choc en fonction de leurs valeurs avant le choc , il est nécessaire d'avoir une relation supplémentaire concernant la nature du choc. De manière générale, cette information est donnée par ce qu'on appelle le coefficient de restitution, égal au rapport des vitesse relatives avant et après le choc (il est parfois défini par le rapport de leurs carrés et mesure le rapport des énergies cinétiques du système avant et après le choc) : $-e(V_1 - V_2) = (V_1' - V_2')$. Le signe − assure $e > 0$, puisque les vitesses relatives après le choc et avant le choc sont toujours opposées. Le système d'équations décrivant le choc s'écrit :

$$\begin{cases} m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \\ -e(V_1 - V_2) = (V_1' - V_2') \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par m_2, et en l'additionnant à la première, on obtient :

$$V_1' = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1V_1 + m_2V_2 - em_2\left(V_1 - V_2\right)\right)$$

En multipliant de même la seconde par m_1, et en la soustrayant à la première, on a :

$$V_2' = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1V_1 + m_2V_2 - em_1\left(V_2 - V_1\right)\right)$$

2. Le calcul de la variation d'énergie cinétique conduit à :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_2 - V_1)^2(e^2 - 1).$$

Il y apparaît la masse réduite du système $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ et la vitesse relative des particules $V_r = (V_2 - V_1)$. Donc $\Delta E_c = \dfrac{1}{2}\mu V_r^2(e^2 - 1)$, résultat que l'on retrouve avec un calcul dans le référentiel barycentrique.

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(V_2 - V_1\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

3. Pour un choc élastique, le coefficient de restitution vaut 1 (la normes des vitesses relative est invariante par le choc) et $\Delta E_C = 0$.
Pour un choc mou, le coefficient de restitution est nul (puisque $V_1' = V_2'$), donc ΔE_C est négative et égale à $-\dfrac{1}{2}\mu V_r^2$

Pour un choc ni parfaitement élastique ni parfaitement mou, ΔE_C est négative, compris entre sa valeur minimale $-\frac{1}{2}\mu V_r^2$ et 0. C'est le choc mou qui dissipe le plus d'énergie cinétique.

4. Une réaction exothermique entre particules correspondrait à $\Delta E_C > 0$, donc $e > 1$

19 **1.** Le système étudié étant $\{P(M_n), C(m)\}$, où $P(M_n)$ désigne l'objet après n collisions et $C(m)$ la cible avec laquelle il va entrer en collision. La quantité de mouvement de ce système se conserve au cours du $(n+1)$ième choc. Ceci est vrai pour tout choc, c'est à dire quel que soit n.

Choc 1 : $M_0\overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{0} = (M_0 + m)\overrightarrow{V_1} = M_1\overrightarrow{V_1}$

Choc 2 : $M_1\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{0} = (M_1 + m)\overrightarrow{V_2} = M_2\overrightarrow{V_2}$

2. Les deux chocs étant unidimensionnels, il vient :

$$V_1 = \left(\frac{M_0}{M_0 + m}\right) V_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \left(\frac{M_0 + m}{M_0 + 2m}\right) V_1$$

Pour le n-ième choc, $M_{n-1}V_{n-1} = M_nV_n$, où $M_n = M_0 + nm$. On a donc :

$$V_n = \left(\frac{M_0 + (n-1)m}{M_0 + nm}\right) V_{n-1}$$

En remarquant que le dénominateur de l'expression donnant V_{n-1} est le même que celui du numérateur de l'expression donnant V_n, et en multipliant membre à membre les n premières égalités, il vient :

$$V_n = \left(\frac{M_0}{M_0 + nm}\right) V_0.$$

3. En posant $\alpha = \left(\frac{m}{M_0}\right)$, on peut écrire :

$$V_n = \left(\frac{1}{1 + n\alpha}\right) V_0$$

On constate que V_n diminue d'autant plus vite avec n que le rapport α des masses est élevé. $V_n = \frac{V_0}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{\alpha}$ (si M_0 est multiple de $M_n = 2M_0$) soit $M_n = 2M_0$. Ce processus est additif : $n = \frac{1}{\alpha}$ chocs mous avec des objets immobiles et identiques de masse $m = \alpha M_0$ ont le même effet qu'un seul choc avec un objet immobile de masse M_0.

4. L'énergie cinétique de $P(M_n)$ après le n-ième choc vaut :

$$E_C(n) = \frac{1}{2}M_nV_n^2 = \frac{1}{2}\frac{M_0^2}{(M_0 + nm)}V_0^2$$

En notant $E_C(0) = \frac{1}{2} M_0 V_0^2$ l'énergie cinétique initiale de l'objet P, on a :

$$E_C(n) = \left(\frac{1}{1 + n\alpha} \right) E_C(0).$$

La loi de décroissance est la même que pour la vitesse.
Il importe de remarquer que tous les chocs sont mous, et les objet avec lesquels P entre en collision sont immobiles. La diminution d'énergie cinétique donnée par l'équation ci-dessus montre que l'énergie mécanique ne se conserve pas au cours de ces chocs. Pratiquement, cette diminution d'énergie mécanique se manifeste par un échauffement de P. Un modèle plus fin du phénomène d'agrégation nécessite un traitement statistique, dans lequel on tiendrait compte d'une distribution des vitesses des objets avec lesquels P entre en contact et d'une distribution de leurs masses.

20 **1.a.** On désigne par N le projectile et C la cible. Le centre de masse de l'ensemble est tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{ON} + km\overrightarrow{OC}}{m + km} = \frac{\overrightarrow{ON} + k\overrightarrow{OC}}{k + 1}$$

On dérive cette relation dans le référentiel du laboratoire. Comme la vitesse de la cible y est nulle, on obtient $\overrightarrow{V_G} = \frac{\overrightarrow{V_0}}{k + 1}$, en désignant par $\overrightarrow{V_0}$ la vitesse du projectile dans le référentiel du laboratoire. La loi de composition des vitesses s'écrit : $\overrightarrow{V_N} = \overrightarrow{u_N} + \overrightarrow{V_G}$ pour le projectile et $\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{u_C} + \overrightarrow{V_G}$ pour la cible ; cela permet d'obtenir les vitesses dans R_{ba} avant le choc en fonction de $\overrightarrow{V_0}$ et k :

$$\overrightarrow{u_N} = \frac{k}{k + 1} \overrightarrow{V_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_C} = -\frac{1}{k + 1} \overrightarrow{V_0}$$

On vérifie que $\overrightarrow{u_N} + k\overrightarrow{u_C} = \overrightarrow{0}$, ce qui traduit le fait que la quantité de mouvement de l'ensemble est nulle dans le référentiel R_{ba} (conséquence immédiate de la définition du référentiel barycentrique). $\overrightarrow{V_G}$ reste constant, car le système $\{N, C\}$ peut être considéré comme isolé.

b. La nullité de la quantité de mouvement dans R_{ba} après le choc s'écrit :

$$m\overrightarrow{u}'_N + km\overrightarrow{u}'_C = \overrightarrow{0}, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{u}'_N = -k\overrightarrow{u}'_C$$

c. Le choc étant élastique, l'énergie cinétique du système $\{N, C\}$ se conserve au cours du choc (on vérifie facilement que c'est vrai dans les deux référentiels). On peut donc écrire, dans R_{ba} :

$$\frac{1}{2} m u_N^2 + \frac{1}{2} km u_C^2 = \frac{1}{2} m u_N'^2 + \frac{1}{2} km u_C'^2$$

La nullité de la quantité de mouvement dans R_{ba} permet d'exprimer u_C en fonction de u_N, puis u'_C en fonction de u'_N, si bien que l'on a :

$$u_N^2 + \frac{u_N^2}{k} = u_N'^2 + \frac{u_N'^2}{k}$$

d'où on tire l'égalité des normes des vecteurs vitesses du projectile avant et après le choc dans R_{ba} : $\|\overrightarrow{u_N}\| = \|\overrightarrow{u}'_N\|$. Les vitesses de la cible étant égales à celles du projectile divisé par k, on a évidemment aussi $\|\vec{u_c}\| = \|\overrightarrow{u}'_C\|$.

2.a. L'énergie cinétique du projectile après le choc, dans R_{lab} vaut :

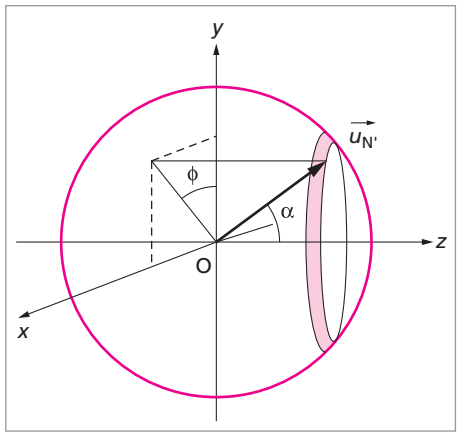
$$E'_C\left(N/R_{lab}\right) = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V}'^2_N = \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{u}'_N + \overrightarrow{V_G}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(u'^2_N + V_G^2 + 2u'_N.V_G\cos\alpha\right)$$

où α désigne l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}'_N$ et $\overrightarrow{V_G}$. Comme $\|\overrightarrow{u_N}\| = \|\overrightarrow{u}'_N\| = \dfrac{k}{k+1}V_0$ et $V_G = \dfrac{1}{k+1}V_0$, on peut écrire $E'_C\left(N/R_{lab}\right)$ en fonction de $E_0 = \dfrac{1}{2}mV_0^2$, de k et de α :

$$E'_C\left(N/R_{lab}\right) = E_0\frac{k^2 + 1 + 2k\cos\alpha}{(k+1)^2}$$

Il est facile de voir que $E'_C\left(N/R_{lab}\right)$ est toujours inférieur à E_0 (quel que soit $k > 0$).

b. Les vecteurs vitesse des projectiles pour un faisceau monocinétique sont tous égaux à $\overrightarrow{V_N}$. Il importe de réaliser que la direction dans laquelle particule et cible vont partir après le choc dans R_{ba} n'est pas déterminée ; cela revient à dire qu'il y a une infinité de manières d'assurer à la fois la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système $\{N, C\}$ en faisant varier l'angle α.



La figure ci-contre montre le repérage convenable du vecteur $\overrightarrow{u_N}'$: lorsqu'il balaie toutes les directions de l'espace, son extrémité se déplace sur une sphère de rayon k, avec α qui varie de 0 à π, et ϕ qui varie de 0 à 2π. Le problème étant invariant dans toute rotation autour de ϕ, on appelle $P(\alpha)$ la probabilité (par unité d'angle solide) pour que la direction du vecteur $\overrightarrow{u_N}'$ fasse un angle α avec l'axe Oz, c'est-à-dire soit comprise dans la corolle représentée sur le schéma, dont l'angle solide élémentaire vaut $d\Omega = 2\pi\sin\alpha d\alpha$. (Il est facile de retrouver un angle solide en se rappelant qu'il est égal à la surface définie sur la sphère, qui vaut ici le produit du périmètre $2\pi k\sin\alpha$ de la corolle par $k d\alpha$, divisée par le carré de son rayon, k^2).

La moyenne angulaire d'une grandeur scalaire $A(\alpha)$ dépendant de α et distribuée selon $P(\alpha)$ dans toutes les directions de l'espace s'écrit : $\langle A\rangle = \displaystyle\int_0^\pi P(\alpha)A(\alpha)2\pi\sin\alpha d\alpha$

$P(\alpha)$ obéit à la condition de normalisation $\displaystyle\int_0^\pi P(\alpha)2\pi\sin\alpha d\alpha = 1$.

Si la répartition est isotrope dans R_{ba}, $P(\alpha)$ est une constante et l'intégration de la condition de normalisation conduit à : $\int_0^{\pi} P(\alpha) 2\pi \sin\alpha d\alpha = 1$, donc $P(\alpha) = \dfrac{1}{4\pi}$.
Ainsi, la valeur moyenne de l'énergie cinétique du projectile après le choc s'écrit :

$$\langle E'_{\mathrm{C}}(\mathrm{N}/R_{\mathrm{lab}})\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} E'_{\mathrm{C}}(\mathrm{N}/R_{\mathrm{lab}})\sin\alpha d\alpha$$

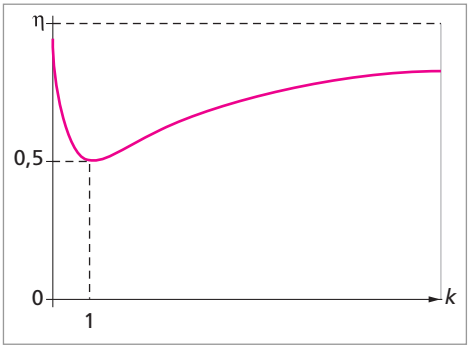
On a donc

$$\left\langle E'_{\mathrm{C}}\left(\mathrm{N}/R_{\mathrm{lab}}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} E_0 \frac{\left(k^2+1+2k\cos\alpha\right)}{(k+1)^2}\sin\alpha d\alpha$$

$$= \frac{E_0}{2(k+1)^2}\left[\int_0^{\pi}\left(k^2+1\right)\sin\alpha d\alpha + \int_0^{\pi} k\sin 2\alpha d\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle E'_{\mathrm{C}}\left(\mathrm{N}/R_{\mathrm{lab}}\right)\right\rangle = E_0\frac{k^2+1}{(k+1)^2}$$

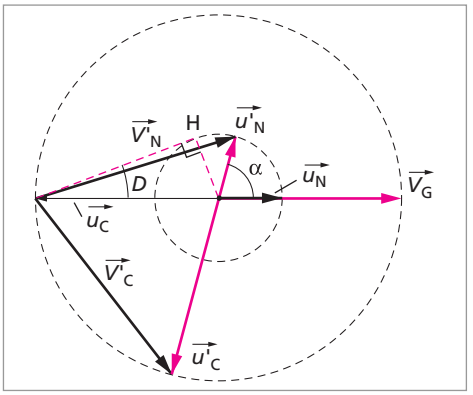
On peut définir le facteur d'efficacité du ralentissement par $\eta = \dfrac{k^2+1}{(k+1)^2}$. η est toujours inférieur à 1 et le ralentissement est d'autant plus efficace que η est faible. La figure ci-contre montre l'évolution de η avec k. Il tend vers 1 lorsque k tend vers 0, ce qui correspondrait à la collision avec une cible de masse nulle. L'étude des variations de η avec k montre que η a un minimum pour $k = 1$; cela correspond au modérateur le plus efficace, puisque l'énergie cinétique du projectile est divisée par 2 à chaque choc, et qu'il est impossible de faire mieux.



3. Il est utile de construire les vecteurs vitesse dans le référentiel du laboratoire R_{lab}, pour le projectile avant le choc, puis le projectile et de la cible après le choc en utilisant la loi de composition des vitesses :

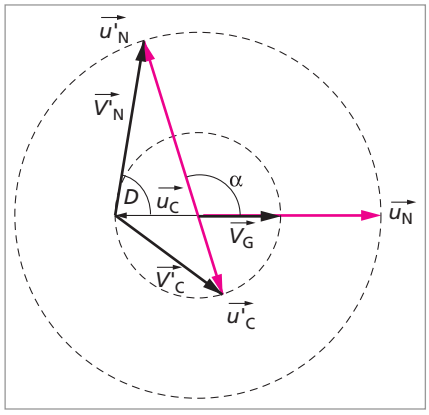
$$\overrightarrow{V_{\mathrm{N}}} = \overrightarrow{u_{\mathrm{N}}} + \overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}\overrightarrow{V'_{\mathrm{N}}}$$
$$= \overrightarrow{u'_{\mathrm{N}}} + \overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}\overrightarrow{V'_{\mathrm{C}}} = \overrightarrow{u'_{\mathrm{C}}} + \overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}$$

Le diagramme de collision est représenté sur la figure ci-contre. Lorsque α varie de 0 à 2π, l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{u}'_{\mathrm{N}}$ parcourt le petit cercle, de rayon k. Le diagramme de collision montre clairement que, si la cible est plus légère que le projectile, l'angle de déviation D entre la direction du faisceau incident et celle du projectile après le choc (celle



de $\overrightarrow{V}'_{\mathrm{N}}$), (mesuré dans le référentiel du laboratoire) est borné supérieurement. Cette borne est obtenue quand l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{u}'_{\mathrm{N}}$ atteint le point H (ou son symétrique par rapport à la direction du faisceau incident dans le plan du dessin). En clair, les projectiles déviés ont leurs directions contenues dans un cône d'angle au sommet D. Une relation de trigonométrie élémentaire dans le triangle rectangle en H conduit à $\sin(D_{\max}) = \dfrac{\|\overrightarrow{u}'_{\mathrm{N}}\|}{\|\overrightarrow{u}'_{\mathrm{C}}\|}$, c'est à dire $\sin(D_{\max}) = k$

4. Un examen du diagramme de collision représenté sur la figure ci-contre permet de se rendre compte qu'il n'existe pas d'angle de déviation limite lorsque $k > 1$: quand α varie de 0 à 2π, D varie aussi de 0 à 2π.



Après n chocs, l'énergie cinétique du neutron vaut : $E_{\mathrm{C}}^n = \eta^n E_0$. Dans le cas d'une thermalisation pour des réactions de fission sur l'uranium 235, un neutron est efficace pour une fission lorsque son énergie cinétique E_{C}^n est telle que $\dfrac{E_{\mathrm{C}}^n}{E_0} \approx \dfrac{0{,}05}{2 \cdot 10^6} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$. Le nombre de chocs nécessaires est $n = \dfrac{\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{E_{\mathrm{C}}^n}{E_0}\right)}{\ell\mathrm{n}\,\eta}$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de n et η pour différent modérateurs.

^{1}H	$k = 1$	$\eta = 0{,}5$	25 chocs
^{2}H (deutérium)	$k = 2$	$\eta \approx 0{,}55$	29 chocs
^{12}C	$k = 12$	$\eta \approx 0{,}857$	113 chocs
^{16}O	$k = 16$	$\eta \approx 0{,}889$	149 choc

Théoriquement, ^{1}H est le noyau le plus efficace pour ralentir les neutrons ; cependant, sa section efficace de capture des neutrons est élevée, ce qui conduit à utiliser de l'uranium enrichi (c'est le cas dans les filières de type PWR « pressurized water reactor » et BWR « boiling water reactor », où l'eau légère joue à la fois le rôle de modérateur et de fluide caloporteur). Le deutérium est un modérateur performant, puisqu'il est pratiquement aussi efficace que ^{1}H et a une section efficace de capture des neutrons faible, mais l'eau lourde coûte très cher. Enfin on remarque que le graphite est nettement moins performant comme modérateur (dans les filières graphite gaz, le modérateur est le graphite et le dioxyde de carbone est le fluide caloporteur).

21

1. La condition de roulement sans glissement se traduit par une relation entre la vitesse V de translation des roues par rapport au référentiel terrestre et leur vitesse de

rotation ω. Lorsqu'une roue tourne d'un angle α, son centre (dans le cas présent G) doit se déplacer d'une distance $d = \alpha R$ (α en radians). On vérifie que le signe est correct : si le véhicule se déplace vers la droite ($V > 0$), les roues tournent dans le sens des aiguilles d'une montre ($\omega > 0$). La dérivation de cette égalité conduit à la relation qui exprime la condition de roulement sans glissement :

$$V = R\omega.$$

La méthode la plus générale pour exprimer une relation de roulement sans glissement consiste à écrire que la vitesse du point géométrique de contact I_j de la roue j avec la route est nulle ; la composition des vitesses s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{\mathrm{I}_j}}(R_t) = \overrightarrow{V_{\mathrm{O}_j}}(R_t) + \overrightarrow{V_I}(R_{\mathrm{ba}}) = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\mathrm{IO}_j} \wedge \overrightarrow{\omega},$$

où on désigne par O_j le centre de la roue $j, j \in \{1,2\}$. Cela conduit à $V\overrightarrow{u_x} + R\overrightarrow{u_z} \wedge \omega\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{0}$, ce qui redonne évidemment $V = R\omega$.
L'énergie cinétique du système {Moto+Conducteur}, (noté S) est donnée par le théorème de Koenig :

$$E_{\mathrm{C}}(\mathrm{S}/R_t) = \frac{1}{2}MV_{\mathrm{G}}^2(R_t) + E_{\mathrm{C}}(R_{\mathrm{ba}})$$

où l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique lié à S (son origine est en G) est celle de rotation des roues sur elles-mêmes, $E_{\mathrm{C}}(R_{\mathrm{ba}}) = 2\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$, et où on désigne par J le moment d'inertie d'une roue par rapport à son axe de rotation. Pour un anneau de rayon R, de masse m, on a $J = mR^2$, si bien que $E_{\mathrm{C}}(R_{\mathrm{ba}}) = mR^2\omega^2 = mV^2$ compte tenu de la condition de roulement sans glissement. Il vient en définitive :

$$E_{\mathrm{C}}(\mathrm{S}/R_t) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)V^2.$$

La quantité de mouvement de la moto est la même que celle d'un point matériel doté de sa masse totale, en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}(R_t)$:

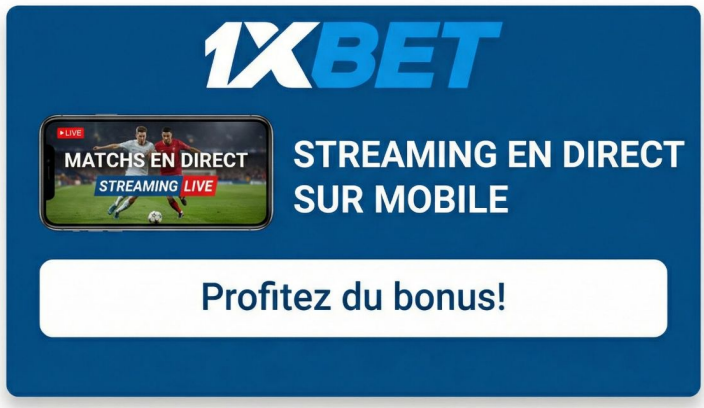
$$\overrightarrow{p}(\mathrm{S}/R_t) = M\overrightarrow{V}$$

Le moment cinétique en G de la moto est le même dans R_t et dans R_{ba}. Dans le référentiel barycentrique, les seules parties en mouvement sont les roues. Le théorème de Koenig pour le moment cinétique s'écrit pour une roue O_j :

$$\overrightarrow{\sigma}_{\mathrm{G}}(\mathrm{roue}/R_{\mathrm{ba}}) = \overrightarrow{\sigma}_{\mathrm{O}_j}(\mathrm{roue}/R'_{\mathrm{ba}}) + \overrightarrow{\mathrm{GO}_j} \wedge m\overrightarrow{v}(\mathrm{O}_j/R_{\mathrm{ba}})$$

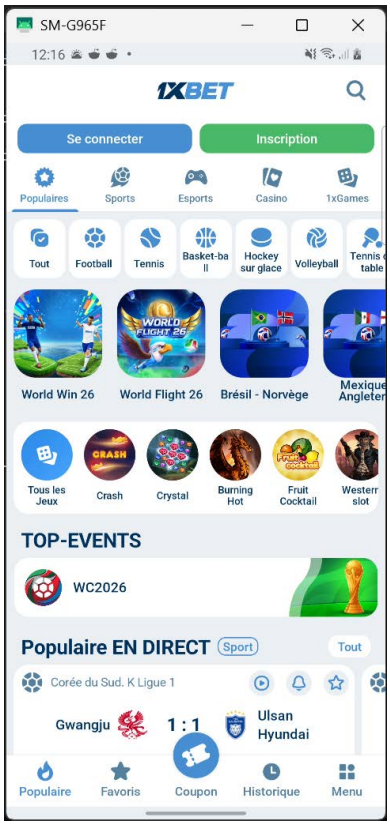
par rapport à la formulation originelle de ce théorème, on doit prendre garde au fait que c'est O_j le centre d'inertie de la roue j ; on désigne donc par R'_{ba} le référentiel barycentrique attaché à une roue (il ne diffère de R_{ba} que par son origine). Cette relation exprime que le moment cinétique en G de la roue est la somme de deux contributions : la première est due à la rotation de la roue sur elle même, la seconde au mouvement de rotation du centre d'inertie de la roue autour de G. Le second terme de l'égalité est nul, puisque la roue est

ÉTAPES D'INSCRIPTION
pour voir comment creer un compte

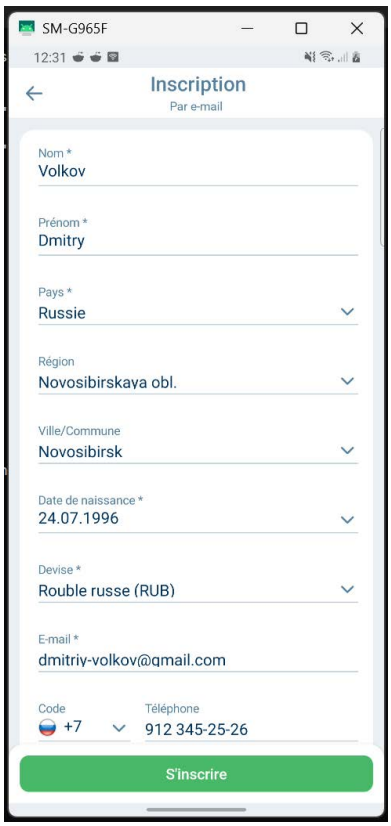

1XBET
MATCHS EN DIRECT
STREAMING LIVE
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!

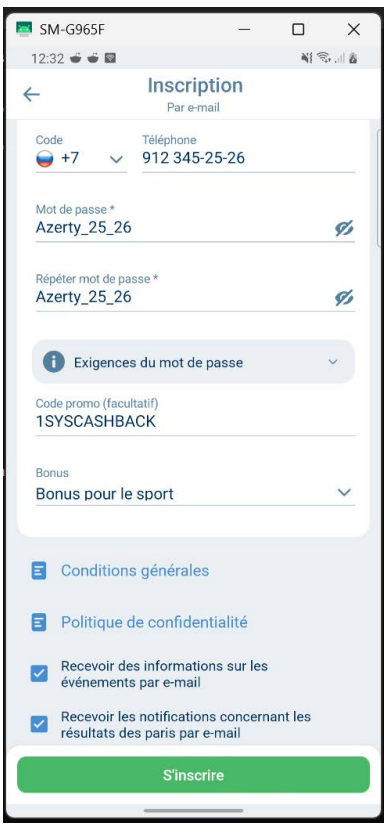
CODE PROMO
1SYSCASHBACK

UTILISATEUR VIP: D. VOLKOV - COMPTE PRO
12:36
SOLDE PRO: 147 500 ₽
1XBET PRO
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
TOP-EVENTS
WC2026
COMPTE AFFILIÉ CERTIFIÉ - ACCÈS ÉLITE
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Wimbledon, 1/8 de finale
1er set
Jeu 1 Score
Roman Safiullin (Q)
Novak Djokovic (7)
1X2
PRO
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:16
1XBET
Se connecter
Inscription
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
TOP-EVENTS
WC2026
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Corée du Sud. K Ligue 1
Gwangju 1 : 1 Ulsan Hyundai
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu

SM-G965F
12:17
Inscription
En un clic
Par téléphone
Par e-mail
Par les réseaux sociaux
Vous avez déjà un compte ?
Se connecter


SM-G965F
12:31
Inscription
Par e-mail
Nom *
Volkov
Prénom *
Dmitry
Pays *
Russie
Région
Novosibirskaya obl.
Ville/Commune
Novosibirsk
Date de naissance *
24.07.1996
Devise *
Rouble russe (RUB)
E-mail *
dmitriy-volkov@gmail.com
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
S'inscrire


SM-G965F
12:32
Inscription
Par e-mail
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
Mot de passe *
Azerty_25_26
Répéter mot de passe *
Azerty_25_26
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
Recevoir des informations sur les événements par e-mail
Recevoir les notifications concernant les résultats des paris par e-mail
S'inscrire

fixe par rapport à G (approximation de la moto rigide). Compte tenu de la condition de roulement sans glissement :

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) = 2J\omega\vec{u_y} = 2mRV\vec{u_y}$$

2. Il est commode d'écrire le théorème de l'énergie cinétique sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{C}}(\mathrm{S}/R_t)}{\mathrm{d}t} = P(\vec{\Gamma}),$$

où $P(\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\omega}$ désigne la puissance du couple moteur appliqué à la roue arrière. Il vient : $2V\left(\frac{1}{2}M + m\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \Gamma\frac{V}{R}$, d'où on tire l'accélération du centre d'inertie de la moto : $a = \dfrac{\Gamma}{(M+2m)R}$.

3. On adopte des notations algébriques pour T_1, T_2, N_1 et N_2, bien que ces deux dernières soient a priori positives.

a. Théorème du moment cinétique pour une roue :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{0_j}(\text{roue})}{\mathrm{d}t} = \sum\overrightarrow{M_{\mathrm{O}_j}}(\vec{F})$$

avec $\vec{\sigma}_{0_j}(\text{roue}) = mRV\vec{u_y}$.
Le système {Roue avant} subit son poids et la résultante des actions de contact sur l'axe, de moments nuls en O_2, ainsi que $\vec{T_2}$ et $\vec{N_2}$. Il vient donc :

$$mR\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{u_y} = \overrightarrow{\mathrm{O}_2I_2}\wedge T_2\vec{u_x} = -RT_2\vec{u_y}$$

de sorte que $T_2 = -ma$
Le système {Roue arrière} subit son poids de moment nul en O_1, la résultante des actions de contact sur l'axe, de couple $\vec{\Gamma}$, ainsi que $\vec{T_1}$ et $\vec{N_1}$. Le théorème du moment cinétique conduit donc à :

$$mR\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{u_y} = \overrightarrow{\mathrm{O}_1I_1}\wedge T_1\vec{u_x} + \Gamma\vec{u_y} = -RT_1\vec{u_y} + \Gamma\vec{u_y}$$

d'où on tire la relation

$$T_1 = -ma + \frac{\Gamma}{R}$$

b. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à S s'écrit :

$$\vec{T_1} + \vec{N_1} + \vec{T_2} + \vec{N_2} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

L'accélération étant dirigée selon $\vec{u_x}$, la projection de cette relation donne :

$$N_1 + N_2 = Mg \qquad \text{et} \qquad T_1 + T_2 = Ma$$

La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe Ox et les relations du **a.** permettent de retrouver l'expression de l'accélération donnée par le théorème de l'énergie cinétique.

Les réactions tangentielles s'expriment alors facilement en fonction du couple moteur Γ, du rayon des roues, de m et de M.

$$T_2 = -\frac{m}{(M+2m)}\frac{\Gamma}{R} \qquad \text{et} \qquad T_1 = \frac{M+m}{(M+2m)}\frac{\Gamma}{R}$$

On notera que T_2 est négatif et T_1 positif.

c. Théorème du moment cinétique pour S :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{M_{\mathrm{G}}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathrm{GI}_1} \wedge (\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{N_1}) + \overrightarrow{\mathrm{GI}_2} \wedge (\overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{N_2})$$

$$2mRa\overrightarrow{u_y} = (-D\overrightarrow{u_x} - h\overrightarrow{u_z}) \wedge (T_1\overrightarrow{u_x} + N_1\overrightarrow{u_z}) + (D\overrightarrow{u_x} - h\overrightarrow{u_z}) \wedge (T_2\overrightarrow{u_x} + N_2\overrightarrow{u_z})$$

$$2mRa = D(N_1 - N_2) - h(T_1 + T_2)$$

Ce résultat permet de calculer les composantes normales des actions de contact, compte tenu des égalités issues de la relation fondamentale de la dynamique :

$$N_1 + N_2 = Mg \qquad \text{et} \qquad T_1 + T_2 = Ma.$$

On a :

$$\begin{cases} (2mR + Mh)a = D(N_1 - N_2) \\ Mg = N_1 + N_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{(Mh + 2mR)}{2RD(M+2m)}\Gamma \\ N_2 = \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{(Mh + 2mR)}{2RD(M+2m)}\Gamma \end{cases}$$

La différence entre N_1 et N_2 est directement proportionnelle au couple moteur Γ et à un facteur de forme (inverse d'une longueur) $\alpha = \dfrac{(Mh + 2mR)}{2RD(M+2m)}$ qui ne dépend que de la géométrie de la moto et des masses. N_2 ne pouvant pas devenir négatif, le cas où $N_2 = 0$ correspond à la limite où la roue avant décolle. Cette situation s'observe lorsqu'on démarre « brutalement » à savoir si le couple moteur est tel que $\Gamma \geqslant \dfrac{Mg}{2\alpha}$, la condition de non glissement restant évidemment réalisée.

4.a. La roue arrière ne patinera pas tant que la condition de glissement n'est pas réalisée, c'est-à-dire, d'après les lois de Coulomb :

$$\|\overrightarrow{T_1}\| < f_0 \|\overrightarrow{N_1}\|$$

soit :

$$\frac{M+m}{(M+2m)}\frac{\Gamma}{R} < f_0\left(\frac{Mg}{2} + \Gamma\alpha\right)$$

ce qu'on peut réécrire :

$$\frac{\Gamma}{(M+2m)R}\left(M + m - f_0\frac{2mR + hM}{2D}\right) < f_0\frac{Mg}{2}$$

En posant $f_{\mathrm{S}} = \dfrac{2(M+m)D}{(Mh + 2mR)}$, deux cas se présentent :

– Si $f_0 > f_{\mathrm{S}}$, la condition de non glissement est toujours vérifiée, puisque le terme de gauche est négatif. Toutes choses égales par ailleurs, cette condition est d'autant plus aisément satisfaite que le frottement entre le sol et les pneus est important.

– Si $f_0 < f_S$, la condition de non glissement conduit à :

$$\frac{2(M+m)D - f_0(Mh+2mR)}{2(M+2m)D}\frac{\Gamma}{R} < f_0\frac{Mg}{2}$$

Donc, si le coefficient de frottement est inférieur au seuil, le couple moteur doit être borné supérieurement pour qu'il n'y ait pas de patinage :

$$\Gamma < \frac{Mg}{2}\frac{2RDf_0(M+2m)}{2D(M+m) - f_0(2mR+Mh)}$$

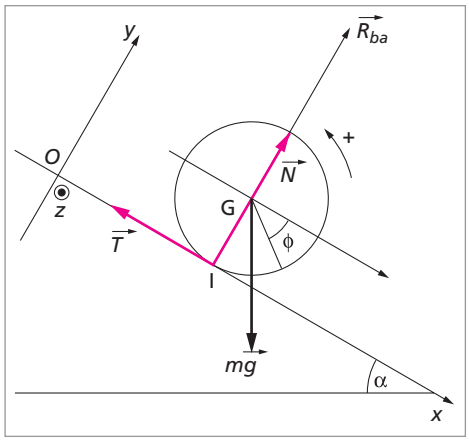
b. Il est ainsi bien connu que lorsque f_0 est très faible, par exemple sur une route verglacée, il faut éviter de conduire en première, car c'est en première que le couple Γ est le plus élevé, donc le risque de patinage maximal.

22 **1.** La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la bille s'écrit, dans le référentiel galiléen R_g, $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}_G$ où $\vec{a}_G$ désigne l'accélération du centre d'inertie de la bille ; sa projection sur les axes parallèle et perpendiculaire à la ligne de plus grande pente du plan incliné conduit aux deux relations :

$$N = mg\cos\alpha$$

et

$$m\frac{d^2x_G}{dt^2} = mg\sin\alpha + \overline{T}$$



où $\overline{T}$ est algébrique. Le théorème du moment cinétique en G s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \sum \overrightarrow{M_G}(\vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{M_G}(\vec{T}) = \overrightarrow{GI} \wedge \vec{T}$$

En l'absence de pivotement, le mouvement de la bille dans le référentiel barycentrique est une rotation autour d'un axe passant par G et parallèle à Oz, de sorte que $\vec{\sigma}_G = J_{\Delta_G}\vec{\omega} = \frac{2}{5}mr^2\omega\vec{u}_z$. Le théorème du moment cinétique conduit donc à une troisième relation :

$$\frac{2}{5}mr\frac{d\omega}{dt} = \overline{T}$$

2.a. La condition de roulement sans glissement impose à la vitesse du point de contact I de la bille avec le plan incliné d'être nulle. Compte tenu de la composition des vitesses :

$$\vec{V}_I(R_g) = \vec{V}_G(R_g) + \vec{V}_I(R_{ba}) = \vec{V}_G + \overrightarrow{IG} \wedge \vec{\omega}$$

soit $\frac{dx_G}{dt} = -r\omega$. On vérifie que le signe est correct : si la bille descend la pente $\frac{dx_G}{dt}$ est positif et elle doit alors tourner sur elle-même dans le sens négatif (celui des aiguilles d'une montre sur le schéma) ce qui se traduit par $\omega < 0$.

b. Compte tenu de la condition de roulement sans glissement, le théorème du moment cinétique permet d'écrire :

$$\overline{T} = -\frac{2}{5}m\frac{d^2x_G}{dt^2}.$$

En reportant cette expression de $\overline{T}$ dans la relation fondamentale de la dynamique, on obtient $m\frac{d^2x_G}{dt^2} = mg\sin\alpha - \frac{2}{5}m\frac{d^2x_G}{dt^2}$, ce qui donne

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

Dans ces conditions, le mouvement du centre d'inertie de la bille est rectiligne uniformément varié, d'accélération inférieure à celle qu'aurait un point matériel sur le même plan incliné ; on notera qu'il ne dépend ni de la masse ni du rayon de la bille.

c. On en déduit la valeur de la composante tangentielle de la réaction du support :

$$\overline{T} = -\frac{2}{7}mg\sin\alpha\ ;$$

on a par ailleurs trouvé que $N = mg\cos\alpha$. Les lois de Coulomb du frottement imposent que $\frac{\|\overrightarrow{T}\|}{\|\overrightarrow{N}\|} < f$ pour qu'il n'y ait pas glissement, ce qui conduit à

$$\frac{2}{7}\tan\alpha < f.$$

En clair, le roulement sans glissement n'est possible que si l'angle α est inférieur à la valeur limite

$$\alpha_l = \arctan\left(\frac{7}{2}f\right).$$

d. Si la vitesse de G et sa position sont nulles à $t = 0$, l'équation horaire de son mouvement est :

$$x_G = \frac{5}{14}g\sin\alpha.t^2$$

L'énergie cinétique de la bille est donnée par le théorème de Koenig

$$E_C(R_g) = \frac{1}{2}MV_G^2 + E_C(R_{ba}),$$

où $E_C(R_{ba}) = \frac{1}{2}J_{\Delta_G}\omega^2$. Dans le cas du roulement sans glissement, $\frac{dx_G}{dt} = -r\omega$ permet d'écrire :

$$E_C(R) = \frac{7}{10}mV_G^2.$$

La différence d'énergie cinétique entre $t = 0$ et t vaut $\Delta E_C = \frac{7}{10}mV_G^2$.

Le travail du poids pendant ce temps vaut $W_{0\to t}(m\vec{g}) = mgh_G$, où h_G désigne la différence d'altitude de G entre ces deux instants (h_G est positif puisque la bille descend ; le travail du poids est moteur) ; ainsi $W_{0\to t}(m\vec{g}) = mgx_G \sin\alpha = mg\dfrac{5}{14}g\sin\alpha t^2$ où $V_G = \dfrac{5}{7}g\sin\alpha.t$ conduit à $W_{0\to t}(m\vec{g}) = \dfrac{7}{10}mV_G^2$. On a donc $\Delta E_C = W_{0\to t}(m\vec{g})$; puisque $\vec{N}$ ne travaille pas, on retrouve ainsi que la réaction tangentielle $\vec{T}$ ne travaille pas. En effet, la puissance de $\vec{T}$ est $P(\vec{T}) = \vec{T}.\vec{V_I}(R)$; dans le cas du roulement sans glissement elle est nulle à tout instant car $\vec{V_I}(R) = \vec{0}, \forall t$. L'énergie mécanique de la bille est donc conservative.

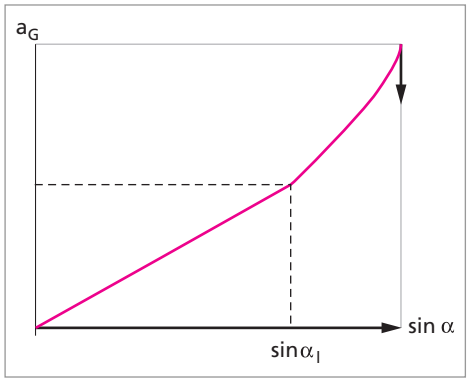
3. On reprend les trois égalités données par la relation fondamentale de la dynamique et le théorème du moment cinétique. Dans le cas le plus général, on a :

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha \\ m\dfrac{d^2x_G}{dt^2} = mg\sin\alpha + \overline{T} \\ \dfrac{2}{5}mr\dfrac{d\omega}{dt} = \overline{T} \end{cases}$$

Lorsque le glissement apparaît, on a $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, ce qui donne :

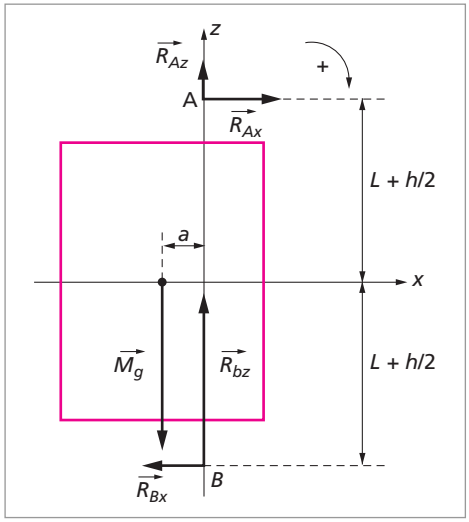
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_G}{dt^2} = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) \\ r\dfrac{d^2\phi}{dt^2} = -\dfrac{5}{2}fg\cos\alpha \end{cases}$$

Pour la vitesse de glissement positive ($\overline{T} < 0$), on trace le graphe ci-dessus.



23 **1.** On se place dans le référentiel $Oxyz$, qui est galiléen si le système ne tourne pas.

Le système étant soumis aux trois forces $M\vec{g}$, $\vec{R_A}$, $\vec{R_B}$ une condition nécessaire de son équilibre est que ces forces soient coplanaires et concourantes. Il est judicieux de décomposer $\vec{R_A}$ et $\vec{R_B}$ selon l'axe vertical Oz et selon Ox. On travaille avec des notations algébriques, c'est-à-dire que $R_{Ax}, R_{Bx}, R_{Az}, R_{Bz}$ sont les projections des forces affectées du signe convenable.



– Condition de non translation :

$$\mathrm{M}\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_\mathrm{A}} + \overrightarrow{R_\mathrm{B}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{cases} R_{\mathrm{A}x} + R_{\mathrm{B}x} = 0 \\ R_{\mathrm{A}z} + R_{\mathrm{B}z} = \mathrm{M}g \end{cases}, \text{ avec } g > 0$$

– Condition de non rotation : on peut appliquer le théorème des moments en n'importe quelle point (A,B ou G). Comme on cherche à déterminer les composantes des réactions, on choisit un point où leurs moments ne soient pas nuls, c'est-à-dire G. On écrit alors que la somme des moments scalaires de toutes les forces par rapport à un axe Δ_G **normal au plan de figure et passant par G** est nulle :

$$M_{\Delta_\mathrm{G}}(\overrightarrow{R_\mathrm{A}}) + M_{\Delta_\mathrm{G}}(\overrightarrow{R_\mathrm{B}}) + M_{\Delta_\mathrm{G}}(\mathrm{M}\overrightarrow{g}) = 0$$

Comme dans ces conditions, le moment de chaque composante est égal au produit de la valeur de la force par son bras de levier par rapport à l'axe, affecté du signe convenable, on a :

$$R_{\mathrm{A}x}\left(L + \frac{h}{2}\right) - R_{\mathrm{B}x}\left(L + \frac{h}{2}\right) - R_{\mathrm{B}z}a - R_{\mathrm{A}z}a = 0$$

Les forces qui tendent à faire tourner le système dans le sens positif par rapport à Δ_G ont un moment positif. Cela signifie que, **si** $R_{\mathrm{A}x}$, $R_{\mathrm{B}x}$, $R_{\mathrm{A}z}$, $R_{\mathrm{B}z}$ **sont positives**, alors $R_{\mathrm{A}x}$ tend à faire tourner dans le sens positif, $R_{\mathrm{A}z}$, $R_{\mathrm{B}z}$ et $R_{\mathrm{B}x}$ dans le sens négatif ; cette dernière composante ayant intuitivement été schématisée comme étant négative, on vérifie qu'elle tend bien à faire tourner le système dans le sens positif.

On réécrit cette dernière condition $(R_{\mathrm{A}x} - R_{\mathrm{B}x})\left(L + \frac{h}{2}\right) = (R_{\mathrm{B}z} + R_{\mathrm{A}z})\,a$ ce qui, compte tenu de la condition de non translation, conduit à : $2R_{\mathrm{A}x}\left(L + \frac{h}{2}\right) = Mga$.

$$R_{\mathrm{A}x} = -R_{\mathrm{B}x} = \frac{Mga}{(2L + h)}$$

Le système d'équations ne permet pas mathématiquement de calculer $R_{\mathrm{A}z}$ et $R_{\mathrm{B}z}$. Mais un argument physique, à savoir le fait que le système repose en B, permet de lever l'indétermination et de conclure que $R_{\mathrm{B}z} = Mg$ et $R_{\mathrm{A}z} = 0$

2. On se place dans le référentiel tournant O*xyz*. Le solide y est en équilibre sous l'effet de $M\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{R_\mathrm{A}}$, $\overrightarrow{R_\mathrm{B}}$, et de la résultante $\overrightarrow{F_{ie}}$ des forces d'inerties d'entraînement qu'il subit. Le cylindre étant homogène, $\overrightarrow{F_{ie}}$ a la même valeur que la force que subirait un point matériel de masse *M*, se trouvant en G, et tournant à la vitesse angulaire ω, soit $\overrightarrow{F_{ie}} = -M\omega^2 a\overrightarrow{u_x}$. La projection de la condition de non translation dans le référentiel tournant conduit à :

$$\begin{cases} R_{\mathrm{A}x} + R_{\mathrm{B}x} = M\omega^2 \mathrm{a} \\ R_{\mathrm{A}z} + R_{\mathrm{B}z} = Mg \end{cases}$$

La condition de non rotation reste inchangée, puisque le moment de $\overrightarrow{F_{ie}}$ par rapport à tout axe passant par G est nul :

$$(R_{Ax} - R_{Bx})\left(L + \frac{h}{2}\right) = (R_{Bz} + R_{Az})\,a$$

$$\left(M\omega^2 a - 2R_{Bx}\right)\left(L + \frac{h}{2}\right) = Mga \Rightarrow R_{Bx} = -\frac{Mga}{(2L + h)} + \frac{M\omega^2 a}{2}$$

$$R_{Ax} = \frac{Mga}{(2L + h)} + \frac{M\omega^2 a}{2}$$

$$R_{Bz} = Mg \qquad \text{et} \qquad R_{Az} = 0$$

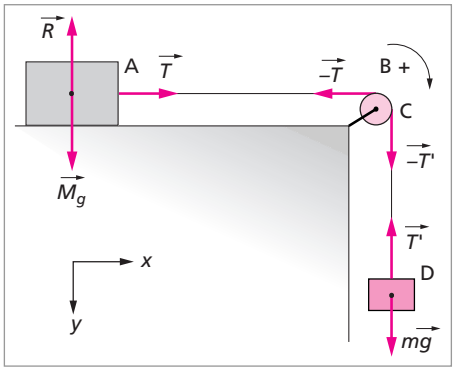
Pour le cylindre décrit, $M = \rho\pi R^2 h = 2\,400$ kg, et une vitesse angulaire $\omega = 314$ rd.s^{-1}, on a $R_{Ax} \approx R_{Bx} \approx 12\,130$ N pour un écart de centrage de 0,1 mm sur un rayon de 300 mm. Pour des pièces tournant à grande vitesse, le moindre défaut de centrage peut se traduire par des forces gigantesques sur les paliers de roulement ; ce problème est important du point de vue de la sécurité d'un atelier, puisque l'usure peut conduire à leur rupture.

24 La relation fondamentale de la dynamique appliquée au sous système constitué du solide S_1 de masse M s'écrit :

$$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} + M\overrightarrow{g} = M\overrightarrow{a_1},$$

ce qui donne en projection $R = Mg$ et $\overrightarrow{a_1} = \dfrac{T}{M}\overrightarrow{u_x}$, en utilisant des notations arithmétiques (g, R et T sont positifs).

Pour le solide S_2 de masse m, on a de même :



$$\overrightarrow{T}' + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a_2}, \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{a_2} = \left(g - \frac{T'}{m}\right)\overrightarrow{u_y}.(T' > 0).$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie s'écrit sous sa forme scalaire : $J\ddot{\theta} = (T' - T)r$, avec le sens conventionnel positif indiqué sur le schéma. C'est parce que les brins de fil AB et CD sont inextensibles (et toujours tendus) que les tensions des fils en A et B sont opposées (respectivement en C et D).

Comme le déplacement horizontal du point A a la même valeur que celui (vertical) du point D, les valeurs des accélérations des deux masses sont égales : $a_1 = a_2$.

Par ailleurs, le fil ne glissant pas sur la poulie, lorsqu'elle tourne d'un angle θ, A (et D) se déplacent de $r\theta$, de sorte que l'on a $a_1 = a_2 = r\ddot{\theta}$.

En réécrivant la relation associée au théorème du moment cinétique dans laquelle on élimine T , T' et $\ddot{\theta}$, il vient :

$$J\frac{a_1}{r} = (mg - ma_2 - Ma_1)r \qquad \text{d'où on tire} \qquad a_1 = a_2 = \frac{m}{m + M + \dfrac{J}{r^2}}g$$

Le système S constitué des deux solides de masses M et m et de la poulie est déformable ; les forces extérieures qu'il subit sont $\vec{R}, M\vec{g}$ et $m\vec{g}$. Les fils étant inextensibles, le travail des forces intérieures $\vec{T}, -\vec{T}, \vec{T}', -\vec{T}'$ est nul. De plus les liaisons avec l'extérieur $\vec{R}$ ne travaillent jamais, et les poids dérivent d'une énergie potentielle. L'énergie mécanique de S est donc conservative.

Son énergie cinétique totale à un instant donné est :

$$E_C = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{J}{r^2}\right)V^2$$

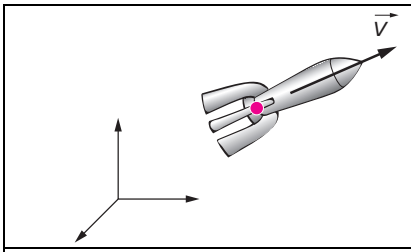
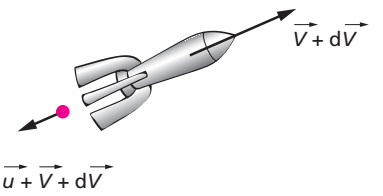
où V est la vitesse de l'une des masses et $\omega = \dot{\theta} = \frac{V}{r}$.

L'énergie potentielle associée aux forces extérieures est $E_p = -mgy + C^{te}$, (où *(-y)* repère l'altitude du centre de gravité de la masse m, avec $V = \frac{dy}{dt}$).

L'énergie mécanique est : $E_m = \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{J}{r^2}\right)V^2 - mgy + \text{Cte}$

La conservation de l'énergie mécanique $\frac{dE_m}{dt} = 0$ donne immédiatement la valeur $a_1 = a_2 = \frac{dV}{dt}$ trouvée par la méthode dynamique.

25 1.

<table>
<tr>
<td> 
</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>Référentiel terrestre (supposé galiléen)
Instant t
$m(t)$ est la masse totale de la fusée en translation à la vitesse $\vec{V}(t)$. Le vecteur quantité de mouvement est
$\vec{p}(t) = m(t)\vec{V}(t)$</td>
<td>Instant $t + dt$
Le système étudié à l'instant t est maintenant constitué de deux parties :
a) Fusée de masse $m(t) + dm$ en translation à la vitesse $\vec{V}(t) + d\vec{V}$. De vecteur quantité de mouvement
$\vec{p_f} = (m(t) + dm)\left(\vec{V}(t) + d\vec{V}\right)$
b) Gaz éjectés, de masse $-dm > 0$, de vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée, donc $\vec{u} + \vec{V}(t) + d\vec{V}$ par rapport à la terre, de quantité de mouvement :
$\vec{p_{gaz}} = -dm\left(\vec{u} + \vec{V}(t) + d\vec{V}\right)$
On a donc :
$\vec{p}(t + dt) = m(t)\vec{V}(t) + md\vec{V} - \vec{u}dm$</td>
</tr>
</table>

Remarque : écrire que la vitesse des gaz éjectés est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{V}(t)$ et non $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{V}(t) + \mathrm{d}\overrightarrow{V}$ revient à négliger un terme du second ordre (en $\mathrm{d}m\mathrm{d}\overrightarrow{V}$ dans $\overrightarrow{p_{\text{gaz}}}$). Cela est naturellement cohérent avec le fait de négliger le terme du second ordre dans $\overrightarrow{p_f}$.

$$\overrightarrow{p}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{p}(t) = m\mathrm{d}\overrightarrow{V} - \overrightarrow{u}\mathrm{d}m \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}\right) = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t} - \overrightarrow{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans R_t $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{f}_e$, où $\vec{f}_e$ désigne la résultante des forces extérieures subies par la fusée ; On a donc :

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}_e - \overrightarrow{u}D$$

où le débit des gaz éjectés est $D = -\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > 0$. $\overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{u}D$ peut être interprété comme une force dirigée en sens inverse de la vitesse d'éjection du gaz (propulsion dite « par réaction ») appelée poussée.

2. Condition de décollage : la fusée, placée sur le pas de tir, est soumise à la résultante des actions de contact $\overrightarrow{R}$ et à son poids $\overrightarrow{P} = (M + m_0)\overrightarrow{g}$, où m_0 désigne la masse initiale de propergol (combustible).
À $t = 0$, le réacteur est mis en marche et l'on a :

$$(M + m_0)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} - \overrightarrow{u}D.$$

En projection sur l'axe vertical Oz, cela conduit à :

$$(M + m_0)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - (M + m_0)g + uD,$$

où u, R et g sont notés arithmétiquement. La fusée décolle si $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} > 0$, avec $R \to 0$. Cela n'est possible que si la poussée initiale est supérieure au poids initial, c'est-à-dire si $uD > (M + m_0)g$.

3. La fusée se déplaçant verticalement, la relation fondamentale de la dynamique à l'instant t s'écrit, en projection selon Oz :

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -mg - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

Si le débit est constant pendant la totalité de la phase de combustion du propergol, on a $m(t) = M + m_0 - Dt$. Tout le propergol est donc consommé à l'instant $t_f = \dfrac{m_0}{D}$.
Comme m dépend du temps, on sépare les variables pour intégrer l'équation entre $t = 0$ et $t \leqslant t_f$:

$$\mathrm{d}V = -g\mathrm{d}t - u\frac{\mathrm{d}m}{m} \Rightarrow V(t) = -gt - u\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{M + m_0 - Dt}{M + m_0}\right)$$

La vitesse finale est alors :

$$V_f = -g\frac{m_0}{D} + u\,\ell\mathrm{n}\left(1 + \frac{m_0}{M}\right)$$

La condition de décollage étant réalisée, V_f augmente avec m_0 (toutes choses égales par ailleurs).

V_f augmente linéairement avec la vitesse d'éjection des gaz, et ce d'autant plus rapidement que la masse de propergol embarquée est élevée devant la masse de la structure.

V_f augmente avec le débit d'éjection D.

L'évolution de z avec t peut se calculer analytiquement en intégrant l'expression de $V(t)$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t \left(-gt' - u\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{M + m_0 - Dt'}{M + m_0}\right)\right)\mathrm{d}t' \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 - u\int_0^t \ell\mathrm{n}\left(1 - \frac{D}{M + m_0}t'\right)\mathrm{d}t' \end{aligned}$$

La seconde intégrale se calcule facilement en posant $X = 1 - \dfrac{D}{M + m_0}t'$

$$\begin{aligned} \int_0^t \ell\mathrm{n}\left(1 - \frac{D}{M + m_0}t'\right)\mathrm{d}t' &= -\frac{M + m_0}{D}\int_1^{\left(1 - \frac{D}{M+m_0}t\right)} \ell\mathrm{n}\,X\mathrm{d}X \\ &= -\frac{M + m_0}{D}\left[X\,\ell\mathrm{n}\,X - X\right]_1^{\left(1 - \frac{D}{M+m_0}t\right)} \end{aligned}$$

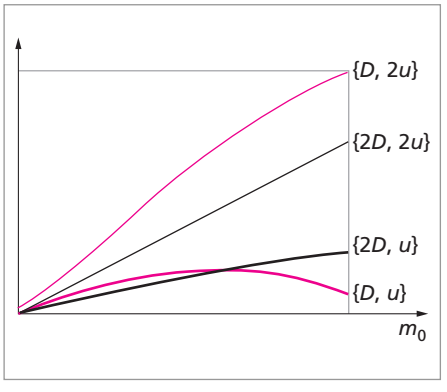
L'altitude maximale atteinte est obtenue pour $t = t_f = \dfrac{m_0}{D}$, soit

$$z_f = -\frac{1}{2}g\left(\frac{m_0}{D}\right)^2 + u\frac{M + m_\mathrm{O}}{D}\left[\frac{M}{M + m_0}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{M}{M + m_0}\right) - \frac{M}{M + m_0} + 1\right]$$

$$z_f = -\frac{1}{2}g\left(\frac{m_0}{D}\right)^2 + \frac{u}{D}\left(M\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{M}{M + m_0}\right) + m_0\right)$$

On peut affirmer que, toutes choses égales par ailleurs, z_f augmente avec la vitesse d'éjection des gaz.

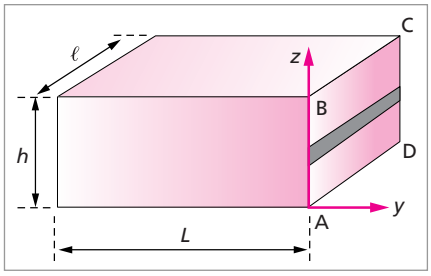
En revanche, z_f n'est pas une fonction monotone croissante de la masse de carburant embarqué (cette dernière est d'ailleurs bornée par la condition de décollage). Les courbes de la figure ci-contre montrent l'évolution de z_f en fonction de la masse m_0 de propergol embarqué, lorsque u et D évoluent pour m_0 variant de $M/2$ à $8M$.



Pour le réacteur de poussée la plus faible ($\{D, u\}$), emporter trop de propergol devient contre performant, dès que $m_0 > 5M$, puisque z_f décroît avec m_0.

Un réacteur de poussée double sera moins performant (jusqu'à environ 5M) si l'augmentation de poussée n'est obtenue qu'en doublant le débit, mais beaucoup plus performant si elle est obtenue en doublant la vitesse d'éjection.
Enfin le réacteur de poussée quadruple n'est pas forcément plus efficace.
Une optimisation de la fusée met en jeu des effets compétitifs dont rendent compte les termes qui entrent dans l'expression de z_f. Ainsi, une augmentation du débit n'est pas toujours favorable, car la phase de poussée dure ainsi moins longtemps. L'optimisation d'un réacteur de poussée et de vitesse d'éjection fixée consiste à choisir la masse de propergol à embarquer de manière à se placer au maximum de la courbe donnant z_f en fonction de m_0.

26 1. Mur rectangulaire



La relation fondamentale de l'hydrostatique s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho\,\vec{g}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, P la pression en un point du fluide et $\vec{g}$ le champ de pesanteur. Le fluide étant homogène, et le champ de pesanteur uniforme, cette relation s'intègre en $P(z) = P_a + \rho g(h - z)$, où P_a désigne la pression atmosphérique. On vérifie que la pression augmente lorsque l'on s'enfonce dans l'eau (z diminue). Seul le second terme entre en ligne de compte dans le calcul des forces de pression dues à l'eau du barrage, car le premier est compensé par la pression atmosphérique subie par la partie droite du mur.
Le morceau de mur hachuré sur le schéma, de largeur l, et de hauteur dz subit une force pressante élémentaire, normale à l'élément de surface,

$$d\vec{F} = \rho g(h - z)\mathrm{d}S\vec{u_y} = \rho g(h - z)l\mathrm{d}z\vec{u_y}.$$

Le mur délimité par les points $ABCD$ subit donc une force totale :

$$\vec{F} = \int_0^h \rho g l(h - z)\mathrm{d}z\vec{u_y} = \rho g l\frac{h^2}{2}\vec{u_y}$$

On retiendra que cette force ne dépend pas de la longueur L de la retenue d'eau et qu'elle croît comme le carré de la profondeur.

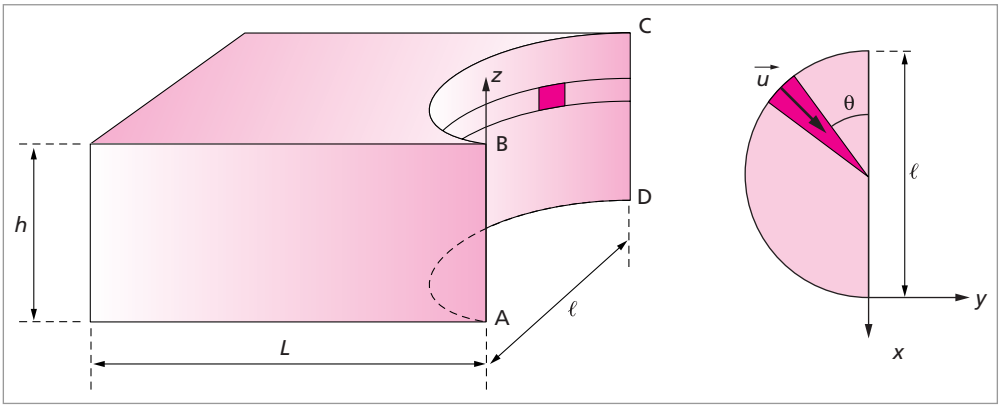
2. Mur cylindrique

La surface élémentaire (infiniment petit du second ordre) hachurée sur le dessin subit une force :

$$\mathrm{d}^2\vec{F} = P(z)\mathrm{d}^2\vec{S} = P(z)\mathrm{d}z\frac{l}{2}\mathrm{d}\theta\,\vec{u} = P(z)\mathrm{d}z\frac{l}{2}\mathrm{d}\theta\left(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}\right)$$

La bande semi-circulaire de hauteur dz subit une force élémentaire (infiniment petit du premier ordre) :

$$\mathrm{d}\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(z)\mathrm{d}z\frac{l}{2}\mathrm{d}\theta\left(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}\right) = P(z)l\mathrm{d}z\vec{u_y}.$$



La résultante des forces de pression subies par le mur est :

$$\overrightarrow{F} = \int_{z=0}^{z=h} \rho g l (h - z) \mathrm{d}z \overrightarrow{u_y} = \rho g l \frac{h^2}{2} \overrightarrow{u_y}$$

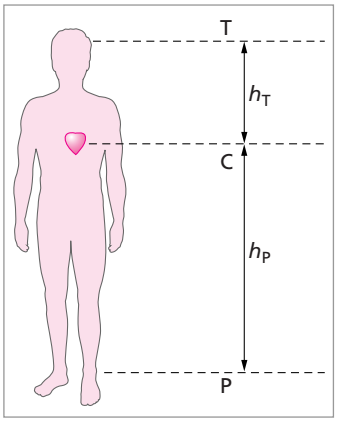
Ainsi, pour une largeur et une hauteur donnée, la force totale subie par le mur ne dépend pas de sa forme.

27 Le densimètre subit son poids de valeur Mg et la poussée d'Archimède, de valeur égale au poids de liquide déplacé ; la partie immergée du densimètre a un volume $V = V_0 + Sx$, de sorte que :

$$\Pi = \rho(V_0 + Sx)g$$

À l'équilibre, ces deux forces ont même valeur, ce qui conduit à la relation $\rho = \dfrac{M}{V_0 + Sx}$.
La graduation n'est donc pas linéaire.

28 **1.** La densité du sang est prise égale à celle de l'eau ; la densité du mercure par rapport à l'eau vaut 13,6. Cela signifie que la différence de pression entre deux points d'un lac séparés par une dénivellation de 10 m correspond à une dénivellation de mercure de $\dfrac{10}{13{,}6} = 735$ mm. On exprime habituellement la « tension artérielle » en cm ou en mm de mercure.



a. La relation fondamentale de l'hydrostatique s'écrit :

$$P_C - P_T = \rho g h_T \qquad \text{et} \qquad P_P - P_C = \rho g h_P$$

La pression au niveau de la tête est donc égale à la pression au niveau du cœur diminuée de la pression équivalente à $h_T = 450$ mm d'eau, soit $\frac{450}{13{,}6} = 33$ mm de Hg.

Ainsi $P_T = 67$ mm de Hg. $h_P = 1\,350$ mm d'eau, soit $\frac{1\,350}{13{,}6} = 99{,}3$ mm de Hg. D'où $P_P = 200$ mm de Hg.

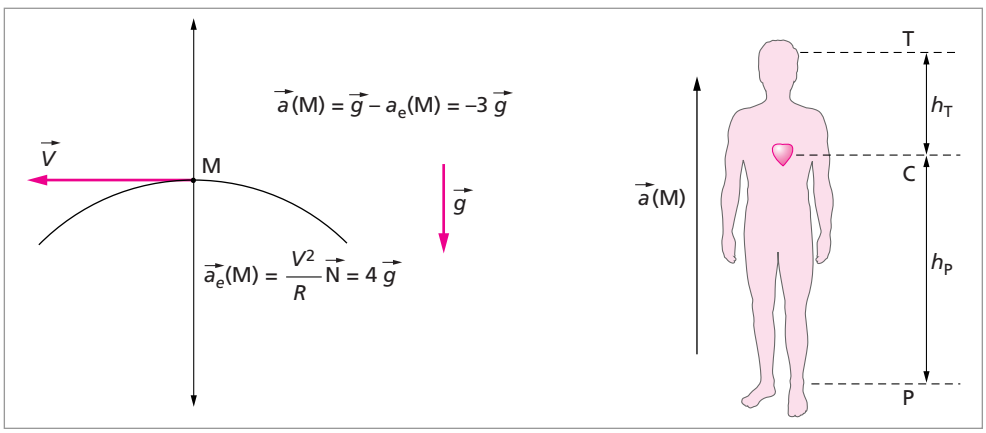
b. Comme cette fois $P_T - P_C = \rho g h_T$ et $P_C - P_P = \rho g h_P$, on trouve facilement que $P_P = 0$ mm de Hg et $P_T = 133$ mm de Hg.

2. Dans un avion en mouvement circulaire, tout point matériel de masse m est soumis, en plus des forces extérieures, à une force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M)$. Si le point matériel se déplace très lentement dans l'avion, la force de Coriolis est négligeable. Dans la somme des forces, ajouter $\vec{F}_{ie}(M)$ au poids revient à remplacer $\vec{g}$ par $\vec{g} - \vec{a}_e(M)$. La relation fondamentale de l'hydrostatique devient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho(\vec{g} - \vec{a}_e(M)) = \rho\vec{a}(M)$$

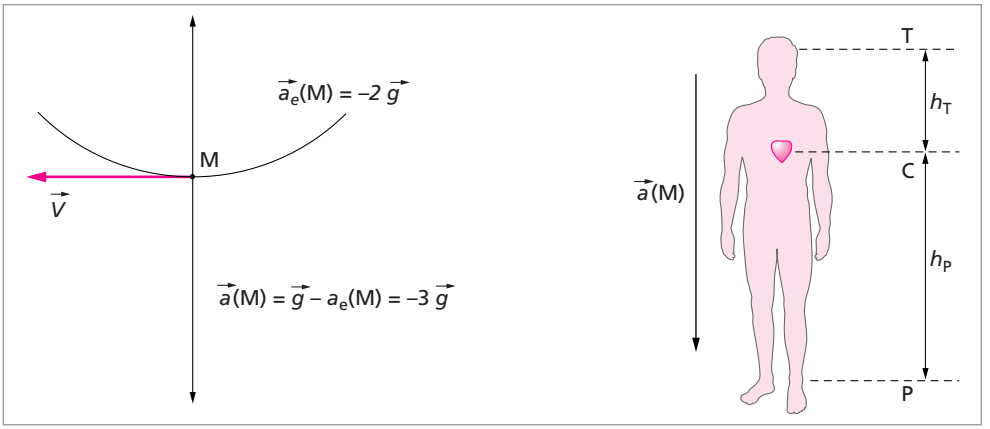
Un fluide au repos dans le référentiel entraîné est donc soumis à une accélération effective $\vec{a}(M)$.

a. $V = 350\ \text{ms}^{-1} \Rightarrow a_e(M) = \frac{V^2}{R} = \frac{350^2}{3\,062} \approx 40\ \text{ms}^{-2} = 4\ \text{g}$



$P_T - P_C = \rho a(M) h_T \Rightarrow P_T = P_C + 3\rho g h_T \Rightarrow P_T \approx 200$ mm de Hg
$P_C - P_P = \rho a(M) h_p \Rightarrow P_P = P_C - 3\rho g h_P \Rightarrow P_P \approx -200$ mm de Hg
Le sang afflue à la tête du pilote sous l'effet de l'accélération d'inertie ; c'est le phénomène du « voile rouge ».

b. $V = 350\ \text{ms}^{-1} \Rightarrow a_e(M) = \frac{V^2}{R'} = \frac{350^2}{6\,125} \approx 20\ \text{ms}^{-2} = 2\ \text{g}$



$P_C - P_T = \rho a(M) h_T \Rightarrow P_T = P_C - 3\rho g h_T \Rightarrow P_T \approx 0$ mm de Hg
$P_P - P_C = \rho a(M) h_p \Rightarrow P_P = P_C + 3\rho g h_P \Rightarrow P_P \approx 400$ mm de Hg
Le sang afflue aux pieds du pilote sous l'effet de l'accélération d'inertie, et la pression artérielle au niveau du cerveau diminue ; c'est le phénomène du « voile noir ».
Ces phénomènes posent des problèmes aux pilotes lorsqu'ils négocient des virages serrés (de petit rayon) à grande vitesse ; ils peuvent provoquer des troubles vasculaires sérieux. On conçoit que ces troubles puissent aller jusqu'à l'évanouissement chez des sujets peu entraînés. On comprend par ailleurs pourquoi un être humain ne peut pas supporter des accélérations importantes (au maximum $10 \times g$). Notons cependant que l'on néglige ici tous les effets dynamiques : la mesure de la « tension artérielle » nécessite la pression systolique (la plus élevée, lorsque le cœur ce contracte) et la pression diastolique. Elles sont séparées par une quarantaine de mm de Hg.

29 La surface libre est définie à l'équilibre par $P(x, y, z) = P_a$, où P_a est la pression atmosphérique.
Pour le récipient immobile :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho\,\vec{g} \Rightarrow P(x, y, z) = P_a + \rho g(h - z)$$

La surface libre est une portion du plan horizontal de côte h. Pour le récipient en rotation uniforme :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho(\vec{g} - \vec{a_e}(M))$$

comme déjà discuté dans l'exercice 28.
On se place en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a_e}(M) = \omega^2 r \vec{u_r}$$

Il vient :

$$\frac{\partial P}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u_z} = \rho(-g\vec{u_z} + \omega^2 r \vec{u_r})$$

Comme cela impose $\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, la surface sera de révolution autour de Oz. Elle est donnée par les système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

qui s'intègre en :

$$\begin{cases} P(r,z) = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + F(z) \\ P(r,z) = -\rho g z + G(r) \end{cases}$$

Ces deux relations sont compatibles, puisque les variables r et z sont séparées, et conduisent à :

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C$$

La surface libre a donc pour équation :

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C = P_0$$

La méridienne de la surface libre (θ fixé) est une parabole ; la surface libre est un paraboloïde de révolution d'axe z. La constante C se calcule en exprimant la conservation du volume du fluide. En l'absence de rotation, ce volume est celui d'un cylindre de rayon R, et de hauteur h :

$$V_0 = \pi R^2 h$$

En coordonnées cylindriques :

$$V = \iiint r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{r=0}^{r=R} r\mathrm{d}r \int_{z=0}^{z(r)} \mathrm{d}z'$$

avec $z(r) = Ar^2 + B$, où B est à chercher. D'où :

$$V = 2\pi \int_{r=0}^{r=R} z(r) r\mathrm{d}r = 2\pi \int_{r=0}^{r=R} (Ar^2 + B) r\mathrm{d}r$$

qui s'intègre aisément en :

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{4} A R^4 + \frac{1}{2} B R^2 \right)$$

De l'égalité $V = V_0 = \pi R^2 h$, on tire : $h = \dfrac{1}{2}AR^2 + B \Rightarrow B = h - \dfrac{1}{2}AR^2$

L'équation de la méridienne est donc :

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h$$

Cette équation ne dépend pas de la masse volumique du liquide.

Chapitre 2

Électromagnétisme

Ce chapitre est l'un des plus difficile à maîtriser parfaitement. Comme il lui est fait appel tout au long de l'enseignement secondaire, de la 6e à la terminale, il en est de même lors de l'épreuve écrite du CAPES. II est donc vivement conseillé de le reprendre tout au long de l'année de préparation au concours.
La majorité des parties portent sur l'électromagnétisme du vide : les charges et les circuits électriques ne sont pas environnés de matière. En électrostatique, les charges et les champs électriques ne dépendent pas du temps. En magnétostatique, les intensités de courant sont continues et créent des champs magnétiques indépendants du temps. En électromagnétisme du vide, toutes ces grandeurs physiques deviennent dépendantes du temps ; c'est le domaine de l'induction magnétique, les champs électriques et magnétiques sont reliés entre eux par les équations de Maxwell. Enfin, les trois dernières parties portent sur l'électromagnétisme de la matière (matériaux diélectriques ou magnétiques). Bien que le nombre d'épreuves écrites portant sur ce dernier sujet soit restreint, les notions fondamentales de susceptibilité électrique ou magnétique, d'aimantation ou de vecteur déplacement paraissent nécessaires pour une connaissance minimum de la physique de la matière.
On s'attachera à maîtriser les conventions d'orientation en magnétostatique et surtout en induction, à faire le parallèle entre une équation locale et une équation intégrale, à noter immédiatement les conditions de symétries du système et à en appliquer les propriétés.

1. Électrostatique : charges - forces - champ et potentiel électrostatiques
1.1. Les charges électriques
1.2. L'interaction coulombienne
1.3. Le champ électrostatique
1.4. Le potentiel électrostatique
1.5. Théorème de Gauss

2. Les équations locales de l'électrostatique
2.1. Circulation conservative
2.2. Expression locale du théorème de Gauss
2.3. Propriétés du potentiel
2.4. Définition et continuité des champs et des potentiels

3. Les conducteurs en électrostatique
3.1. Conducteur en équilibre électrostatique – champ et potentiel
3.2. Capacité d'un conducteur seul dans l'espace
3.3. Plusieurs conducteurs en équilibre électrostatique
3.4. Influence totale
3.5. Condensateurs

4. Énergie potentielle d'interaction électrostatique
4.1. Système de charges ponctuelles
4.2. Distribution continue de charges
4.3. Distribution volumique de charges
4.4. Énergie associée au champ électrique
4.5. Utilisation de l'énergie pour le calcul des forces électrostatiques

5. Magnétostatique : champ et force magnétiques
5.1. Force magnétique
5.2. Champ magnétique : loi de Biot et Savart
5.3. Exemples de calcul de $\overrightarrow{B}$ à partir de la loi de Biot et Savart

6. Symétries du champ magnétique. Théorème d'Ampère
6.1. Symétries par rapport à un plan
6.2. Symétries par rapport à un plan + inversion du sens des courants (transformation S.I.)
6.3. Circulation du champ magnétique

7. Potentiel-vecteur. Flux et circulation du champ magnétique
7.1. Le potentiel-vecteur
7.2. Flux du champ magnétique
7.3. Équation locale portant sur le potentiel-vecteur
7.4. Relations de passage pour le champ magnétique

8. Induction électromagnétique
8.1. Expérience fondamentale de Faraday (1831)
8.2. Autres conditions de manifestation du phénomène d'induction
8.3. Induction mutuelle et auto-induction dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires
8.4. Étude d'une bobine réelle dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires

9. Le moteur à courant continu
9.1. Constitution d'un moteur
9.2. Phénomène d'induction
9.3. Couple électromagnétique
9.4. Moteur à excitation indépendante (ou séparée)
9.5. Moteur à excitation série

10. Les équations de l'électromagnétisme en régime variable
10.1. Équation de continuité (conservation de la charge électrique)
10.2. Équation de Maxwell - Ampère
10.3. Potentiels

11. Ondes électromagnétiques dans le vide

11.1. Équation de propagation
11.2. Une solution particulièrement simple : l'onde plane homogène
11.3. Ondes sinusoïdales. Polarisation
11.4. Énergie électromagnétique : densité volumique et flux
11.5. Vue d'ensemble des radiations électromagnétiques

12. Électromagnétisme de la matière : étude macroscopique des diélectriques

12.1. Mise en évidence du rôle des diélectriques en électrostatique : polarisation induite
12.2. Vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$
12.3. Susceptibilité électronique χ_e
12.4. Répartition des charges de polarisation
12.5. Potentiel et champ à l'intérieur du diélectrique
12.6. Équations de Maxwell et conséquences

13. Électromagnétisme de la matière : étude microscopique des diélectriques

13.1. Polarisation électronique des atomes
13.2. Polarisation des molécules
13.3. Bilan des polarisations des diélectriques

14. Électromagnétisme de la matière : milieux aimantés

14.1. Dipôle magnétique
14.2. Moments dipolaires magnétiques dans la matière
14.3. Description d'un échantillon de matière aimantée
14.4. Équations de Maxwell dans la matière aimantée

1. ÉLECTROSTATIQUE : CHARGES - FORCES - CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES

1.1. Les charges électriques

– Elles peuvent être ponctuelles (q ou Q) ou réparties (λ ou σ ou ρ). Une distribution surfacique de charges réparties sur une surface S est définie par la **densité surfacique de charges** σ liée à la charge Q totale par :

$$Q = \iint_S \sigma \mathrm{d}S$$

De même, une **densité volumique de charges** ρ répartie dans un volume V correspondra à la charge totale Q :

$$Q = \iiint_V \rho \mathrm{d}\tau$$

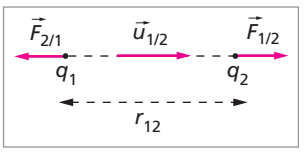
– Il y a toujours conservation de la charge électrique au cours d'une interaction électrostatique.

– La charge électrique est quantifiée.

– La valeur absolue de la charge de l'électron est égale à celle du proton.

1.2. L'interaction coulombienne

La loi de Coulomb exprime la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$ exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une charge ponctuelle q_2, les deux charges étant distantes de r_{12}.



$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_{12}}$$

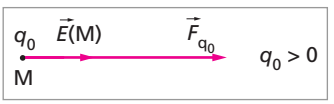
La constante diélectrique du vide ε_o est fixée telle que $1/4\pi\varepsilon_o = 9 \cdot 10^{+9}$ u.S.I.

1.3. Le champ électrostatique

Le champ électrostatique est défini à partir de la force de Coulomb. Il faut distinguer les *charges sources* qui créent le champ électrostatique et la *charge témoin* qui permet de mettre en évidence ce champ électrostatique sans le perturber.

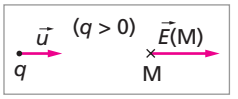
Une charge témoin q_o située en un point M où règne le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ sera soumise à la force :

$$\overrightarrow{F_{q_o}} = q_o \overrightarrow{E}(\mathrm{M})$$



• **Expression du champ**

Si la charge source est ponctuelle et vaut q, elle crée au point M, situé à la distance r de celle-ci, le champ :

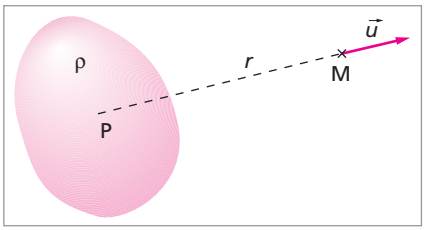


$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

S'il s'agit d'un ensemble de charges sources ponctuelles q_i situées respectivement aux distances r_i du point M, conformément au principe de superposition, le champ s'écrit :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}$$

Pour une distribution volumique de charges sources réparties dans le volume V, le champ au point M vaut :



$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint_V \frac{\rho(\mathrm{P})\vec{u}}{r^2}\mathrm{d}\tau$$

La norme du champ électrostatique s'exprime en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

• **Propriété fondamentale du champ électrostatique**

– Le champ créé par une charge source ponctuelle est un champ vectoriel à symétrie sphérique.

– Un champ vectoriel à symétrie sphérique et dont la norme varie en $1/r^2$ est conservatif.

– Tout champ électrostatique est dit « conservatif », ce qui signifie que sa circulation sur une courbe fermée est nulle. Il dérive alors d'un potentiel scalaire V.

1.4. Le potentiel électrostatique

Définition : À partir du champ électrostatique, on définit le potentiel V :

– soit par l'équation locale, valable en tout point M de l'espace :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V(\mathrm{M})$$

– soit par l'équation intégrale définissant la circulation du champ $\vec{E}$ le long d'un circuit AB :

$$C_{\vec{E}/\mathrm{AB}} = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})$$

La circulation du champ $\vec{E}$ le long du circuit AB ne dépend pas du chemin suivi.

• **Expression du potentiel**

Le potentiel est défini à une constante près. Pour choisir cette constante, on ne peut choisir $V(\infty) = 0$ que s'il n'y a pas de charge source située à l'infini. Le potentiel s'exprime en volt (V).

– Pour une source ponctuelle située à la distance r du point M :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}$$

– Pour un ensemble de charges ponctuelles, V s'écrit au point M :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\mathrm{i}} \frac{q_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i}}} + \text{cte}$$

– Pour une distribution continue de charges, V s'écrit :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(r)\mathrm{d}\tau}{r} + \text{cte}$$

où V est le volume occupé par les charges sources.

• **Signification physique du potentiel**

$V(\mathrm{M})$ représente le travail à fournir pour amener une charge témoin q_{o} de l'infini au point M, divisé par la charge q_{o}.

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située au point M où règne le potentiel $V(\mathrm{M})$ s'écrira donc :

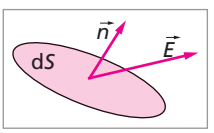
$$U = qV(\mathrm{M})$$

Remarque : le fait que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel découle de la conservation de l'énergie.

1.5. Théorème de Gauss

• **Notion de flux**

– Le flux élémentaire du champ électrostatique $\vec{E}$ *sortant* d'une surface élémentaire dS définie par sa normale $\vec{n}$ est égal à :



$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

– Le flux global sortant d'une surface *fermée* S s'écrit :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Théorème de Gauss : Le flux du champ électrostatique, créé par une charge ponctuelle q, sortant d'une surface fermée quelconque ne contenant pas q, est nul.

– Le flux du champ électrostatique, créé par une charge ponctuelle q, sortant d'une surface fermée quelconque contenant q, vaut q/ε_0.

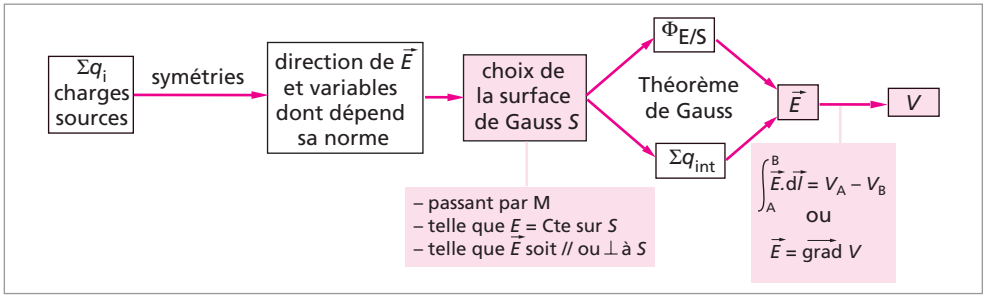
– Généralisation :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

où $\sum q_{int}$ représente la somme des charges sources situées à l'intérieur de la surface fermée S.

• Utilisation pour les calculs de champ ou de potentiel électrosatiques

Ce théorème est très utile dans le cas de symétries fortes (cylindriques ou sphériques). Pour calculer le champ ou le potentiel, il faut alors suivre le schéma directeur suivant :



2. Les équations locales de l'électrostatique

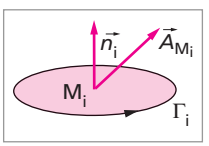
2.1. Circulation conservative

• Conséquence de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

En coordonnées cartésiennes, cette égalité conduit aux relations $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$. On cherche ensuite une expression vectorielle qui admet ces trois relations comme projections sur trois axes. On introduit l'opérateur « rotationnel ».

• Notion de rotationnel

La projection du vecteur $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$, au point M_i, selon la normale à la surface orientée ΔS_i, est égale à la circulation ΔC_i du vecteur $\vec{A}$ sur le contour fermé Γ_i, limitant ΔS_i, divisée par la surface ΔS_i, ceci quand ΔS_i tend vers zéro :



$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}_{M_i}) \cdot \vec{n}_i = \text{Lim}_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta C_i}{\Delta S_i}.$$

Relation de Stockes : la circulation d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ le long d'un contour fermé Γ s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \iint_{S} (\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

où S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour fermé Γ.

Rotationnel du champ électrostatique : en tout point M de l'espace, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(\text{M}) = \overrightarrow{0}}$$

En coordonnées cartésiennes, cette relation s'écrit :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\text{x}} = \frac{\partial E_{\text{z}}}{\partial y} - \frac{\partial E_{\text{y}}}{\partial z} = 0$$
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\text{y}} = \frac{\partial E_{\text{x}}}{\partial z} - \frac{\partial E_{\text{z}}}{\partial x} = 0$$
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\text{z}} = \frac{\partial E_{\text{y}}}{\partial x} - \frac{\partial E_{\text{x}}}{\partial y} = 0$$

En coordonnées cylindriques :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\text{z}}}{\partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial z} = 0$$
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\theta} = \frac{\partial E_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial E_{\text{z}}}{\partial \rho} = 0$$
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\text{z}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_{\theta})}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\rho}}{\partial \theta} = 0$$

En coordonnées sphériques :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\text{r}} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (E_{\varphi}\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \varphi}\right] = 0$$
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial E_{\text{r}}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rE_{\varphi})}{\partial r}\right] = 0$$
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E})_{\varphi} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rE_{\varphi})}{\partial r} - \frac{\partial E_{\text{r}}}{\partial \theta}\right] = 0$$

2.2. Expression locale du théorème de Gauss

Divergence d'un champ vectoriel : La divergence d'un vecteur $\overrightarrow{A}$, au point M_{i}, est égale à la limite, quand le volume $\Delta\tau$ tend vers zéro, du flux de $\overrightarrow{A}$ sortant d'une surface fermée ΔS_{i}, entourant M_{i}, divisée par le volume $\Delta\tau$ contenu dans ΔS_{i} :

$$\text{div}\,\overrightarrow{A_{\text{M}_{\text{i}}}} = \lim_{\Delta\tau \longrightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_{\text{i}}}{\Delta\tau}$$

Relation d'Ostrogradzki : Le flux d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers une surface fermée s'écrit :

$$\oiint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_\tau (\mathrm{div}\, \overrightarrow{A}) \mathrm{d}\tau$$

où τ est le volume contenu dans la surface *fermée S*.

Divergence du champ électrostatique : en tout point M de l'espace où il existe une densité volumique de charge ρ_M et où règne le champ $\overrightarrow{E}(M)$, on a :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho_M}{\varepsilon_0}$$

Cette relation ne s'applique cependant pas si M se trouve sur une surface chargée, sur un fil chargé ou sur une charge ponctuelle.

En coordonnées cartésiennes, la relation s'écrit :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{E} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho E_z)}{\partial z}\right]$$

En coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\varphi)}{\partial \varphi}$$

2.3. Propriétés du potentiel

• **Équation locale**

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$\Delta V = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, V})$ est le laplacien de V. Si $\rho = 0$, $\Delta V = 0$, la relation est appelée équation de Laplace ; si $\rho \neq 0$, c'est l'équation de Poisson.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

En coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$$

Propriété : Le potentiel ne présente aucun extrémum en dehors des charges.

En conséquence, un ensemble de charges ne peut être en équilibre stable sous la seule action des interactions électrostatiques (théorème d'Ehrenfest).

2.4. Définition et continuité des champs et des potentiels

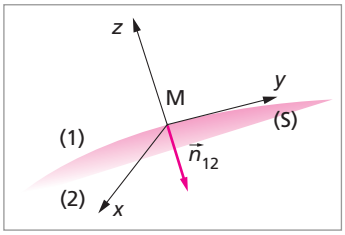
$\overrightarrow{E}$ et V ne sont pas définis sur un fil chargé ni sur une charge ponctuelle.
$\overrightarrow{E}$ et V sont définis pour toute distribution continue de charges, en volume ou en surface.

Propriété : $\overrightarrow{E}$ est discontinu à la traversée d'une distribution surfacique de charges

Exemple : à la surface d'une sphère ou d'un cylindre portant des charges en surface, sur un disque ou un plan chargé, on observe une discontinuité du champ.

• Relations de passage à la traversée d'une surface chargée

Soit deux milieux (1) et (2) séparés par une surface (S) qui porte la densité superficielle de charges σ. Soit $x\mathrm{M}y$ le plan tangent à (S) en M et $\overrightarrow{\mathrm{M}z}$ un axe perpendiculaire à ce plan. On appelle $\overrightarrow{E_{\mathrm{n}}}$ la composante normale de $\overrightarrow{E}$ en M, parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{M}z}$. On appelle $\overrightarrow{E_t}$ la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ en M, perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{M}z}$. Seule la composante normale de $\overrightarrow{E}$ subit une discontinuité :



$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
$$E_{t2} - E_{t1} = 0$$

Ce qui se généralise par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{12}}$$

Cette relation de passage n'est valable qu'en tout point M de la surface de séparation entre les deux milieux et quelles que soient les densités volumiques de charges qu'ils contiennent éventuellement.
Le potentiel ne subit aucune discontinuité :

$$V_1 = V_2$$

3. Les conducteurs en électrostatique

3.1. Conducteur en équilibre électrostatique – champ et potentiel

• À l'intérieur du conducteur

$$\vec{E} = \vec{0} \qquad V = \text{Cte} \qquad \rho = 0$$

• Au voisinage du conducteur

Les charges portées par un conducteur ne peuvent se répartir que sur sa suface qui porte alors une densité surfacique σ.

Théorème de Coulomb : Au voisinage d'une surface chargée, le champ électrostatique est normal à la surface du conducteur et vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la surface et dirigé vers l'extérieur. Le champ est donc dirigé vers l'extérieur si $\sigma > 0$.

• À la surface du conducteur :

le champ produit par le reste du conducteur en un point de sa surface est égale à :

$$\vec{E_r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

On définit la pression électrostatique p :

$$p = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} > 0$$

Les forces dues à cette pression électrostatique tendent à faire sortir les charges du conducteur. Elles sont compensées par une force moléculaire antagoniste. Si σ devient important, il peut y avoir émission de charge par « effet de champ ».

• Dans la cavité d'un conducteur

Théorème des écrans : les charges extérieures au conducteur ainsi que celles portées par sa surface externe donnent un champ nul dans une cavité du conducteur.

$$V = \text{Cte} \qquad \vec{E} = \vec{0}$$

Ces résultats sont valables quelle que soit la répartition des charges sur la surface externe du conducteur.

3.2. Capacité d'un conducteur seul dans l'espace

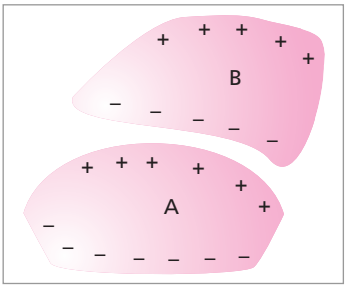
Définition : Si Q est la charge portée par la surface externe d'un conducteur et V le potentiel du conducteur ou de sa surface, la capacité du conducteur est :

$$C = \frac{Q}{V}$$

C s'exprime en farad (F).

Exemples : pour une sphère conductrice de rayon R : $C = 4\pi\varepsilon_o R$. La capacité de la Terre vaut 0,7 mF.

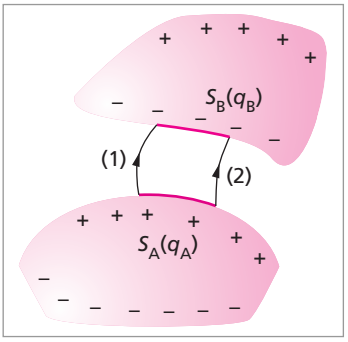
3.3. Plusieurs conducteurs en équilibre électrostatique



Le phénomène d'influence apparaît lorsque plusieurs conducteurs chargés interagissent. Lorsque deux conducteurs A et B sont en équilibre, il y a influence mutuelle.

Théorème des éléments correspondants : Si (1) et (2) sont deux lignes de champ quelconques, S_A et S_B sont appelés des « éléments correspondants ». Les charges respectives portées par ces éléments sont telles que :

$$q_A = -q_B$$

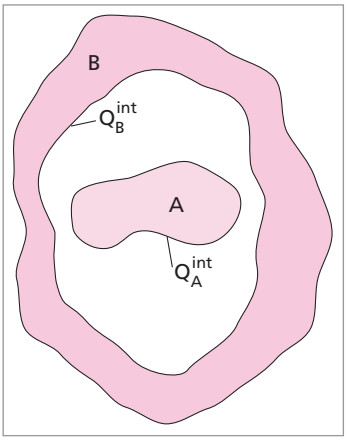


3.4. Influence totale

Elle correspond au cas où le conducteur B entoure le conducteur A. On a alors :

$$Q_A^{ext} = -Q_B^{int}$$

3.5. Condensateurs



Un condensateur est constitué de deux conducteurs A et B en influence totale. La capacité d'un condensateur est égale à :

$$C = \frac{Q_A}{V_A - V_B}$$

Exemple : un condensateur sphérique est formé de deux conducteurs sphériques concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_2 < R_1$) :

$$C = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

Exemple : pour un condensateur plan, si S est la surface en regard des armatures et e la distance entre celles-ci, on a $C = \varepsilon_o \dfrac{S}{e}$.

4. Énergie potentielle d'interaction électrostatique

4.1. Système de charges ponctuelles

Cas de deux charges ponctuelles : l'énergie potentielle d'interaction U de deux charges ponctuelles représente le travail qu'il faut fournir pour transporter la charge q_2 depuis l'infini jusqu'à sa position actuelle, à la distance r_{12} de la charge q_1. C'est aussi le travail qu'il faut fournir pour transporter q_1 depuis l'infini jusqu'à sa position finale, c'est-à-dire à la distance r_{12} de la charge q_2 :

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}}$$

Cas de N charges ponctuelles : l'énergie potentielle d'interaction de N charges q_i est :

$$U = \sum_{\text{couples}(i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_o(P_i)$$

où $V_o(P_i)$ est le potentiel créé en P_i , position de q_i, par les $(N-1)$ charges, autres que q_i.

4.2. Distribution continue de charges

Condensateur : l'énergie associée à un condensateur de capacité C et soumis à une différence de potentiel V s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

4.3. Distribution volumique de charges

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\tau} \rho(P) V(P) d\tau$$

où $V(P)$ est le potentiel régnant au point P contenu dans le volume τ portant la densité de charge ρ.

4.4. Énergie associée au champ électrique

La densité d'énergie électrostatique en un point P où règne le champ $\vec{E}(P)$ vaut :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_o \left\| \vec{E}(P) \right\|^2$$

L'énergie potentielle d'un ensemble de charges créant en P un champ $\overrightarrow{E}(\mathrm{P})$ vaut :

$$U = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{E}(\mathrm{P})\right\|^2 \mathrm{d}\tau$$

4.5. Utilisation de l'énergie pour le calcul des forces électrostatiques

Si U est l'énergie électrostatique d'un solide chargé capable de se déplacer en translation ou en rotation sous l'effet de forces électrostatiques celles-ci peuvent être exprimées en fonction de U selon les relations suivantes.

En translation : $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$ soit $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$

En rotation : $\Gamma_z = -\dfrac{\partial U}{\partial \theta}$; Γ_z est la projection selon l'axe de rotation Oz du moment des forces électrostatiques appliquées au solide.

5. Magnétostatique : champ et force magnétiques

5.1. Force magnétique

Tout commence en 1820 avec C. Oersted qui découvre qu'une aiguille aimentée est déviée par un courant électrique.

Force de Lorentz : la force exercée sur une charge ponctuelle q par un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Cette expression suppose que la charge q est indépendante de sa vitesse $\overrightarrow{v}$.

Force de Laplace : La force élémentaire exercée sur un élément de conducteur de volume $\mathrm{d}\tau$ parcouru par une densité de courant $\overrightarrow{j}$ et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

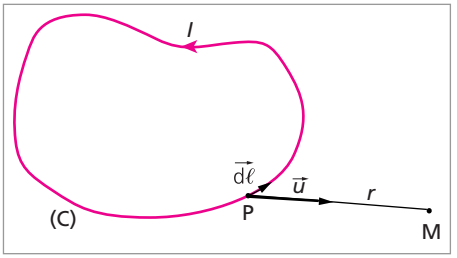
Lorsqu'il s'agit de la force élémentaire exercée sur un **élément de conducteur filiforme** de longueur $\mathrm{d}\ell$ parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, l'expression de la force de Laplace devient :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = I\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

I est une grandeur algébrique, positive si le courant circule dans le sens de $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ et négative dans l'autre cas.

5.2. Champ magnétique : loi de Biot et Savart

Elle exprime le champ magnétique créé en un point M par une distribution de courant.



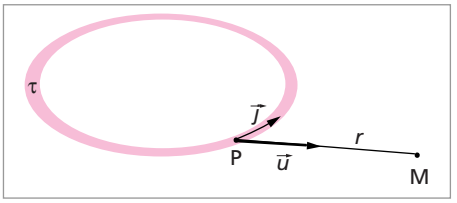
Circuit filiforme : l'expression du champ magnétique créé en M par un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité I est :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{(\mathrm{C})} I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Le courant d'intensité I circule dans le circuit (C) qui est orienté arbitrairement. Le vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est tangent à (C) en l'un de ses points « baladeurs » P et son sens est défini par l'orientation choisie. Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est porté par PM et orienté de P vers M. Enfin, PM $= r$. Cette loi fait intervenir la perméabilité magnétique du vide $\mu_o = 4\pi.10^{-7}$ u.S.I., reliée à ε_o, dans le système international, par la relation $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$.

Courant distribué en volume

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}(\mathrm{P}) \wedge \vec{u}(\mathrm{P})}{r^2} \mathrm{d}\tau$$

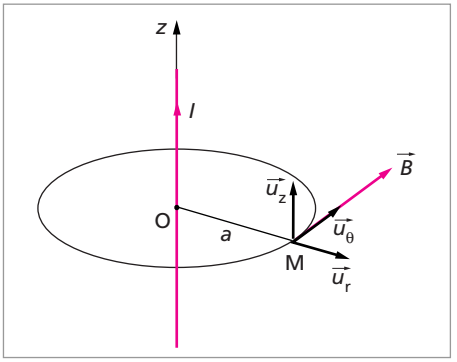


Limite de validité : la loi de Biot et Savart n'est applicable qu'en régime permanent (I ou $\vec{j}$ indépendant du temps), domaine de la magnétostatique, ou bien en régime lentement variable avec le temps, c'est-à-dire dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

5.3. Exemples de calcul de $\vec{B}$ à partir de la loi de Biot et Savart

• Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o I}{2\pi a} \vec{u_\theta}$$



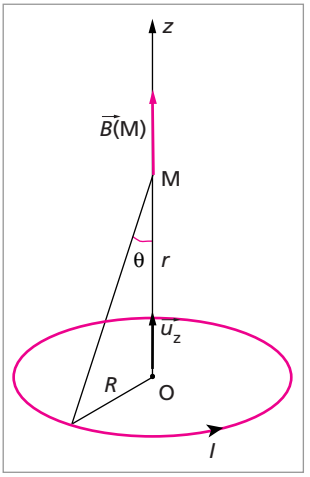
Ce résultat conduit à l'expression de la force d'interaction entre deux fils rectilignes parallèles parcourus par des courants d'intensité I_1 et I_2 et distants de a :

$$\frac{\overrightarrow{F_{2/1}}}{\mathrm{d}\ell_2} = -\frac{\overrightarrow{F_{1/2}}}{\mathrm{d}\ell_1} = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} \overrightarrow{u_{12}}.$$

La définition légale de l'ampère est déduite de cette interaction : si $a = 1$ m, la force d'interaction par unité de longueur des fils vaudra 2.10^{-7} N.m^{-1} lorsque $I_1 = I_2 = 1$ A.

• Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point de son axe

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o I R^2}{2r^3}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o I \sin^3\theta}{2R}\overrightarrow{u_z}$$



• Champ magnétique créé sur l'axe d'un solénoïde

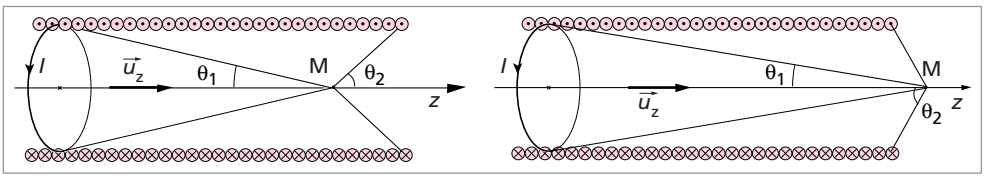
$$\overrightarrow{B_{\text{ext}}}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o n I}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{B}_{\text{int}}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o n I}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\overrightarrow{u_z}$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Cette expression conduit à :

$$\overrightarrow{B}_{\text{int}}(\mathrm{M}) = \mu_o n I \overrightarrow{u_z}$$

lorsque le solénoïde devient infiniment long.



6. Symétries du champ magnétique. Théorème d'Ampère

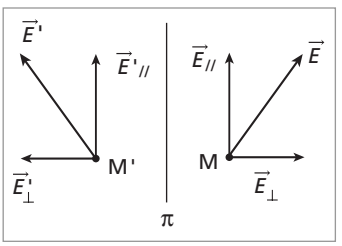
6.1. Symétries par rapport à un plan

Vecteurs polaires : ils se transforment de la même manière qu'un bipoint lors d'une opération de symétrie par rapport à un plan π.

$$\overrightarrow{E'_{//}} = \overrightarrow{E_{//}}$$

$$\overrightarrow{E'_{\perp}} = -\overrightarrow{E_{\perp}}$$

$$\text{Si } \mathrm{M} \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{E} \in \pi$$



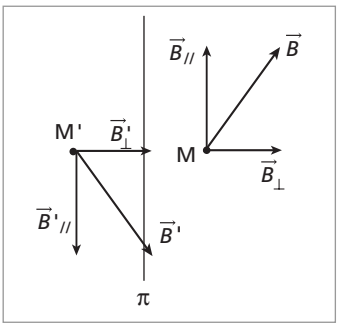
Exemples de vecteurs polaires : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F}$, ...

Vecteurs axiaux ou pseudo-vecteurs

$$\overrightarrow{B'_{\perp}} = \overrightarrow{B_{\perp}}$$

$$\overrightarrow{B'_{//}} = -\overrightarrow{B_{//}}$$

$$\text{Si } \mathrm{M} \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{B} \perp \pi$$



Exemples de vecteurs axiaux :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}, \qquad \overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}, \qquad \overrightarrow{B}, \ldots$$

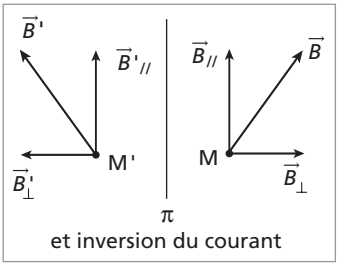
Produit vectoriel - Rotationnel : Selon les opérations appliquées à des vecteurs polaires et axiaux, le résultat final est l'un ou l'autre type de vecteur. On note $\overrightarrow{P_i}$ les vecteurs polaires et $\overrightarrow{A_i}$ les vecteurs axiaux :

$$\overrightarrow{P}_1 \wedge \overrightarrow{P}_2 = \overrightarrow{A}; \quad \overrightarrow{A_1} \wedge \overrightarrow{A}_2 = \overrightarrow{A_3}; \quad \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{P}_1 = \overrightarrow{P_2}; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{P} = \overrightarrow{A}; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{P}.$$

6.2. Symétries par rapport à un plan + inversion du sens des courants (transformation S.I.)

Elle est réservée au champ magnétique.

$$\overrightarrow{B'_{//}} = \overrightarrow{B_{//}}$$
$$\overrightarrow{B'_{\perp}} = -\overrightarrow{B_{\perp}}$$
$$\text{Si } M \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{B} \in \pi$$



et inversion du courant

• Exemples d'application :

– plan π perpendiculaire à un fil rectiligne parcouru par un courant
– plan π perpendiculaire au plan d'une spire parcourue par un courant
– plan π contenant l'axe d'un solénoïde infini.

• Symétrie cylindrique (de révolution autour d'un axe Δ)

– toute grandeur scalaire ou toute composante de vecteur est indépendante de θ (ainsi que de z si le circuit est infini dans la direction Δ),
– Si $M \in \Delta$, tout vecteur d'origine M est parallèle à Δ,
– Si π est le plan contenant M et $\overrightarrow{j}$ alors $\overrightarrow{B} \perp \pi$,
– Si π' est le plan contenant M et perpendiculaire à $\overrightarrow{j}$ alors $\overrightarrow{B} \in \pi'$.

• Symétrie sphérique

– toute grandeur scalaire ou toute composante de vecteur est indépendante de r,
– tout vecteur est radial et nul s'il a comme origine le centre de symétrie.

6.3. Circulation du champ magnétique

• **Cas du fil conducteur infini**

$$C_{\overrightarrow{B}/M_1M_2} = \frac{\mu_o I}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)$$

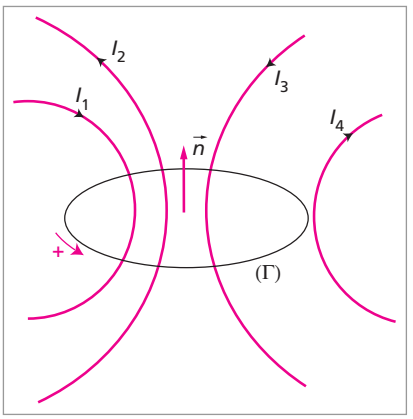
Théorème d'Ampère : : La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé quelconque, orienté par $\vec{n}$, est égale à μ_o fois la somme des intensités algébriques des courants, de direction $\vec{u_z}$ enlacés par ce contour :

$$C_{\vec{B}/\Gamma} = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_o \Sigma I_{\text{enlacés}}$$

Ces intensités algébriques sont comptées positivement si $\vec{n} \cdot \vec{u_z} > 0$ et négativement si $\vec{n} \cdot \vec{u_z} < 0$.

Exemple : Sur la figure ci-contre :

$$C_{\vec{B}/\Gamma} = \mu_o(-I_1 + I_2 - I_3)$$



Pour déterminer le champ magnétique en utilisant le théorème d'Ampère, il faut choisir le contour Γ dit « courbe d'Ampère » astucieusement. Γ doit passer par le point M où l'on désire calculer $\vec{B}$. De plus, Γ doit être, si possible, une ligne de champ et le lieu des points où $\|\vec{B}\| = \text{Cte}$.
La forme locale du théorème d'Ampère appelée relation de Maxwell - Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_o \vec{j}$$

où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant, dont la norme s'exprime en A.m^{-2}.

• Applications

Le théorème d'Ampère permet de calculer facilement le champ magnétique de quelques distributions particulières de courant.

– Fil infini (Γ =cercle (O, r)). Le champ à la distance r du fil vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$$

– Pour un câble infini de rayon a parcouru par un courant réparti uniformément dans son volume, le champ à la distance r de l'axe vaut :

$$\vec{B_{\text{int}}} = \frac{\mu_o I r}{2\pi a^2}\vec{u_\theta}, \qquad \vec{B_{\text{ext}}} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$$

– Pour un câble infini de rayon a parcouru par un courant réparti uniformément sur sa surface :

$$\vec{B_{\text{int}}} = \vec{0}, \qquad \vec{B_{\text{ext}}} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$$

– Pour un solénoïde infiniment long (n spires/m) (Γ = rectangle parallèle à l'axe), le champ s'écrit :

$$\vec{B_{\text{ext}}} = \vec{0}, \qquad \vec{B_{\text{int}}} = \mu_o n I \vec{u_z}$$

7. Potentiel-vecteur. Flux et circulation du champ magnétique

7.1. Le potentiel-vecteur

Par opposition au champ électrique $\vec{E}$ qui dérive d'un potentiel scalaire V, le champ magnétique $\vec{B}$ dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$.

• Relation locale entre $\vec{B}$ et $\vec{A}$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$$

• Expression de $\vec{A}$

La relation précédente conduit à l'expression de $\vec{A}$ créé par un circuit filiforme C parcouru par un courant d'intensité I, à la distance r de celui-ci :

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_C \frac{I\,\vec{d\ell}}{r}$$

ou bien par une distribution volumique de courant contenue dans un volume τ et définie par sa densité volumique $\vec{j}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\,(P)d\tau}{r}$$

$\vec{A}$ est un vecteur polaire, sa norme s'exprime en T.m

• Indétermination du potentiel - vecteur

- $\vec{A}$ n'est défini qu'au gradient d'une fonction près.
- En magnétostatique, on impose de plus la jauge de Coulomb $\text{div}\,\vec{A} = 0$.
- Les expressions précédentes satisfont la jauge de Coulomb.
- La définition de $\vec{A}$ par $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ ainsi que le choix de la jauge de Coulomb $\text{div}\,\vec{A} = 0$ laissent encore un grand nombre de possibilités pour $\vec{A}$.

• Relation intégrale entre $\vec{B}$ et $\vec{A}$

La circulation de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé et orienté (C) est égale au flux de $\vec{B}$ sortant d'une surface quelconque (S) limitée par le contour (C) :

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{d\ell} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\,dS$$

• **Application : calcul du potentiel-vecteur créé par un courant filiforme, rectiligne et infini**

En un point M situé à la distance r du fil qui est parcouru par un courant d'intensité I et d'axe $z'z$:

$$\overrightarrow{A}(\mathrm{M}) = \left(-\frac{\mu_0}{2\pi}\ell \mathrm{n}\ \mathrm{r} + \mathrm{Cte}\right)\overrightarrow{u_z}$$

7.2. Flux du champ magnétique

Cette notion intervient ici car les relations ci-dessous découlent de la propriété de la divergence d'un rotationnel, qui est toujours nulle : $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}) = 0$.

• **Divergence de $\overrightarrow{B}$**

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$$

• **Le flux de $\overrightarrow{B}$ est conservatif**

$$\oiint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

Pour que cette relation soit valable, il faut que la surface S soit fermée.

Théorème de Maxwell : le travail W des forces magnétiques lors du déplacement d'un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité I, dans un champ magnétique extérieur est égal à :

$$W = \delta\Phi_C = I(\Phi_f - \Phi_i)$$

$\delta\Phi_C$ est le **flux coupé** par le circuit au cours du déplacement, c'est à dire le flux du champ magnétique à travers la surface balayée, et Φ_f et Φ_i sont les flux *à travers le circuit* dans ses positions finale et initiale.

• **Règle du flux maximal**

Le flux du champ magnétique à travers un circuit est maximal lorsque celui-ci est dans sa position d'équilibre.

7.3. Équation locale portant sur le potentiel-vecteur

• **Le laplacien vectoriel $\Delta\overrightarrow{A}$**

Il est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,A) - \Delta\overrightarrow{A}$$

où $\Delta\overrightarrow{A}$ possède les trois composantes $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ en coordonnées cartésiennes.

• **Équation locale**

Le laplacien vecteur $\Delta\vec{A}$ est relié à la densité volumique de courant $\vec{j}$ par :

$$\Delta\vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0} \quad \text{associé à} \quad \text{div}\,\vec{A} = 0$$

On notera l'analogie entre cette équation et l'équation de Poisson en électrostatique.

7.4. Relations de passage pour le champ magnétique

• **Densité surfacique de courant $\vec{j_\sigma}$**

L'intensité du courant traversant un arc de courbe $\overset{\frown}{\text{MN}}$ est donnée par :

$$I = \int_{\text{MN}} (\vec{j_\sigma} \cdot \vec{u}) \mathrm{d}\vec{\ell}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire tangent à la surface sur laquelle circule I et orthogonal à l'arc $\overset{\frown}{\text{MN}}$.

• **Relations de passage entre deux milieux 1 et 2**

La composante normale de $\vec{B}$ est continue : $B_{z2} = B_{z1}$

La composante tangentielle de $\vec{B}$ subit une discontinuité lorsqu'il existe une densité surfacique de courant à l'interface entre les deux milieux de séparation. Cette discontinuité s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$B_{x2} - B_{x1} = \mu_o j_{\sigma y} \qquad \text{et} \qquad B_{y2} - B_{y1} = -\mu_o j_{\sigma x}$$

Elle se généralise par l'expression vectorielle :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o \vec{j_\sigma} \wedge \vec{n_{12}}$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est, par contre, continu à l'interface entre les deux milieux.

$$\vec{A_1} = \vec{A_2}$$

8. Induction électromagnétique

8.1. Expérience fondamentale de Faraday (1831)

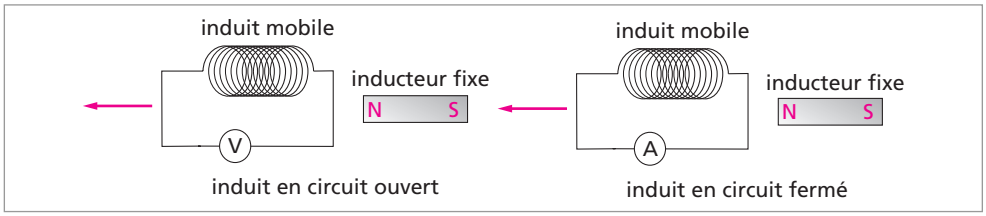
• **Définitions**

On appelle **inducteur** la source de champ magnétique. Ce peut être un aimant ou un électroaimant.

On appelle **induit** le circuit électrique, siège du phénomène d'induction, il peut être ouvert (fermé par un voltmètre parfait par exemple) ou fermé (fermé par un ampèremètre par exemple).

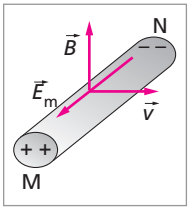
Le phénomène d'induction se traduit par une f.e.m. induite (induit ouvert ou fermé) et/ou un courant induit (induit fermé seulement) dans l'induit lors du déplacement relatif de l'inducteur par rapport à l'induit ou bien lors des variations temporelles du courant dans l'inducteur.

• **Description de l'expérience de Faraday**



L'inducteur est un aimant fixe. L'induit est un circuit électrique mobile. Lorsque l'induit est ouvert, le voltmètre dévie. Lorsque l'induit est fermé, l'ampèremètre dévie.

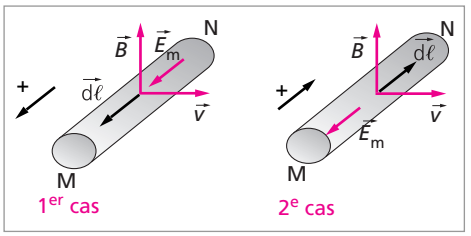
• **Interprétation dans le cas d'un induit ouvert**



– *Le champ électromoteur d'induction* : l'induit est un conducteur rectiligne animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}$ et au barreau. Les électrons de l'induit, de charge q, sont soumis à la force de Lorentz $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge B$. Ils se déplacent, s'accumulent en N et quittent M. Il apparaît une d.d.p. $V_M - V_N$ dont le signe ne dépend que du sens de $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

L'induit se comporte comme un **générateur** où règne un champ électromoteur d'induction :

$$\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$



Attention : $\vec{E_m}$ n'est pas un champ électrostatique, sa circulation n'est pas conservative.

– **La force électromotrice d'induction** : ce générateur est caractérisé par une f.e.m. d'induction $e = \int \vec{E_m} \cdot \vec{d\ell}$ dont le signe dépend du choix de l'orientation du conducteur : e est positif dans le premier cas et négatif dans le second.

la loi de Faraday : la f.e.m. d'induction e est reliée au flux coupé Φ_c du champ magnétique par le conducteur lors de son déplacement par :

$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

• **Interprétation dans le cas d'un induit fermé**

La loi de Faraday fait alors intervenir le flux Φ à travers le circuit induit fermé :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Un courant induit i circule dans l'induit, tel que $i = e/R$ où R est la résistance électrique de l'induit. Puisque l'induit se comporte comme un générateur :

$$e \cdot i > 0$$

8.2. Autres conditions de manifestation du phénomène d'induction

• Induit fixe et inducteur mobile

Il n'y a pas de force magnétique s'exerçant sur les porteurs de charge de l'induit. Le champ électromoteur apparaît comme un champ électrique créé par les variations du champ magnétique au cours du temps. Le couple $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ définit le champ électromagnétique. La loi de Faraday est toujours valable.

• Induit et inducteur fixes, courant inducteur variable dans le temps

De même, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$ provoque l'apparition d'un champ $\overrightarrow{E}$ dans l'induit. La loi de Faraday reste valable.

Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel qu'il tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

Relation de Maxwell - Faraday : l'expression locale de la loi de Faraday, valable pour tout régime variable dans le temps, s'écrit :

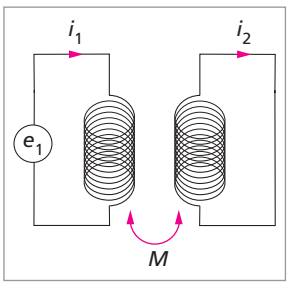
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t}$$

8.3. Induction mutuelle et auto-induction dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires

• Induction mutuelle

Soit $\Phi_{1/2}$ le flux créé par le circuit C_1 à travers le circuit C_2 :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{1/2}}{i_1} \; ; \; M_{21} = \frac{\Phi_{2/1}}{i_2}$$



$M = M_{21} = M_{12}$ est appelée inductance mutuelle ; elle s'exprime en henry (H) et peut être positive ou négative.

• Autoinduction

Les deux circuits inducteur et induit sont confondus. Soit Φ le flux propre créé par le circuit à travers lui-même :

$$L = \frac{\Phi}{i} \quad \Longrightarrow \quad e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

L s'appelle l'autoinductance du circuit, elle s'exprime en henry (H), elle est toujours positive.

Attention : cette définition n'est pas applicable au cas d'une bobine contenant un noyau de fer doux.

8.4. Étude d'une bobine réelle dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires

Une bobine réelle peut être assimilée à une bobine idéale (autoinductance L) en série avec sa résitance R.

• Variation temporelle du courant

À la fermeture du circuit, si la bobine est reliée à un générateur de f.e.m. e_o :

$$e_o = L\frac{di}{dt} + Ri(t) = \frac{e_o}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

À l'ouverture du circuit, $0 = L\dfrac{di}{dt} + Ri$, $i = \dfrac{e_o}{R}e^{-t/\tau}$ avec $\tau = L/R$.

• Énergie emmagasinée dans une bobine

Lorsque le régime permanent est atteint pour une intensité I du courant dans la bobine, celle-ci a emmagasiné l'énergie :

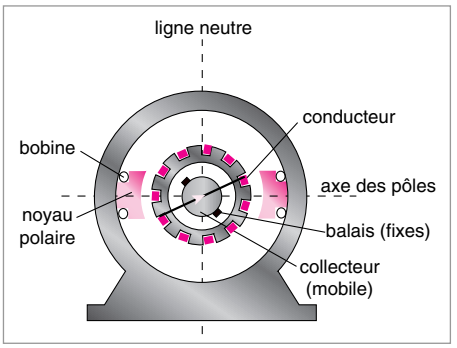
$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

9. Le moteur à courant continu

Nous consacrons une partie entière aux moteurs car ce sujet figure rarement aux programmes de l'enseignement supérieur classique, alors qu'il est enseigné dans les classes du secondaire. Il est donc au programme de l'écrit du CAPES.

9.1. Constitution d'un moteur

Le stator représente l'inducteur. Il est formé de noyaux polaires entourés de bobines qui sont alimentées en continu. Dans l'entrefer, le champ magnétique créé est uniforme, caractérisé par l'axe des pôles et la ligne neutre.



Le rotor correspond à l'induit. Il est constitué de spires rectangulaires conductrices, logées dans des encoches, alimentées en courant continu et solidaires d'un support isolant mobile.

Le collecteur et les balais relient l'induit au circuit électrique extérieur. Le collecteur est constitué de lames de cuivre, solidaires du rotor et liées à chaque spire de l'induit. Les balais sont fixes, ce sont des cylindres de carbone sur lesquels frottent les lames du collecteur.

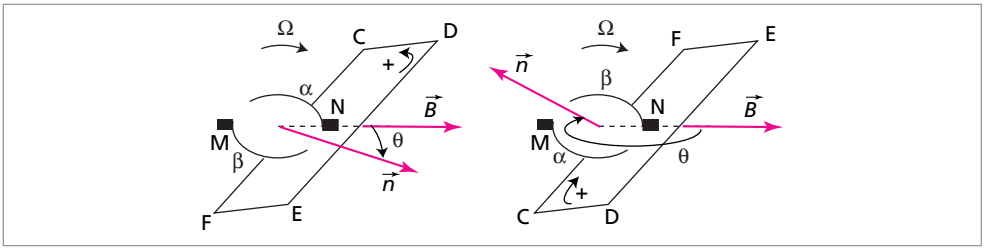
9.2. Phénomène d'induction

• Flux du champ magnétique sortant d'une spire

Une spire conductrice CDEF, solidaire du rotor et solidaire des collecteurs α et β, tourne à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe des pôles du stator. Celui-ci comprend des bobines qui créent un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, perpendiculaire à la ligne neutre. La spire est orientée arbitrairement par sa normale sortante $\vec{n}$. Si $\theta = \Omega t$ est l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ au temps t, le flux du champ magnétique sortant de la spire peut être défini par :

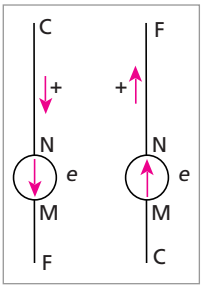
$$\Phi(t) = BS\cos\Omega t$$

Φ est positif pour $0 < \theta < \pi$ et négatif pour $\pi < \theta < 2\pi$



• F.e.m. d'induction

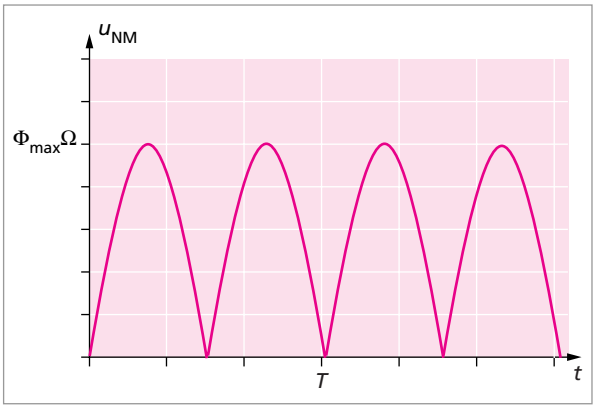
La spire est équivalente à un générateur dont le schéma équivalent électrique est représenté ci-contre :



$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\Omega\sin\Omega t = \Phi_{max}\Omega\sin\Omega t > 0$$

d'où $u_{NM} = e > 0$ dans le premier cas (pour $0 < \theta < \pi$) et $e < 0$ d'où $u_{NM} = -e > 0$ après un demi-tour de la spire ($\pi < \theta < 2\pi$).

La spire se comporte comme un **redresseur** dont la tension varie périodiquement au cours du temps.



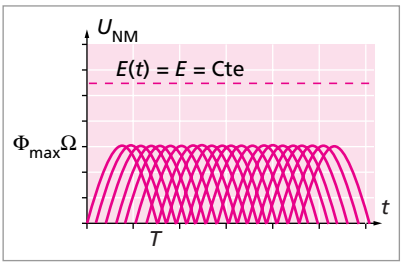
La valeur moyenne de cette f.e.m. vaut :

$$e_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \Phi_{max}\Omega \sin \Omega t \mathrm{d}t = \frac{2\Phi_{max}\Omega}{\pi}$$

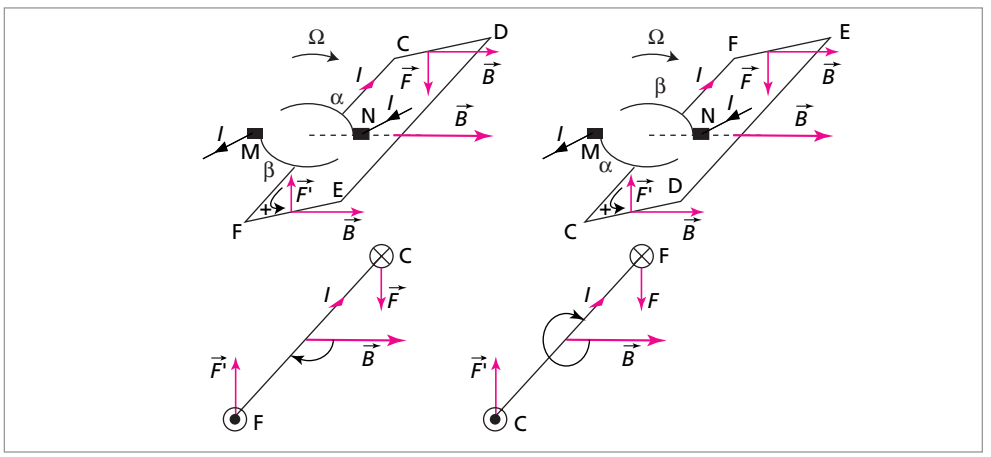
e_{moy} est donc proportionnel à la vitesse de rotation Ω.
Pour N spires :

$$E = K\Phi_{max}\Omega$$

avec $K = p\,N/2\pi a$ où $2p$ est le nombre de pôles inducteurs, N est le nombre de conducteurs actifs et $2a$ est le nombre de voies d'enroulement associées en parallèle.
(pour une spire, $p = 1, N = 2$ et $2a = 1$).



9.3. Couple électromagnétique



Les forces de Laplace s'exerçant sur chaque conducteur sont représentées ci-dessus, en perspective puis en vue de face pour $0 < \theta < \pi$ puis pour $\pi < \theta < 2\pi$. Elles forment un couple de moment :

$$T = FL|\cos \Omega t| > 0$$

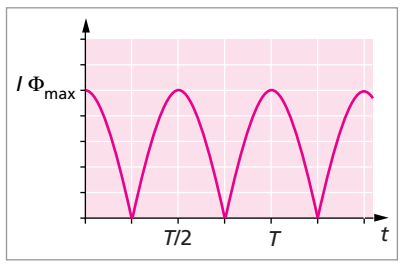
avec $F = I\ell B$.

$$T = ISB|\cos \Omega t| = I\Phi_{max}|\cos \Omega t|$$

T est donc proportionnel à $I\Phi_{max}$. Ses variations temporelles sont représentées sur la figure ci-contre.
La valeur moyenne de ce moment, calculé sur une période et pour une spire, vaut :

$$T_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T I\Phi_{max}\,|\cos \Omega t|\,\mathrm{d}t = \frac{2\Phi_{max}I}{\pi}$$

T_{moy} est donc proportionnel à I.



Pour N spires : $T = K\Phi_{max}I$

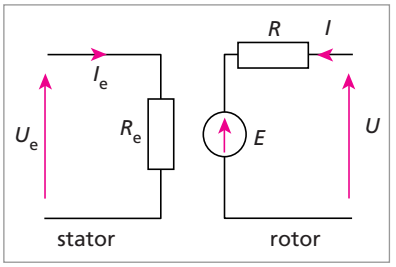
Remarque : on peut retrouver ce résultat à partir du théorème de Maxwell :

$$\delta W_{em} = I\mathrm{d}\Phi, \qquad \text{d'où} \qquad P_{em} = I\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t.$$

En remplaçant, il vient $T\Omega = EI$ or $E = K\Phi_{max}I$ donc $T = K\Phi_{max}I$

9.4. Moteur à excitation indépendante (ou séparée)

Dans ce type de moteur, l'alimentation de l'inducteur est indépendante de celle de l'induit.



• Schéma électrique équivalent

Aux bornes du stator (inducteur) :

$$U_e = R_eI_e$$

Aux bornes du rotor (induit) :

$U = E + RI$ avec $E = K\Phi_{max}\Omega$ et $T = \mathrm{K}\Phi_{max}I$

• Vitesse angulaire de rotation

$$U = E + RI = K\Phi_{max}\Omega + RI \qquad \text{d'où} \qquad \Omega = \frac{U - RI}{K\Phi_{max}}$$

– À vide :

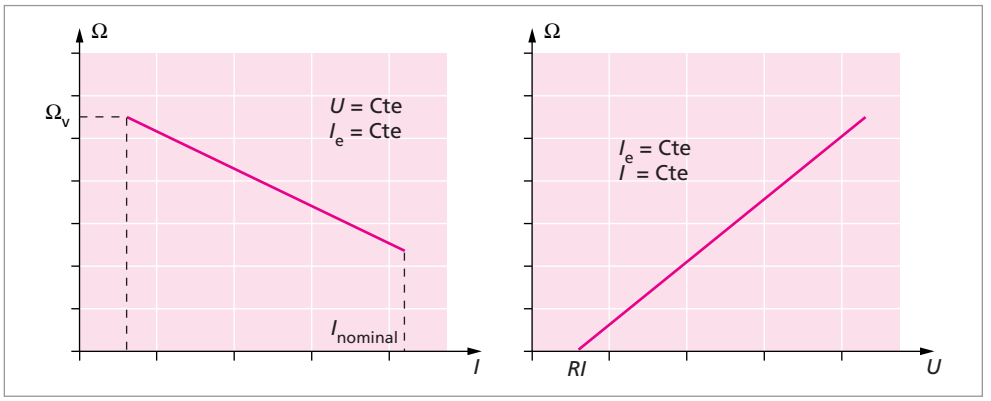
$$I = 0, \Omega = U/K\Phi_{max} = \Omega_v.$$

Attention, si $I_e \to 0, \Phi_{max} \to 0, \Omega_v \to \infty$: le moteur s'emballe et il y a danger.
Inconvénient : si I_e augmente, Φ_{max} augmente également et le circuit magnétique se sature ; Φ_{max} et Ω_v deviennent constants : I_e ne commande plus Ω_v.

– En charge :

$$I \neq 0 \qquad \Omega = \Omega_v - \frac{RI}{K\Phi_{max}} \qquad \Omega = \frac{U}{K\Phi_{max}} - \frac{RI}{K\Phi_{max}}$$

Les variations de la vitesse de rotation en fonction de I ou de U sont représentées ci-dessous. La rotation dans les 2 sens est possible, il suffit de changer I_e ou I.



• **Couple moteur**

Soit T_r le moment du couple de frottement du rotor et T_{em} celui des forces électromagnétiques qui s'exercent sur lui. Le rotor démarre si :

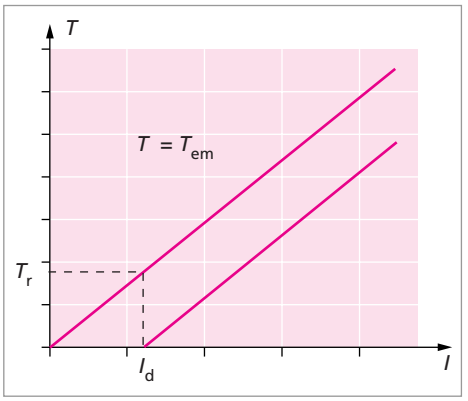
$$T_{em} > T_r, \text{ or } T_{em} = K\Phi_{max}I.$$

Il faut donc que

$$K\Phi_{max}I_d > I_r, \text{ soit } I_d > T_r/K\Phi_{max}$$

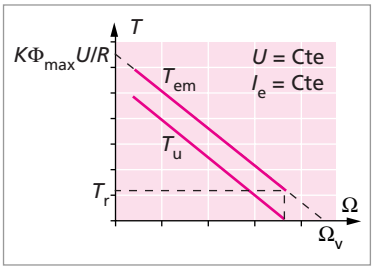
Si T_u est le moment utile, les pertes magnétiques et mécaniques seront

$$T_p = T_{em} - T_u$$



En général, la puissance perdue P_p est proportionnelle à Ω donc $T_p = \text{Cte}$.
Lorsque Φ_{max} est constant, I_e est constant et indépendant de U.

$$\begin{cases} T_{em} = K\Phi_{max}I \\ \Omega = \dfrac{U - RI}{K\Phi_{max}} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{U - \Omega K\Phi_{max}}{R} ;$$



$$T_{em} = \frac{K\Phi_{max}}{R}(U - \Omega K\Phi_{max}) = \frac{(K\Phi_{max})^2}{R}(\Omega_v - \Omega)$$

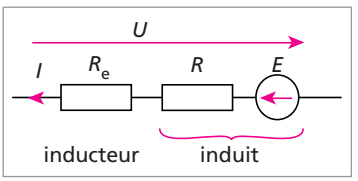
• **Bilan énergétique**

$$P_a = UI + U_eI_e \longrightarrow P_{em} = EI = T_{em}\Omega \longrightarrow P_u = T_u\Omega$$

$$P_J = RI^2 + R_eI_e^2 = RI^2 + U_eI_e \qquad P_p = T_p\Omega \text{ (pertes magnétiques et mécaniques)}$$

9.5. Moteur à excitation série

L'inducteur et l'induit sont alimentés par la même source selon le schéma électrique ci-contre.



$$U = E + (R_e + R)I \text{ or } I_e = I$$

d'où $\Phi_{max} = K'I$ et $E = K\Phi_{max}\Omega = KK'\Omega I$

$$T_u\Omega = EI = KK'\Omega I^2 \text{ or } T_u \approx T_{em} ; T_p \approx 0$$

donc $T_u = KK'I^2$ T_u est proportionnel à I^2 et est indépendant du sens de I.

Application : le « moteur universel » où le courant est alternatif (moulin à café, aspirateur, ...).
Avantage : une seule alimentation, qui peut être alternative.
Inconvénient : T_d est plus important que pour un moteur à excitation indépendante.
Conclusion :

- moteur à excitation indépendante : $T_{em,\,min} = T_d = K\Phi_{max} I_d$ proportionnel à I_d
- moteur à excitation série : $T_{em,\,min} = KK' I_d^2$ proportionnel à I_d^2.

10. Les équations de l'électromagnétisme en régime variable

Les propriétés ci-dessous s'appliquent à tout milieu portant soit une densité volumique de charges $\rho(M, t)$, soit une densité volumique de courant $\vec{j}(M, t)$, situées dans le vide.

10.1. Équation de continuité (conservation de la charge électrique)

- Cas particulier de distribution linéaire de charge ou de courant $\varrho(x, t)$ ou $\vec{j} = j(x, t)\vec{u_x}$:

$$\frac{\partial \varrho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0$$

- cas général :

$$\frac{\partial \varrho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0$$

10.2. Équation de Maxwell - Ampère

• Courant de déplacement

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_o \vec{j} + \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ceci est l'équation de Maxwell-Ampère. Le terme $\epsilon_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé « courant de déplacement ». La densité totale de courant $\vec{J} = \vec{j} + \mu_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est à flux conservatif (div $\vec{J} = 0$)

• Forme intégrale : théorème d'Ampère généralisé

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_o I + \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \Phi_{\vec{E}}}{\partial t}$$

• **Récapitulatif des quatre équations de Maxwell**

équation locale	équation intégrale	relation de passage
$\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\epsilon_o}$	$\iint \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_o}$	$E_{2\perp} - E_{1\perp} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_o}$
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = e = -\dfrac{\partial\Phi_{\vec{B}}}{\partial t}$	$E_{2//} = E_{1//}$
$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\oiint \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$	$B_{2\perp} = B_{1\perp}$
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_o\vec{j} + \epsilon_o\mu_o\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_o I + \epsilon_o\mu_o\dfrac{\partial\Phi_{\vec{E}}}{\partial t}$	$\vec{B}_{2//} - \vec{B}_{1//} = \mu_o\vec{j_\sigma}\wedge\vec{n_{12}}$

10.3. Potentiels

Potentiel vecteur :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{A}$$

Potentiel scalaire :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

• **Indétermination des potentiels**

– Tout couple $(V, \vec{A})$ tel que $\vec{A} = \vec{A_1} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}f$ et $V = V_1 + \dfrac{\partial f}{\partial t}$ où $f = f(\mathrm{M}, t)$ est une fonction quelconque, permet de décrire un champ électromagnétique initialement décrit par $(V_1, \vec{A_1})$.

– La « condition de jauge » est une condition supplémentaire qui facilite l'utilisation de ces potentiels.

– Jauges courantes :

$$\text{jauge de Coulomb} \quad : \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0$$

$$\text{jauge de Lorentz} \quad : \quad \operatorname{div}\vec{A} + \epsilon_o\mu_o\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

• **Équations portant sur les potentiels**

– équations générales :

$$\Delta V + \frac{\partial\operatorname{div}\vec{A}}{\partial t} + \frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$$

$$\Delta\vec{A} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \epsilon_o\mu_o\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \epsilon_o\mu_o\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_o\vec{j} = \vec{0}$$

– avec la jauge de Coulomb :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$$

$$\Delta \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\epsilon_o \mu_o \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$$

– avec la jauge de Lorentz :

$$\Delta V - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$$

11. Ondes électromagnétiques dans le vide

Dates importantes : En 1873, Maxwell publie ses quatre équations. En 1888, Hertz réalise le premier générateur d'ondes électromagnétiques.

11.1. Équation de propagation

Dans le vide, $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent aux équations différentielles suivantes, dites de d'Alembert :

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ se propagent à la vitesse de la lumière : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$

11.2. Une solution particulièrement simple : l'onde plane homogène

Soit une onde plane se propageant dans le sens positif de l'axe Oz, sans déformation ni aténuation : $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ sont des fonctions de $\left(t - \dfrac{z}{c}\right)$.

• Transversalité du champ électrique

La relation div$\vec{E}$=0 entraîne $E_z = 0$. Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire porté par Oz, dirigé dans le sens de la propagation :

$\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$

• Détermination du champ magnétique

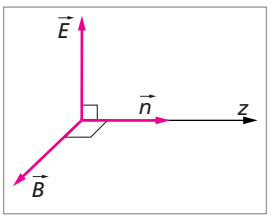
La relation $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ entraîne, en coordonnées cartésiennes : $B_x = -\dfrac{E_y}{c}$, $B_y = -\dfrac{E_x}{c}$ et $B_z = 0$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{E}}$$

• Structure de l'onde

Il s'ensuit que le trièdre $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{n})$ est direct pour une onde plane, à tout instant, et qu'en tout point de l'espace :

$$\frac{\|\overrightarrow{E}\|}{\|\overrightarrow{B}\|} = c$$



11.3. Ondes sinusoïdales. Polarisation

• Expression des champs

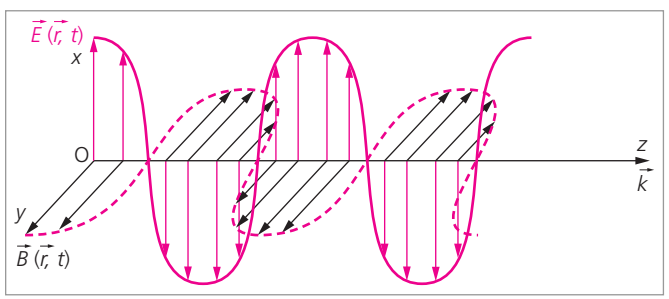
Soit $\overrightarrow{k} = \dfrac{\omega}{c}\overrightarrow{n}$ le vecteur d'onde, : E_{ox} et E_{oy} les amplitudes, φ et Ψ les phases :

$$\overrightarrow{E}(M,t) \left| \begin{array}{l} E_x = E_{ox}\cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_y = E_{oy}\cos(\omega t - kz + \Psi) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{B}(M,t) \left| \begin{array}{l} B_x = -\dfrac{E_{oy}}{c}\cos(\omega t - kz + \Psi) \\ B_y = \dfrac{E_{ox}}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi) \\ B_z = 0 \end{array} \right.$$

• Polarisation rectiligne

Si $\varphi = \Psi$ ou $\varphi = \Psi + \pi$, $\dfrac{E_y}{E_x}$ = Constante : la direction de $\overrightarrow{E}$ reste invariable dans le temps et dans l'espace : l'onde est polarisée rectilignement. Exemple : les champs électrique et magnétique sont représentés ici à la même date t.



• Polarisation circulaire ou elliptique

Si $\varphi = \Psi + \dfrac{\pi}{2} (\text{mod } 2\pi)$, $\dfrac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \dfrac{E_y^2}{E_{oy}^2} = 1$. L'extrémité de $\overrightarrow{E}$ (ou de $\overrightarrow{B}$), en un point donné M de l'espace, décrit une ellipse au cours du temps, d'axes parallèles à Ox et Oy : l'onde possède une polarisation elliptique (droite ou gauche). Si, de plus, $E_{ox} = E_{oy}$, la polarisation est circulaire.

• Production du rayonnement électromagnétique polarisé

Il existe plusieurs types d'émetteurs d'ondes électromagnétiques polarisées : les émetteurs de radio-diffusion, le rayonnement synchrotron, certains lasers, la lumière diffusée par les atomes et les molécules dans certaines conditions.

11.4. Énergie électromagnétique : densité volumique et flux

• Expression de la conservation de l'énergie

$$\text{div}\,\overrightarrow{P} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

où w est la densité volumique d'énergie contenue dans le volume τ :

$$W = \iiint_{\tau} w(\text{M}, t)\,\text{d}\tau,$$

et où $\overrightarrow{P}$ est le vecteur de Poynting dont le flux à travers une surface Σ est égal à la puissance pénétrant dans τ :

$$\mathcal{P} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{n}\,\text{d}S.$$

• Expression de w et de $\overrightarrow{P}$

$$\overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_o} \qquad \text{et} \qquad w = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$$

• Intensité d'une onde électromagnétique

C'est la puissance moyenne qui traverse un élément de surface d'onde d'aire unité :

$$I = \frac{\langle \text{d}P \rangle}{\text{d}S}$$

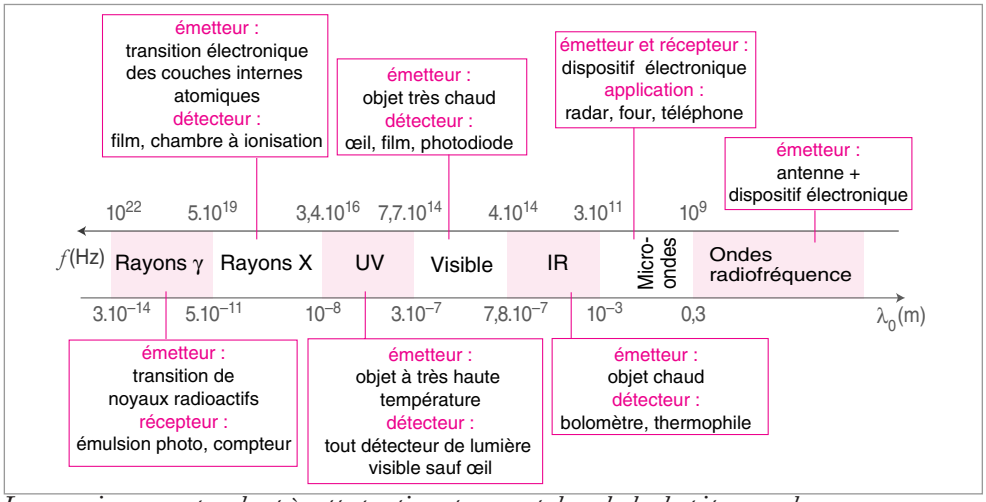
Dans le cas de l'onde plane homogène, on peut écrire :

$$I = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_o c} = \frac{c \langle B^2 \rangle}{\mu_o}$$

Dans le cas d'une onde plane homogène et sinusoïdale, on a :

$$I = \frac{E_{ox}^2 + E_{oy}^2}{2}$$

11.5. Vue d'ensemble des radiations électromagnétiques



Les exercices correspondant à cette partie se trouvent dans la le chapitre « ondes »

12. Électromagnétisme de la matière : étude macroscopique des diélectriques

12.1. Mise en évidence du rôle des diélectriques en électrostatique : polarisation induite

• Expérience

La capacité d'un condensateur augmente quand on introduit un diélectrique entre ses armatures. Cela se traduit par une augmentation de la charge portée par les armatures lorsqu'elles sont maintenues sous tension constante, ou bien par une diminution de cette tension lorsque la charge est maintenue constante.

• Interprétation qualitative

Des charges apparaissent sur les surfaces du diélectrique : celui-ci s'est polarisé sous l'effet du champ électrique régnant entre les armatures (polarisation induite par $\overrightarrow{E}$).

12.2. Vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$

Soit $\overrightarrow{p}$ le moment dipolaire électrique d'un atome, d'une molécule ou d'un ion du diélectrique. Soit $\Delta\tau$ un élément de volume de ce diélectrique contenant au moins 10^6 atomes ou molécules. Le moment dipolaire par unité de volume du diélectrique est défini par :

$$\overrightarrow{P} = \frac{\Sigma \overrightarrow{p}}{\Delta\tau}$$

$\| \overrightarrow{P} \|$ s'exprime en $C.m^{-2}$.

Dans le cas particulier de la polarisation induite, $\overrightarrow{P} = \rho_e \overrightarrow{\delta}$ où ρ_e est la densité volumique des charges électroniques et $\overrightarrow{\delta}$ le déplacement du barycentre des charges électroniques induit par le champ électrique entre les armatures.

12.3. Susceptibilité électronique χ_e

Elle traduit la proportionalité entre le vecteur polarisation et le champ électrique qui lui a donné naissance.

$$\overrightarrow{P} = \varepsilon_o \chi_e \overrightarrow{E}$$

χ_e est une grandeur caractéristique du diélectrique sans dimension. χ_e rend compte de la facilité de déplacement des électrons.
La définition ci-dessus n'est valable que si le diélectrique est gazeux ou bien solide LHI (linéaire, homogène et isotrope) seulement.

12.4. Répartition des charges de polarisation

Densité surfacique des charges
Si $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante au diélectrique :

$$\sigma_p = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{n}$$

Densité volumique de charges

$$\rho_p = -\operatorname{div} \overrightarrow{P}$$

Courant de polarisation

$$\overrightarrow{j_p} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}$$

12.5. Potentiel et champ à l'intérieur du diélectrique

Potentiel

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint_\tau \frac{\rho \mathrm{d}\tau}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint \frac{\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u} \mathrm{d}\tau}{r^2} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{P\mathrm{M}}}{r} \quad \text{et} \quad r = \mathrm{PM}$$

Champ électrique

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_o} + \overrightarrow{E_d}$$

où $\overrightarrow{E_o}$ est le champ électrique en l'absence de diélectrique et $\overrightarrow{E_d}$ le champ dépolarisant créé par les charges de polarisation σ_p et ρ_p.

Il existe deux méthodes pour calculer $\overrightarrow{E}$: la méthode itérative et la méthode self-consistante (voir exercice 41).

12.6. Équations de Maxwell et conséquences

Forme locale du théorème de Gauss

$$\operatorname{div} \overrightarrow{D} = \rho$$

où $\overrightarrow{D} = \varepsilon_o \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$ est le vecteur déplacement électrique. Seules les densités volumiques réelles de charge sont à considérer.
Si le diélectrique est un gaz ou un solide LHI : $\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \overrightarrow{E}$ où $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ est la permittivité relative et $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ la permittivité absolue du diélectrique. $\varepsilon_r \geqslant 1$ et $\varepsilon \geqslant \varepsilon_o$.

Théorème de Gauss

$$\iint \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = \Sigma Q_{\text{int}}$$

Relations de passage entre deux diélectriques

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \qquad \text{et} \qquad E_{t2} = E_{t1}$$

Seules les densités surfaciques réelles de charge sont à considérer.
Équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_o \left[\overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \right]$$

$\dfrac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$ est le courant de déplacement de Maxwell, il est en fait homogène à une densité volumique de courant.

13. Électromagnétisme de la matière : étude microscopique des diélectriques

13.1. Polarisation électronique des atomes

Moment dipolaire induit

$$\overrightarrow{p} = Z_e \overrightarrow{G_- G_+}$$

où G_+ est le barycentre des charges positives de l'atome, G_- est le barycentre des charges négatives de l'atome et Z_e est son numéto atomique.

Modèle de l'électron élastiquement lié (atome d'hydrogène)

$$\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{G_+G_-} = -\frac{4\pi\varepsilon_o a_o^3}{e}\overrightarrow{E} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{p} = \varepsilon_o \alpha \overrightarrow{E}$$

a_o représente le « rayon » de l'atome, α la polarisabilité atomique exprimée en m^3.

Expression quantique de la polarisabilité

$$\alpha = \frac{e^2}{m}\sum_n \frac{f_n}{\omega_{on}^2}$$

f_n est la force d'oscillateur du $n^{\text{ième}}$ électron et ω_{on} sa pulsation de résonance.

Relation entre polarisabilité et susceptibilité

$$\chi_e = N\alpha$$

où N représente le nombre d'atomes par unité de volume.

13.2. Polarisation des molécules

Molécules non polaires

La polarisabilité électronique s'écrit $\overrightarrow{p_e} = \alpha_e \varepsilon_o \overrightarrow{E}$, elle représente le déplacement des électrons induit par $\overrightarrow{E}$.

La polarisabilité atomique (ou ionique) s'écrit $\overrightarrow{p_a} = \alpha_a \varepsilon_o \overrightarrow{E}$: elle traduit la modification des distances inter-atomiques ou des angles entre les liaisons.

La susceptibilité devient $\chi = N(\alpha_e + \alpha_a)$.

Molécules polaires

Elles possèdent un moment dipolaire permanent. Par exemple, on mesure des moments dipolaires de $p = 1{,}1$ D pour HCl, 1,47 D pour NH_3, 1,85 D pour H_2O et 9 D pour NaCl. (D est le symbole du debye : 1 D $= \frac{1}{3}10^{-29}$ C.m)

Influence de la température (théorie de Langevin) : si $\frac{pE}{kT} \ll 1$, $\overrightarrow{P} = \frac{Np^2}{3kT}\overrightarrow{E}$ et la susceptibilité $\chi = \frac{Np^2}{3\varepsilon_o kT}$ est inversement proportionelle à la température.

13.3. Bilan des polarisations des diélectriques

Cas des gaz

$$\overrightarrow{P} = \varepsilon_o\left(\chi_e + \chi_a + \frac{Np^2}{3\varepsilon_o kT}\right)\overrightarrow{E}$$

Le 1er terme traduit la déformation du nuage électronique, le 2e celui des liaisons et le 3e s'applique aux molécules polaires.

Cas des matériaux condensés

On définit différents champs électriques :

- le champ macroscopique $\overrightarrow{E_{\text{macro}}} = \overrightarrow{E_{\text{ext}}} + \overrightarrow{E_{\text{d}}}$. $\overrightarrow{E_{\text{d}}}$ est le champ dépolarisant dû aux charges de polarisation. C'est $\overrightarrow{E_{\text{macro}}}$ qui intervient dans l'expression de $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o \chi \overrightarrow{E_{\text{macro}}}$ ainsi que dans les équations de Maxwell.
- le champ microscopique $\overrightarrow{E_{\text{micro}}}$ tel que $\overrightarrow{E}_{\text{macro}} = \frac{1}{\tau}\iiint \overrightarrow{E_{\text{micro}}} \mathrm{d}\tau$.
- le champ local $\overrightarrow{E_l}(\mathrm{M})$ qui est le champ créé en M par toutes les charges extérieures et intérieures sauf celles situées en M : $\overrightarrow{E}_l(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E_{\text{macro}}} + \frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$. Le champ local intervient dans $\overrightarrow{p} = \varepsilon_o \alpha \overrightarrow{E_\ell}$.

Cas des liquides et des matériaux LHI

- $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o \chi \overrightarrow{E_{\text{macro}}}$
- C'est le cas des électrets (utilisés dans certains haut-parleurs).
- C'est aussi le cas des matériaux ferroélectriques comme $BaTiO_3$: en dessous de la température de Curie, apparaît une polarisation rémanente, un champ coercitif et une courbe d'hystérésis $P = f(E_{\text{ext}})$.

14. Électromagnétisme de la matière : milieux aimantés

14.1. Dipôle magnétique

• Potentiel à grande distance d'une boucle de courant plane

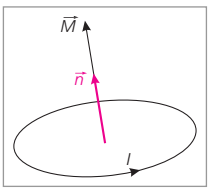
On définit son moment dipolaire magnétique par

$$\boxed{\overrightarrow{M} = IS\,\overrightarrow{n}}$$

où I est l'intensité du courant circulant dans la bouche, S sa surface est $\vec{n}$ sa normale sortante.

Elle crée en tout point M, distant de r de son centre O, le potentiel-vecteur

$$\overrightarrow{A(\mathrm{M})} = \frac{\mu_o}{4\pi r^3}\overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$



• Généralisation pour une boucle de courant non plane

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \frac{I}{2}\oint \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

• Dipôle magnétique soumis à un champ magnétique extérieur uniforme

- La résultante des forces appliquées au dipôle magnétique est nulle :

$$\boxed{\Sigma \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}}$$

Si le champ magnétique extérieur n'est pas uniforme : $\Sigma \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}})$.

– Le moment résultant des forces appliquées au dipôle vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}}$$

– L'énergie potentielle du dipôle s'écrit :

$$\boxed{U = -\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}}}$$

Elle entraîne deux positions d'équilibre : l'une est stable quand $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ sont parallèles et de même sens, l'autre instable quand $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ sont parallèles et de sens opposés.

14.2. Moments dipolaires magnétiques dans la matière

• Matériaux dia-, para- et ferro-magnétiques

Si le champ $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ n'est pas uniforme :

– matériau diamagnétique : les moments $\overrightarrow{M}$ sont repoussés par les champs intenses avec $\overrightarrow{M} // -\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$,

– matériau paragnétique : les moments $\overrightarrow{M}$ sont attirés par les champs intenses avec $\overrightarrow{M} // \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$,

– matériau ferromagnétique : l'attraction entre $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ est très importante.

On définit l'aimantation (ou polarisation magnétique) comme le moment magnétique moyen par unité de volume :

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \frac{\Sigma \overrightarrow{M_{\text{i}}}}{V}}$$

• Moment magnétique et moment cinétique atomiques

Dans une image « simplette » où l'électron est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon a, de vitesse $\overrightarrow{v}$ autour du noyau N, son moment cinétique vaut $\overrightarrow{L} = amv\overrightarrow{n}$. Son moment magnétique orbital vaut :

$$\overrightarrow{M_{\text{L}}} = \frac{q}{2m}\overrightarrow{L}$$

où $\frac{q}{2m}$ est le rapport gyromagnétique.

Les résultats de la mécanique quantique relativiste conduisent à définir :

– le moment magnétique de spin : $\overrightarrow{M_{\text{S}}} = \frac{q}{m}\overrightarrow{S}$ où $\overrightarrow{S}$ est le moment cinétique intrinsèque de spin de l'électron,

– le moment cinétique total de l'atome : $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S}$,

– le moment magnétique total de l'atome : $\overrightarrow{M} = g\frac{q}{2m}\overrightarrow{J}$ où g est le facteur de Landé.

14.3. Description d'un échantillon de matière aimantée

Vecteur aimantation : voir partie 14.2.

Courants ampériens : ils assimilent le mouvement des électrons à une boucle de courant de quelques angströms de rayon.

Courant superficiel d'aimantation : si $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante au matériau d'aimantation $\overrightarrow{M}$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{j_\sigma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{n}}$$

Courant volumique d'aimantation

$$\boxed{\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{M}}$$

14.4. Équations de Maxwell dans la matière aimantée

On définit l'excitation magnétique par

$$\boxed{\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_o} - \overrightarrow{M}}$$

L'équation de Maxwell - Ampère devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}}$$

Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit :

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = I_{\text{enlacés}} + \frac{\partial \Phi_{\overrightarrow{D}}}{\partial t}$$

où $\Phi_{\overrightarrow{D}}$ est le flux du vecteur déplacement $\overrightarrow{D}$ sortant de la surface définie par le contour sur lequel on calcule la circulation de $\overrightarrow{H}$.
Les relations de passage s'écrivent :

$$B_{n2} = B_{n2}$$

$$\overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H}_1 = \overrightarrow{j_\sigma} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

où $\overrightarrow{j_\sigma}$ représente les courants surfaciques autres que ceux d'aimantation ou de polarisation.
La susceptibilité magnétique χ_m et les perméabilités magnétiques relative μ_r et absolue μ sont définies par :

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\overrightarrow{H} = \mu_o\mu_r\overrightarrow{H} = \mu\overrightarrow{H}$$

Ces relations sont valables pour des matériaux paramagnétiques ($\chi_m \simeq 10^{-5}$) et diamagnétiques ($\chi_m \simeq -10^{-8}$). Elles ne sont pas valables pour des matériaux ferromagnétiques où χ_m dépend de H et peut atteindre 10^6.

ÉNONCÉS

Forces, champs et potentiels électrostatiques

Exercice 1 Expérience de Millikan

Une petite goutte d'huile, assimilée à une sphère homogène de rayon r et de masse volumique ρ est pulvérisée entre les armatures horizontales d'un condensateur plan. Un générateur permet d'établir entre ces armatures, distantes de d, une différence de potentiel U.

Dans le cas des très faibles vitesses, l'air, de masse volumique ρ_o, exerce sur la goutte, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$, une force de frottement qui peut s'exprimer selon la loi de Stokes :

$$\overrightarrow{f} = -6\eta\pi r\overrightarrow{v}$$

où η est le coefficient de viscosité de l'air.

Lors du passage dans le « vaporisateur », la goutte s'est chargée et porte la charge q. Son mouvement est ensuite observé au microscope.

Données : $\rho = 885$ kg.m^{-3} ; $\rho_o = 1{,}3$ kg.m^{-3} ; $\eta = 1{,}85.10^{-5}$ uSI ; $d = 6$ mm ; $U = 200$ V ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

1. Faire le bilan des forces exercées sur la goutte sans oublier la poussée d'Archimède.

2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse de la goutte. Montrer que la vitesse atteint rapidement une valeur limite que l'on notera v_l. Au bout de combien de temps peut-on faire une mesure correcte de cette vitesse limite ?

3. En l'absence de champ électrostatique, que vaut la vitesse limite v_o atteinte par la goutte ? En déduire l'expression de son rayon r en fonction de v_o.

A.N. Dans ces conditions la goutte parcourt 1 mm en 8,9 s. Calculer r. Une mesure optique aurait-elle été possible ?

4. Calcul de la charge portée par la goutte : exprimer v_l en fonction de v_o et en déduire l'expression de q. Calculer la charge de la goutte, sachant que celle-ci parcourt 1 mm en 6,4 s, en présence de champ électrique. Conclure.

Exercice 2 Champ et potentiel d'un disque de rayon R chargé en surface

La densité surfacique de charge portée par le disque est notée σ, elle est supposée constante.

1. Quelle est, par raison de symétrie, la direction du champ électrostatique créé en un point quelconque de l'axe du disque, situé à la distance z de son centre ? Calculer la norme de ce champ.

Représenter graphiquement les variations de E en fonction de z. Le champ est-il continu à la traversée du disque chargé ? Calculer la discontinuité éventuelle.

2. Que vaut E loin du centre du disque ($z \gg R$) ? Interprétez le résultat.

3. Que vaut E, de part et d'autre du disque, lorsque $R \to \infty$? On obtient ainsi le champ créé par un plan uniformément chargé.

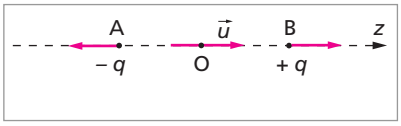
4. Calculer le potentiel en un point M de l'axe situé à la distance z du centre du disque, à partir de la définition du potentiel d'une charge ponctuelle.

Reprendre ce calcul à partir de l'expression du champ électrique obtenue à la question 1.

Représenter graphiquement V en fonction de z. Traiter le cas où $z \gg R$.Traiter le cas où $R \to \infty$ (plan infini).

Y a-t-il discontinuité du potentiel à la traversée du disque ?

Exercice 3 Champ et potentiel d'un dipôle électrostatique à grande distance



L'ensemble des deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$, situées en A et en B, telles que AB $= d$, forme un dipôle électrostatique que l'on définit par son moment dipolaire $\overrightarrow{p} = -q\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = q\mathrm{d}\,\overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire porté par AB et dirigé de la charge $-q$ vers la charge $+q$.

1. Quels sont les plans de symétrie du système ? Quelles en sont les conséquences pour le potentiel V(M) et le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$(M), en un point M quelconque de l'espace ?

2. Calcul du potentiel V(M) à grande distance : soit O le milieu de AB, M un point quelconque de l'espace défini par ses coordonnées polaires :

$$r = \mathrm{OM} \qquad \text{et} \qquad \theta = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}}).$$

Donner l'expression de V(M), dans le cas où $r \gg d$:

– en fonction de q, d, r et θ ;

– en fonction de p, r et θ ;

– en fonction de $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et r.

3. Calcul du champ électrostatique à grande distance ($r \gg d$) : connaissant l'expression du potentiel V(M), déterminer les composantes E_r, E_θ et E_ϕ de $\overrightarrow{E}$(M) en coordonnées sphériques.

Exercice 4 Cas de la molécule d'HCl

La distance entre le noyau de chlore et le noyau d'hydrogène vaut $d = 1{,}28.10^{-10}$ m. On suppose, dans une première approximation, que l'électron de l'hydrogène est transféré entièrement sur l'atome de chlore. Il forme alors, avec les autres électrons du chlore, une sphère chargée négativement, centrée sur le noyau de chlore.

1. Calculer le moment dipolaire de la molécule HCl correspondant à cette hypothèse.

2. En réalité, le moment dipolaire électrique expérimental de la molécule vaut $3{,}6.10^{-30}$ C.m. En déduire la position exacte du barycentre des électrons dans la molécule.
Données : charge de l'électron : $-1{,}6.10^{-19}$ C ; numéro atomique du Cl : 17.

Exercice 5 Dipôle électrique rigide dans un champ électrostatique extérieur

1. Soit deux charges $-q$ et $+q$ placées en A et B, distantes de AB $= d$ et situées dans un champ électrostatique $\overrightarrow{E_{ext}}$ uniforme.

a. Exprimer la force résultante et le moment du couple s'exerçant sur le dipôle en fonction de son moment dipolaire $\overrightarrow{p}$.

b. Montrer que l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ extérieur vaut :

$$U = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E_{ext}}$$

c. Étudier les positions d'équilibre du dipôle et discuter leur stabilité.

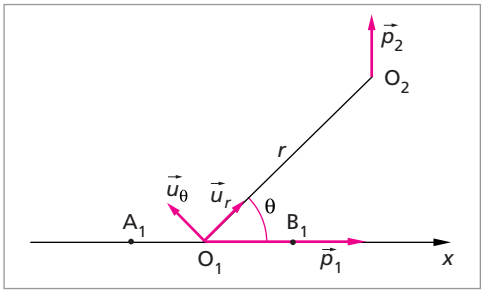
2. Le dipôle est placé maintenant dans un champ électrostatique extérieur quelconque.

a. Établir l'expression de la force résultante s'exerçant sur le dipôle.

b. Établir l'expression du moment du couple agissant sur le dipôle.

c. Quelles sont les actions de ce couple et de la force résultante ? Existe-t-il une position d'équilibre du dipôle ?

d. Que vaut l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ extérieur ?

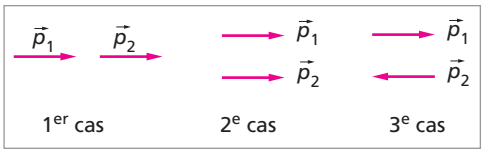


3. Le dipôle précédent $\overrightarrow{p_2}$ est maintenant placé dans le champ d'un autre dipôle $\overrightarrow{p_1}$.

a. Donner l'expression du champ électrostatique créé par le dipôle $\overrightarrow{p_1}$ au centre O_2 du dipôle $\overrightarrow{p_2}$.

b. Exprimer l'énergie d'interaction entre $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$.

c. Application : y a-t-il attraction ou répulsion dans les trois représentations ci-contre, les centres des deux dipôles étant toujours distants de r ?



d. Conclusion : comment doivent être disposés les dipôles électrostatiques des macromolécules polaires les plus stables ?

Exercice 6 Détermination d'une répartition de charges

Une sphère S, de centre O et de rayon a, porte une densité volumique de charges ρ ainsi qu'une densité surfacique σ. La répartition des charges est telle que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M intérieur à la sphère est de la forme :

$$\overrightarrow{E_{\text{int}}} = \alpha\overrightarrow{\text{OM}} + E_0\overrightarrow{u_z}$$

où α et E_o sont des constantes et $\overrightarrow{u_z}$ un vecteur unitaire porté par l'axe $z'z$.
La symétrie suggère que ρ et σ sont des fonctions de r et de θ seulement (en coordonnées sphériques).

1. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{E_{\text{int}}}(\text{M})$ en coordonnées cartésiennes.

2. En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V_{\text{int}}(\text{M})$ en fonction de x, y et z à une constante additive près que l'on notera C. Montrer qu'en coordonnées sphériques, ce potentiel s'écrit : $V_{\text{int}}(\text{M}) = -(1/2)\alpha r^2 - E_o r\cos\theta + C$

3.a. À partir de la forme locale du théorème de Gauss, déterminer la densité volumique de charge $\rho(\text{M})$ dans S. Comment varie-t-elle ?

b. Retrouver ce résultat en utilisant l'équation de Poisson.

4. Calculer la composante radiale $\overrightarrow{E_{\text{int,r}}}(\text{M})$ du champ dans S en fonction de r et θ. Quelle est sa limite lorsque r tend vers a par valeurs inférieures, à θ constant ?

5. À l'extérieur de S, le potentiel est de la forme :

$$V_{\text{ext}}(\text{M}) = (\alpha a^3/r)_+(\lambda\cos\theta/r^2)$$

où λ est une constante inconnue. Calculer C et λ.

6. Calculer la composante radiale $\overrightarrow{E_{\text{ext,r}}}(\text{M})$ du champ à l'extérieur de S, en fonction de r et θ. Quelle est sa limite lorsque r tend vers a par valeurs supérieures, à θ constant ?

7. Déduire des résultats précédents la densité surfacique de charges σ portée par S. Comment varie-t-elle ?

8. Montrer que, lorsqu'on calcule la charge totale portée par S, la répartition surfacique donne une contribution nulle. Calculer la charge totale Q de S.

9.a. En généralisant la définition du moment dipolaire en O de plusieurs charges ponctuelles, définir le moment dipolaire $\overrightarrow{p_{\text{vol}}}$ en O, dû à la charge volumique, ainsi que le moment dipolaire $\overrightarrow{p_{\text{surf}}}$ en O, dû à la charge surfacique.

b. Montrer que $\overrightarrow{p_{\text{vol}}} = \overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{p_{\text{surf}}}$ est parallèle à $\overrightarrow{u_z}$.

c. Calculer le moment dipolaire total $\overrightarrow{p}$ de la sphère en O.

10. Réécrire $V_{\text{ext}}(\text{M})$ en fonction de Q et p. Discuter l'expression obtenue.

Conducteurs en équilibre électrostatique

Exercice 7 Condensateur sphérique

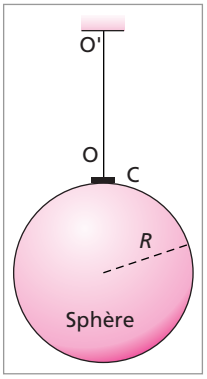
On considère, dans l'air, une sphère creuse (S_1) conductrice de rayon R_1 et une sphère creuse (S_2) concentrique, de rayon $R_2 > R_1$ et d'épaisseur infiniment mince. On désigne par Q_1 et Q_2 les charges totales portées par chacune des sphères et par V_1 et V_2 leurs potentiels respectifs.

1. Établir l'expression de la capacité C du condensateur sphérique ainsi formé.
A.N. $R_2 = 2R_1$; $R_1 = 9.10^{-2}$ m ; calculer C.

2. On applique une différence de potentiel $V_o = V_1 - V_2$ entre les armatures de ce condensateur. Que vaut la charge du condensateur Q_o ? A.N. $V_o = 2\,000$ V.

3. Ce condensateur de capacité C est ensuite isolé, puis relié à un autre condensateur sphérique de capacité C', initialement neutre. Exprimer, dans le nouvel équilibre électrostatique, les charges Q et Q' de chacun des condensateurs en fonction de C, C' et V_o. Déterminer la différence de potentiel V aux bornes des condensateurs. Calculer Q, Q' et V dans le cas où $C' = 3C$.

Exercice 8 Pression électrostatique



Une sphère conductrice S, de rayon R, est suspendue à un fil isolant OO′. Elle est portée au potentiel V.
Au point d'attache O, on interpose un petit disque circulaire C, conducteur, d'épaisseur négligeable, de masse m et de rayon $r \ll R$. Ce disque est en contact avec la sphère et peut coulisser sans frottement le long de OO′. On admet que la répartition des charges à la surface de l'ensemble (sphère + disque) est celle d'une sphère de rayon R portée au potentiel V.

1. Exprimer la pression électrostatique en fonction de R et V.
En déduire la force électrostatique qui s'exerce sur le disque.

2. Pour quelle valeur V_o du potentiel V le disque décolle-t-il de la sphère ?

3. À quelle hauteur h au dessus du point O, le disque s'élève-t-il lorsque le potentiel de la sphère vaut $V > V_o$?

Exercice 9 Condensateur plan

Les armatures d'un condensateur plan ont chacune une surface S et sont distantes de d.

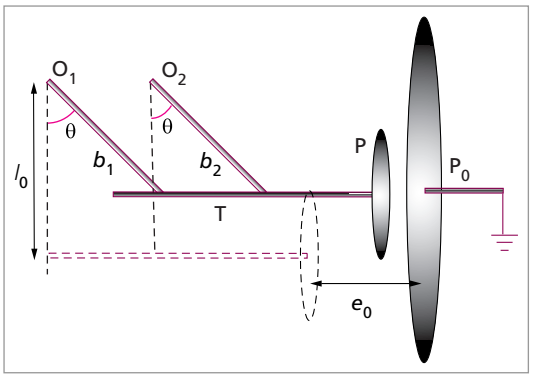
1. Calculer sa capacité.

2. Le condensateur ayant une charge Q, on éloigne les armatures en les conservant parallèles et en regard, jusqu'à ce que leur distance soit égale à $d' > d$. Pendant ce déplacement,

les armatures sont isolées et la charge Q reste constante. Calculer le travail fourni par l'opérateur et le comparer à la variation d'énergie électrostatique du condensateur.

3. Même question lorsque le déplacement de d à d' est effectué sous une différence de potentiel constante entre les plaques.

Exercice 10 Étude de décharges électriques (d'après CAPES 1993)



Pour mesurer les tensions importantes qui peuvent prendre naissance lors d'un phénomène météorologique, on peut avoir recours au dispositif ci-dessous, simplification de l'électromètre d'Abraham.

Ce dispositif comporte essentiellement un plateau (P) circulaire, de surface S sur l'axe duquel est soudée d'un seul côté une tige (T) ; la tige est constamment maintenue horizontale grâce à une suspension bifilaire (O_1, b_1, O_2, b_2) ; les barres b_1 et b_2 sont constamment dans un plan vertical - celui de la figure -, et leur longueur commune est l_o. La masse de cet équipage mobile est m.

On met en regard du plateau (P) un plateau (P_o) qui est relié à la terre. Lorsque l' équipage mobile est également au potentiel nul, $b1$ et $b2$ sont verticales et la distance $P - P_o$ vaut e_o. Si l'on soumet l'équipage mobile à un potentiel V, il se déplace sous l'effet d'actions électrostatiques que l'on considérera comme situées exclusivement sur (P). Le champ électrostatique régnant entre (P) et (P_o) est supposé être celui qui y régnerait s'il n'y avait pas d'effets de bord.

1. V étant donné et θ supposé connu, quelle est l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur le plateau (P) en fonction de ε_o, V, S, e_o, l_o et θ ?

2. En déduire l'équation qui donne la valeur de θ à l'équilibre en fonction des paramètres ε_o, V, S, e_o, l_o, m et g.

3. On suppose que V est suffisamment « faible » pour que $\theta \ll 1°$. Donner dans ce cas une expression approchée de θ en fonction des mêmes paramètres.

4. On prend $S = 10^{-2}$ m^2, $e_o = 10^{-1}$ m, $l_o = 1$ m, $m = 1$ kg, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

a. Quelle est la valeur maximale que pourrait prendre θ ?

b. On considère que l'appareil ne peut fonctionner que si θ ne dépasse pas la moitié de cette valeur maximale. À quelle tension maximale mesurable V ceci correspond-il ?

Énergie potentielle d'interaction électrostatique

Exercice 11 Énergie potentielle d'une distribution volumique de charges

On se propose de calculer, de trois façons différentes, l'énergie potentielle électrostatique d'une sphère de rayon R, chargée uniformément en volume et portant une charge Q.

1. En calculant une intégrale faisant intervenir la charge volumique ρ et le potentiel $V(r)$ créé par la sphère en tout point de son intérieur.

2. En imaginant que la sphère est construite par couches successives, c'est-à-dire en coquilles sphériques de charge volumique ρ, de rayon r et d'épaisseur dr.

3. En utilisant la densité locale d'énergie.

Exercice 12 Énergie potentielle d'un cristal ionique à une dimension

Calculer l'énergie électrostatique d'une rangée infinie de charges ponctuelles portant alternativement la charge $+e$ et $-e$, espacées chacunes de la distance a. (On pourra utiliser le développement limité de $\mathrm{Ln}(1 + x)$).

Champ et force magnétiques : la force de Lorentz

Exercice 13 Particule libre dans un champ magnétique uniforme (d'après agrégation, option chimie, 2002)

Une particule non relativiste de masse m et de charge q (de signe quelconque) se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v_o}$ dans un référentiel galiléen ; cette vitesse est contenue dans le plan Oxy. À partir de l'instant $t = 0$, elle pénètre dans un espace où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ ($B > 0$), uniforme et constant.

Nature de la trajectoire

1.a. Comment peut-on justifier que seule la force de Lorentz soit à prendre en compte pour décrire le mouvement de la particule ? Écrire la relation fondamentale de la dynamique à l'aide du vecteur vitessse $\overrightarrow{v}$.

b. Montrer que la trajectoire est plane et que la vitesse est constante en module. Quelle est cette trajectoire ? Exprimer en fonction de m, v_o, $|q|$, et B, la période de rotation T ainsi que le rayon de giration R. Dessiner la trajectoire orientée et le champ $\overrightarrow{B}$ dans le cas où $q < 0$.

c. Quel est le rôle du champ magnétique sur la trajectoire ?

d. Comment la trajectoire est-elle modifiée si la vitesse initiale $\overrightarrow{v_o}$ possède une composante v_{oz} suivant l'axe Oz ?

e. A.N. un électron libre, de vitesse initiale négligeable, est initialement accéléré sous une d.d.p. $\Delta V = 10$ kV. Quelle est alors sa vitesse v_o au moment où il est injecté dans un appareil de Crookes dans lequel règne un champ magnétique $B = 5.10^{-3}$ T. Que valent R et T ?

Stabilité de la trajectoire : pour étudier les petits mouvements de la particule au voisinage de l'orbite d'équilibre dans le champ $\overrightarrow{B}$, il est commode de se placer en coordonnées cylindriques (r, θ, z) et de considérer les petites variations autour des grandeurs d'équilibre :

$$r = R + \epsilon \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\omega_C + \omega' \quad ; \quad z = 0 + z$$

2.a. Projeter l'équation du mouvement sur les trois axes $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_z}$ en introduisant la grandeur algébrique $\omega_C = qB/m$, dont la valeur absolue est la pulsation cyclotron $2\pi/T$.

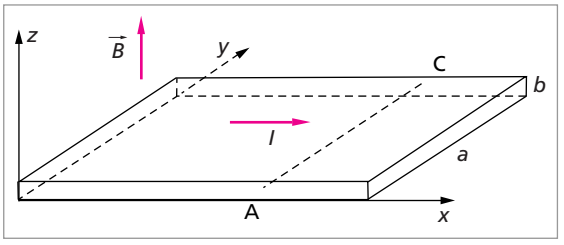
b. Montrer que la projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$ conduit, en se limitant aux termes d'ordre un, à une relation simple entre les variations ϵ du rayon et ω' de la vitesse angulaire.

c. En déduire que la projection sur $\overrightarrow{u_r}$ conduit alors à une équation différentielle du second ordre en ϵ ; conclure quant à la stabilité radiale et à la stabiblité orthoradiale.

d. Qu'en est-il de la stabilité axiale pour v_{oz} quelconque ?

Exercice 14 **Effet Hall dans un ruban conducteur** (d'après agrégation, option chimie, 2002)

Une plaquette conductrice de grande longueur suivant Ox, de largeur a et d'épaisseur b, est parcourue par un courant d'intensité I réparti uniformément sur toute la section droite.



En présence d'un champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ perpendiculaire au ruban, les lignes de courant restent, en régime permanent, des droites parallèles à Ox. AC est un segment parallèle à Oy.

1. En raisonnant qualitativement sur un porteur mobile de charge q (positive ou négative), montrer qu'une différence de potentiel $V_h = V_A - V_C$ prend naissance entre les points A et C des deux côtés de la plaquette ; quel est son signe ? dépend-il de celui de q ?

2. Donner le champ de Hall $\overrightarrow{E_h}$ puis calculer algébriquement la tension de Hall V_h qui apparaît aux extrémités du segment AC en fonction de I, B, b et $R_h = 1/nq$, constante de Hall, où n est le nombre de porteurs par unité de volume.

3. Le matériau est un conducteur métallique, le cuivre, de masse volumique ρ et de masse molaire M dont on admet que chaque atome met en jeu un électron libre.

- Donner l'expression puis la valeur numérique de n.
- En déduire la valeur de la constante de Hall R_h.

– Calculer la tension de Hall V_h (à exprimer dans une unité adaptée) pour un champ magnétique $B = 1$ T, une intensité $I = 1$ A et une épaisseur $b = 0{,}1$ mm. Commenter ces valeurs numériques.

4. Citer une application de l'effet Hall que l'on retrouve dans les classes de lycée. Quel type de matériau utilise-t-on dans cette application ?

Exercice 15 **Mesure de e/m** (d'après CAPES interne 1994)

On se propose d'étudier une expérience de cours mettant en évidence le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, ainsi que la mesure du rapport e/m de l'électron. Pour réaliser, dans un certain volume, un champ magnétique sensiblement uniforme, on utilise le dispositif des bobines de Helmoltz. L'appareil utilise un tube à électrons qui est centré sur l'axe des deux bobines. Pour visualiser la trajectoire des électrons on n'opère pas dans le vide, mais dans une ampoule où l'on a introduit, après que le vide a été fait, de la vapeur de mercure, à la pression de vapeur saturante. Les électrons sont émis par une cathode chaude et sont ensuite accélérés par la différence de potentiel existant entre la cathode et l'anode cylindrique. Une partie des électrons émis sort du dispositif par une petite ouverture située au centre de l'anode cylindrique. Le faisceau d'électrons, émis de façon continue, est focalisé par une grille prévue à cet effet, et devient sensiblement homocinétique. Les collisions entre les électrons ayant acquis une énergie cinétique suffisante et les atomes de mercure ionisent une fraction de ceux-ci. La capture des électrons libres par ces ions permet l'émission du spectre du mercure et sa radiation bleu-vert caractéristique. La recombinaison et l'émission ayant lieu près du point d'ionisation, le trajet du faisceau d'électrons est rendu ainsi visible par la vapeur de mercure.
On désigne par $-e$ la charge de l'électron et m sa masse. Dans cette étude on supposera le champ magnétique uniforme et stationnaire, et l'on admettra que le mouvement des électrons a lieu dans le vide.

1. Dans le référentiel galiléen d'étude choisi, le champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ est dirigé selon l'axe Oz. On se place dans le cas où le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_o}$ est perpendiculaire à la direction du champ magnétique ; $\overrightarrow{v_o}$ sera dirigé selon l'axe Oy. À l'instant initial, $t = 0$, on a alors : $x = y = z = 0$, $v_{ox} = v_{oz} = 0$ et $v_{oy} = v_o$.
Montrer que la trajectoire est un cercle dont on déterminera le rayon r en fonction de B, e, m et v_o. Préciser sur un schéma le sens de parcours de l'électron sur cette trajectoire.

2. On note U la tension d'accélération entre la cathode émettrice et l'anode ; en déduire l'expression du rapport e/m de l'électron en fonction de B, U et r.
A.N. $U = 200$ V, $r = (4{,}1 \pm 0{,}2)$ cm, $B = 1{,}17$ mT. Déterminer le rapport e/m de l'électron en supposant que la plus importante cause d'erreur est celle sur la détermination du rayon r de la trajectoire. En déduire la valeur de la masse de l'électron en supposant que la valeur de sa charge est connue.

3. Le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_o}$ fait maintenant un angle α avec le champ magnétique. Ceci peut être obtenu en tournant le tube. En choisissant les axes Ox et Oy tels que $\overrightarrow{v_o}$ soit dans le plan yOz, on a alors les conditions initiales suivantes : $x = y = z = 0$, $v_{ox} = 0$, $v_{oz} = v_o \cos\alpha$ et $v_{oy} = v_o \sin\alpha$. Donner l'équation et préciser la nature de la nouvelle trajectoire.

Exercice 16 **Principe de l'oscilloscope** (d'après manuels de terminale scientifique)

Les électrons, émis par effet thermoélectronique sur une cathode C, sont accélérés par une anode A, traversent deux plaques horizontales Y et Y' de longueur l puis deux plaques verticales X et X', ils rencontrent enfin l'écran E, situé à la distance L du milieu des plaques $Y'Y$. Soit $z'z$ l'axe longitudinal de l'oscilloscope, dont l'origine O est située à l'entrée des plaques YY'. Soit $x'x$ et $y'y$ les axes de l'écran, centrés au milieu de l'écran. On impose une tension U_{AC} entre l'anode et la cathode.

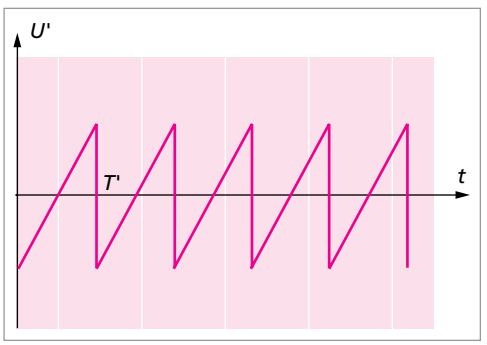
1. Faire un schéma de l'appareil.

2. On impose une tension $U_{Y'Y} = U$ entre les plaques $Y'Y$ qui dévie les électrons vers le haut.

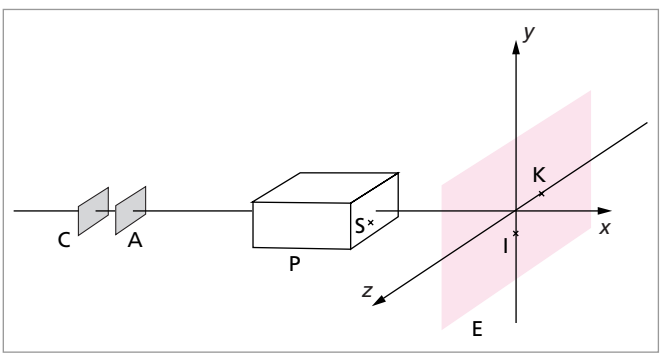
– Établir l'équation $y = f(z)$ de la trajectoire des électrons entre O et l'écran.

– Montrer que la déviation du spot sur l'écran est proportionnel à U. Exprimer le coefficient de proportionnalité.

3. U est une tension sinusoïdale de période T. La base de temps de l'oscilloscope est une tension en dents de scie de période T' dont de la forme est représentée ci-contre. Que voit-on sur l'écran lorsque $T' = T$, lorsque $T' = 2T$ et lorsque $T' = T/2$?



Exercice 17 **Principe d'un tube de télévision** (d'après manuels de terminale scientifique)



Les électrons sont injectés au centre de la cathode C avec une vitesse négligeable. Ils sont ensuite accélérés par l'anode A. Ils sortent du centre de l'anode A avec la vitesse $v_o = 2,3.10^7$ m/s.

1. Que vaut la tension U_{AC} ? On donne la masse de l'électron :

$$m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}.$$

Ces électrons sont ensuite soumis, dans la région P, à l'action de deux champs magnétiques uniformes $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$, tous les deux orthogonaux à Ox et orthogonaux entre eux. La largeur de la région P vaut $l = 2$ cm le long de Ox. L'écran est situé à la distance $D = 27$ cm du centre de la région P.

2. Si seul le champ $\overrightarrow{B_1}$ agit et que sa norme vaut 0,7 mT, les électrons sortent de la région P en S et sont reçus sur l'écran au point I. Quel est le sens de $\overrightarrow{B_1}$? Que vaut le rayon de la trajectoire des électrons dans P ? Quelle est leur vitesse en S ? Quelle est la nature de leur trajectoire entre S et I ? Quelle est l'ordonnée du point d'impact I des électrons sur l'écran ?

3. Si seul le champ $\overrightarrow{B_2}$ agit, quelle est sa direction, son sens et sa norme, sachant qu'il provoque un déplacement horizontal des électrons sur l'écran, leur point d'impact étant alors K tel que OK = OI/2 ?

Exercice 18 Principe d'un cyclotron (d'après manuels de terminale scientifique)

Il comprend deux *dees* (enceintes semi-circulaires) D_1 et D_2 placées horizontalement dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire à leur plan. Entre ces *dees* règne un champ électrique alternatif d'amplitude 10 kV/m. Les particules ainsi accélérées sont des protons ($m = 1,67.10^{-27}$ kg) injectés au centre sans vitesse initiale. Le rayon des *dees* vaut R = 0,8 m.

1. Faire un schéma du système en précisant le sens des champs et la trajectoire des protons.

2. Quelle est la fréquence du champ électrique alternatif ?

3. Quelle est la nature du mouvement des protons entre et dans les *dees* ? Quelles sont les accélérations auxquelles ils sont soumis ?

4. Quelle est l'énergie maximale (en eV) acquise par les protons à la sortie ?

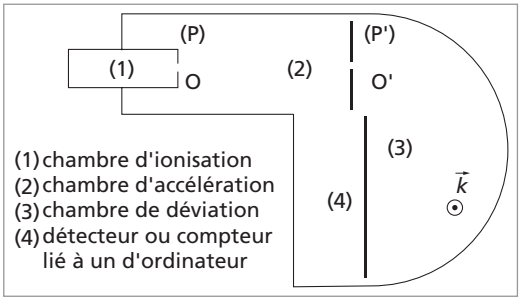
5. Quelle tension U aurait-il fallu pour accélérer linéairement ces protons ?

6. Combien de demi-tours ont été accomplis dans chaque *dee* ?

Exercice 19 Principe d'un spectromètre de masse (d'après CAPES agricole 2000)

Une forme de dopage chez les sportifs consiste à utiliser des stéroïdes anabolisants, comme la testostérone, difficiles à mettre en évidence du fait de leur présence naturelle dans l'organisme.

En 1996, une recherche a montré que les rapports de concentration entre le carbone 12 et le carbone 13 sont différents selon que la molécule est de synthèse ou d'origine naturelle. Pour mesurer ces taux, on procède à l'extraction de l'hormone à partir d'un prélèvement d'urine. Le dioxyde de carbone provenant de la combustion du stéroïde est ionisé (chambre 1) sous la forme CO_2^+. Les deux types d'ions sont alors accélérés entre les plaques P et P′ sous une tension de 4 kV (chambre 2), puis soumis à un champ magnétique de 0,25 T dans une chambre semi-circulaire (3). On observe une déviation de la trajectoire des deux ions. Un comptage des deux ions est effectué en sortie (zone 4). On négligera l'action de la pesanteur.



Données : $^{12}C_2^+$: $m = 7{,}31.10^{-26}$ kg ; $^{13}C_2^+$: $m = 7{,}47.10^{-26}$ kg ; e $= 1{,}6.10^{-19}$ C.

1. Calculer la vitesse de chaque ion à la sortie de la chambre d'accélération (2).

2. Dans la chambre de déviation (3) :

- indiquer le sens de $\overrightarrow{B}$ par rapport au vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ pour que l'impact ait lieu en (4),
- montrer que le mouvement des ions est circulaire uniforme,
- calculer la valeur du rayon de chacune des trajectoires.

3. Calculer la distance qui sépare les points d'impacts des ions en (4).

4. Pour chaque échantillon analysé, on établit un coefficient δ défini par :

$$\delta = \frac{R - R_o}{R_o} \times 100$$

où $R = \dfrac{N_1}{N_2}$ est appelé le rapport standard (pour $R_o = N_{1,0}/N_{2,0}, N_{1,0} = 2307$ et $N_{2,0} = 25$), N_1 et N_2 étant le nombre d'impacts respectifs de $^{12}C_2^+$ et de $^{13}C_2^+$. Un sportif est dit « positif » si le coefficient δ est inférieur à -27.

Un test a donné les résultats suivants : $N_1 = 2$: 320 et $N_2 = 26$. Ce test est-il « positif » ?

Remarque : il serait bon, à se stade, de revoir également les principes de la microscopie électronique (voir par exemple le livre de Terminale S, tronc commun, édité chez Nathan p. 46-147) ainsi que les caractéristiques des champs magnétiques terrestre et solaire (voir par exemple l'*Encyclopédia Universalis*).

Symétries du champ magnétique. Théorème d'Ampère

Exercice 20 Le fil rectiligne (d'aprés agrégation option chimie 2002)

On se place en coordonnées cylindriques de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$.

1. Un fil rectiligne illimité, de section circulaire de rayon a, dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz, est parcouru par un courant d'intensité I ; la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ y est supposée uniforme sur une section.
Après avoir examiné les propriétés de symétrie et d'invariance, donner l'expression du champ $\overrightarrow{B}$ créé en un point quelconque, intérieur ou extérieur au fil, à une distance r. Tracer la courbe $B(r)$. Le champ est-il continu en $r = a$? Commenter cette propriété.

2. A.N. Calculer B à $r = 1$ cm pour $I = 1$ A et $a = 1$ mm ; comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

3. Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un fil rectiligne de rayon $a = 12$ cm parcouru par un courant d'intensité $I = 10^5$ A. À moins de quelle distance du point de chute de l'éclair, l'aiguille d'une boussole risque-t-elle d'être désaimantée sachant que cela se produit lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à $B_l = 2{,}4.10^{-3}$ T ?

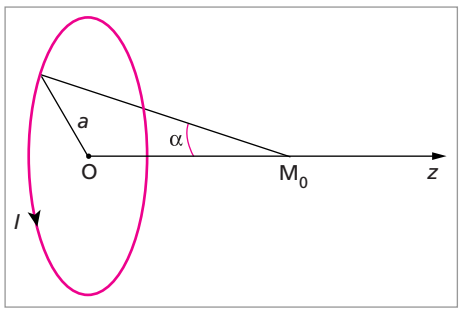
Exercice 21 **La spire circulaire** (d'aprés agrégation option chimie 2002)

Une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon a est parcourue par un courant d'intensité I. À partir d'un point M_o de son axe, elle est vue sous un angle 2α.

1. Après avoir examiné les propriétés de symétrie, déterminer le champ $\overrightarrow{B}(M_o)$ en fonction de α et de la valeur du champ au centre $B(O) = \dfrac{\mu_o I}{2a}$. Tracer la courbe $B_o(z)$ correspondante.

2. Un point M voisin de M_o se trouve à la même abscisse z, mais à une distance r de l'axe. On note $B_o(z) = B_z(r = 0, z)$. Montrer à partir de la conservation du flux, que si r est suffisamment petit devant a, la composante radiale du champ en M s'écrit :

$$B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2}\frac{dB_o(z)}{dz}.$$

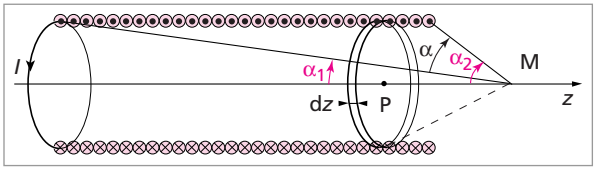


Quel est le signe de $B_r(r, z)$? Etait-il prévisible ? Esquisser et orienter les lignes de champ autour de la spire et de son axe.

Exercice 22 **Le solénoïde** (Agrégation externe option chimie 2002)

Un solénoïde d'axe Oz est constitué d'un bobinage serré modélisé par n spires circulaires par unité de longueur. Les spires ont un rayon a et sont parcourues par un courant d'intensité I.

On considère une épaisseur dz de spires au point P de cote z et un point M sur l'axe à partir duquel les extrémités du solénoïde sont vues sous un angle α_1 et α_2 (orientés positivement dans le sens indiqué sur la figure).



1. Déterminer l'expression du champ $\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$ en un point M quelconque de l'axe en fonction de α_1 et α_2.

2. Quelle est, en fonction de α et de la longueur L du solénoïde, la valeur du champ au centre de celui-ci. Que devient cette valeur si le solénoïde est infiniment long ? Pour quelles valeurs du rapport $L/2a$ peut-on considérer que le champ au centre diffère de moins de 1 % de celui du solénoïde infiniment long ?

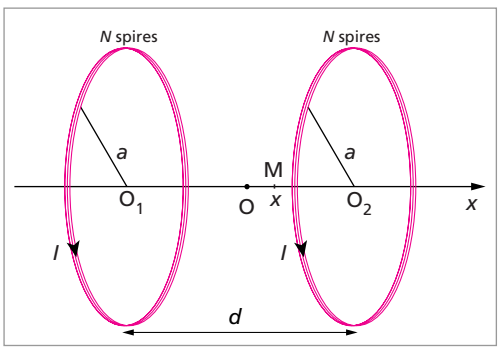
3. Montrer qu'à l'intérieur et à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long le champ magnétique est uniforme ; quelles sont ses valeurs respectives $\overrightarrow{B_i}$ et $\overrightarrow{B_e}$? Le champ est-il continu ? Commenter.

Exercice 23 Les bobines de Helmholtz (d'après CAPES interne 1994)

1. On considère une spire circulaire de rayon a parcourue par un courant d'intensité I. Les notations sont les mêmes que celles définies dans l'exercice 21. Rappeler l'expression du champ magnétique en un point de l'axe de la spire puis, en reprenant les résultats de cet exercice, vérifier que la courbe $B(z)$ présente un point d'inflexion pour $z = a/2$. Donner la valeur numérique du rapport $B(z = a/2)/B(z = 0)$.

A.N. Comparer à la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_\mathrm{T} = 2.10^{-5}$ T, la valeur du champ magnétique créé au centre par une bobine plate comportant $N = 130$ spires de rayon moyen $a = 15{,}0$ cm, parcourue par un courant d'intensité $I = 1{,}70$ A.

2. On considère un dispositif constitué de deux bobines plates, identiques à celle étudiée précédemment, de même rayon a, de même axe et comportant chacune N spires. Il est représenté sur la figure ci-contre. Chacune de ces deux bobines est parcourue par un courant électrique constant, de même intensité I et de même sens. La distance entre les centres O_1 et O_2 des bobines vaut d. On appelle O le milieu de O_1O_2 et x la distance d'un point M, sur l'axe, au point O. On se propose de montrer que pour une certaine valeur de d, que l'on exprimera en fonction de a, le champ magnétique varie très peu sur l'axe au voisinage du point O : le dispositif est alors appelé « bobines de Helmholtz ».



Montrer que le champ magnétique au point M peut se mettre sous la forme : $B(x) = f(z = d/2 + x) + f(z = d/2 - x)$ où $f(z)$ est une fonction que l'on définira. En effectuant un développement limité de $B(x)$ pour x petit, faisant intervenir les dérivées première, seconde et troisième de la fonction $f(z)$ que l'on ne cherchera pas à exprimer, montrer que pour une certaine valeur de d, que l'on exprimera en fonction de a, le champ magnétique se met sous la forme :

$$B(x) = 2f(d/2) + o(x^3).$$

A.N. Avec les valeurs numériques précédentes, calculer, dans cette configuration, le champ magnétique au point O milieu de O_1O_2, et celle du champ magnétique au centre de l'une des deux bobines. Conclure.

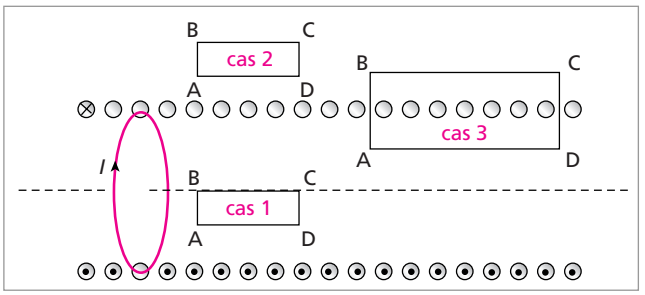
Potentiel vecteur. Flux et circulation du champ magnétique

Exercice 24 Potentiel vecteur d'un solénoïde et relations de passage

On considère un circuit composé de spires jointives enroulées sur un cylindre de longueur infinie, parcourues par un courant d'intensité I. Soit n le nombre de spires par unité de longueur.

1. Quelle est la direction de $\overrightarrow{B}$ en un point quelconque ?

2. On définit un contour fermé ABCD et on applique le théorème d'Ampère à la circulation de $\overrightarrow{B}$ sur ce contour. En admettant que le champ $\overrightarrow{B}$ soit nul à l'infini, en dehors du cylindre, montrer que $\overrightarrow{B}$ est uniforme à l'intérieur (cas 1) et nul à l'extérieur. Calculer son module à l'intérieur (cas 3) et déterminer son sens.



3. Ce solénoïde peut être considéré comme une nappe conductrice cylindrique parcourue par un courant en surface de densité surfacique $\overrightarrow{j_\sigma}$. Déterminer $\overrightarrow{j_\sigma}$. Vérifier la relation de passage pour le champ magnétique à la traversée d'une surface parcourue par un courant.

4.a. Quelle est la direction du potentiel-vecteur $\overrightarrow{A}(\mathrm{M})$ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde ?

b. Déterminer $\overrightarrow{A}$ en utilisant une relation locale. On utilisera l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques donnée dans le paragraphe 7 du cours.

c. Déterminer $\overrightarrow{A}$ en utilisant une relation intégrale.

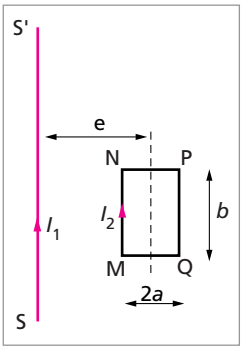
d. Connaissez-vous une troisième méthode pour déterminer $\overrightarrow{A}$? Comparer les méthodes.

Exercice 25 Cadre au voisinage d'un fil

On considère un fil rectiligne SS′ parcouru par un courant d'intensité I_1.

1. Déterminer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le fil en un point M, situé à la distance d du fil.

2. Un cadre rectangulaire indéformable MNPQ, de largeur $2a$, de hauteur b, est tel que ses côtés MN et PQ sont parallèles à SS′. Le plan du cadre contient SS′. La médiane verticale de MNPQ se trouve à la distance e de SS′ ($e > a$). Enfin le cadre est parcouru par un courant I_2 dans le sens indiqué sur la figure ci-contre.



a. Calculer la résultante des forces magnétiques agissant sur le cadre.

b. Calculer le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit MNPQ.

c. En appliquant le théorème de Maxwell, retrouver la résultante de forces magnétiques s'exerçant sur le cadre.

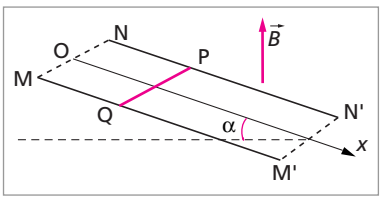
Induction électromagnétique

Exercice 26 Tige mobile sur un plan incliné (d'après PLP2 1999)

Une tige PQ conductrice, de masse $m = 50$ g, de longueur $L = 21$ cm, peut glisser sans frottement sur deux rails conducteurs MM′ et NN′ parallèles, coplanaires, distants de L et inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Lors du déplacement, la tige PQ reste perpendiculaire aux rails et l'ensemble tige - rails est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, vertical, dirigé du bas en haut, de valeur B = 0,40 T.

La distance parcourue par la tige sur les rails est repérée sur l'axe Ox du plan incliné, parallèle aux rails, O étant le milieu de MN.



On donne pour l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8$ m.s^{-2} et on prendra α = 25°.

1. À l'instant $t = 0$, la tige PQ est lâchée sans vitesse initiale depuis la position MN en haut du plan incliné. Les rails ne sont en contact électrique entre eux que par l'intermédiaire de la tige PQ.

a. La présence du champ magnétique influence-t-elle le mouvement de la tige ? Pourquoi ? Quelle est la nature du mouvement ?

b. A quelle date la distance parcourue par la tige est-elle égale à $d = 0{,}50$ m ?

c. Déterminer littéralement et numériquement la force électromotrice induite dans la tige à la date déterminée à la question précédente. On précisera le signe de cette f.e.m.

2. On relie les points M′ et N′ par un fil conducteur de résistance $R = 0{,}50$ Ω. On néglige les résistances des rails et de la tige PQ devant R.

a. On lâche à nouveau PQ depuis la position MN. Les rails étant supposés suffisamment longs. Comment évolue le mouvement ultérieur de la tige ? Justifier brièvement l'existence d'une vitesse limite en analysant les phénomènes physiques mis en jeu.

b. Calculer l'intensité du courant induit dans la tige lorsque la vitesse limite est atteinte.

c. Calculer la vitesse limite atteinte.

Exercice 27 Inductance propre et inductance mutuelle (d'après CAPES 1999)

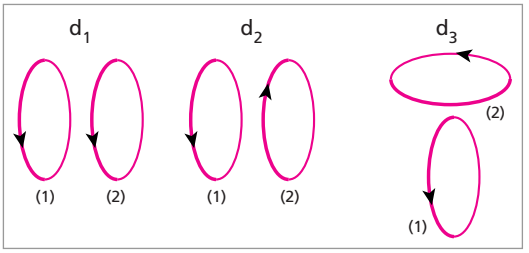
1. Définitions et propriétés

a. Définir l'inductance propre L d'un circuit filiforme.

b. Soient deux circuits filiformes orientés (1) et (2). Lorsque (1) est parcouru par un courant d'intensité i_1, il crée un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ dont le flux à travers (2) a pour expression $\Phi_{1/2} = M_{12} \cdot i_1$. Définir le coefficient M_{21}.

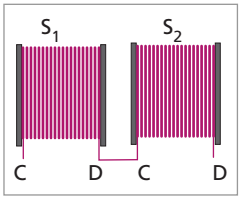
c. Quelle relation lie M_{12}, M_{21} et l'inductance mutuelle des deux circuits ?

d. Deux spires circulaires orientées (1) et (2) sont placées successivement selon les trois dispositions d_1, d_2 et d_3 ci-contre. Ces spires sont perpendiculaires au plan de la figure, la partie en gras étant située en avant de ce plan. Dans d_1 et d_2, les deux spires sont coaxiales et dans d_3 leurs axes sont coplanaires et orthogonaux. Indiquer éventuellement le signe de M dans chaque cas.



2. On considère une bobine placée dans l'air et comptant 1 000 spires pratiquement circulaires, enroulées sur un manchon non magnétique de 10 cm de long et de 4 cm de diamètre. Calculer son inductance propre L en l'assimilant à un solénoïde très long disposé dans le vide.

3. On dispose de deux bobines identiques S_1 et S_2, chacune d'inductance propre L et de résistance ohmique $r = 8\ \Omega$. On repère les bornes des bobines par les lettres C et D.
Les deux bobines sont placées à proximité l'une de l'autre comme l'indique la figure ci-contre et on les connecte en série sans les déplacer créant ainsi un nouveau dipôle.



La connexion se fait selon les deux possibilités suivantes :

- dipôle (a) équivalent à une bobine S_a : la borne D de S_1 est reliée à la borne C de S_2. L'inductance mutuelle entre les deux bobines S_1 et S_2 est notée M dans cette configuration.
- dipôle (b) équivalent à une bobine S_b : la borne D de S_1 est reliée à la borne D de S_2.

On alimente successivement chacun des deux dipôles (a) et (b) par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 2$ kHz.
La mesure du module de l'impédance donne $Z_a = 375\ \Omega$ pour la bobine S_a et $Z_b = 225\ \Omega$ pour la bobine S_b.

a. Exprimer les inductances propres respectives L_a et L_b des bobines S_a et S_b en fonction de L et M.

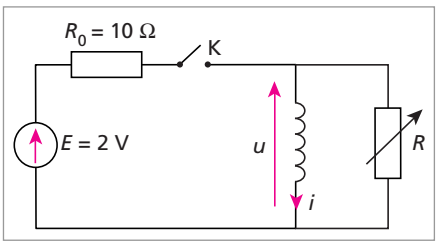
b. Exprimer Z_a (resp Z_b) en fonction de r, L_a (resp L_b) et f.

c. Calculer L et M.

4. Quand deux bobines d'inductances propres L_1 et L_2 sont placées en série et alimentées en courant sinusoïdal basse fréquence, quelle expression de l'inductance propre de la bobine équivalente donneriez-vous à des élèves et quelle précision apporteriez-vous quant à la validité de cette expression ?
Étudier également le cas où deux bobines de résistances négligeables sont disposées en parallèle.

Exercice 28 Inductance et conversion d'énergie (d'après CAPES 1999)

1. Échange d'énergie entre une bobine et une résistance. On réalise le montage de la figure ci-contre comprenant un générateur de tension de f.e.m. $E = 2$ V, une bobine d'inductance propre $L = 100$ mH et de résistance ohmique $r = 10\ \Omega$, une résistance ohmique $R_o = 10\ \Omega$, un interrupteur K et une résistance ohmique variable R réglée initialement à 200 Ω.



L'interrupteur K étant fermé depuis longtemps, on l'ouvre à un instant qui sera considéré comme l'origine du temps t.

a. Calculer l'intensité i_o du courant éléctrique dans la bobine et la valeur u_o de la tension u à ses bornes avant l'ouverture de K.

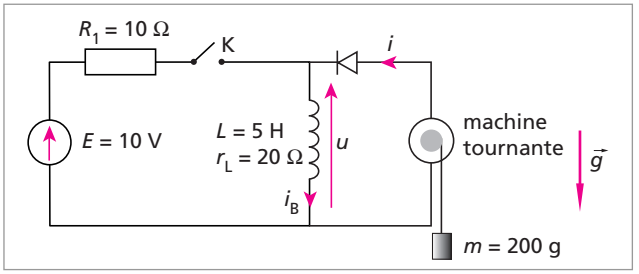
b. Établir l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant électrique dans la bobine en fonction du temps pour $t > 0$ ainsi que celle de la tension $u(t)$ à ses bornes.

c. Tracer les courbes représentatives de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ pour t variant de $-0{,}5$ ms à 2,5 ms.

d. Par un bilan énergétique, calculer l'énergie électrique consommée par la résistance R entre $t = 0$ et $t \longrightarrow \infty$.

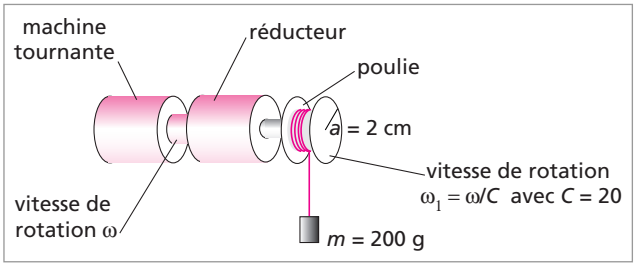
e. Illustrer par un graphique l'évolution des courbes $i(t)$ et $u(t)$ quand R devient grand, puis petit devant 200 Ω.

2. Échange d'énergie entre une bobine et une machine tournante. Le circuit électrique de la figure ci-contre comprend un générateur de tension idéal de f.e.m. $E = 10$ V en série avec une résistance ohmique R_1 de 20 Ω, un interrupteur K, une bobine d'inductance propre $L = 5$ H et de résistance ohmique $r_L = 20$ Ω, une diode idéale et une petite machine tournante.



La diode idéale a une tension de seuil nulle, un courant nul quand elle est bloquée et une résistance interne nulle quand elle est passante.

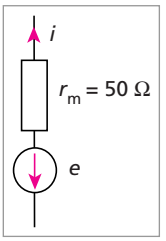
La figure ci-contre décrit la liaison entre la machine tournante et une poulie par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse. Si la vitesse de rotation de l'arbre de la machine tournante est ω, celle de la poulie à la sortie du réducteur est ω_1 telle que $\omega = C\omega_1$ avec un rapport de réduction de vitesse $C = 20$.



Sur la poulie de rayon $a = 2$ cm est enroulé un fil inextensible auquel est suspendue une masselotte de masse $m = 200$ g. On prendra $g = 10$ m.s^{-2} pour l'intensité du champ de pesanteur.

La machine tournante comporte un rotor solidaire de l'arbre de rotation. Sur ce rotor se trouve bobiné un fil électrique relié au circuit par des contacts glissants. Le déplacement de ce conducteur dans le champ magnétique d'un aimant permanent appelé stator provoque l'apparition d'une f.e.m. induite.

Sur le plan électrique, la machine tournante est équivalente à la f.e.m. $e = K\omega$ en série avec une résitance ohmique r_m. On prendra $K = 3.10^{-2}$ V.rad^{-1}.s et $r_m = 50\ \Omega$. Le schéma correspondant se trouve ci-contre.



Par convention, l'axe de rotation est orienté de façon que la masselotte monte quand $\omega > 0$.

Quand le bobinage du rotor est parcouru par le courant d'intensité i, le champ magnétique de l'aimant permanent provoque l'apparition sur ce rotor de forces magnétiques dont le moment par rapport à l'axe de rotation orienté est $\Gamma = Ki$. Le coefficient K est le même que celui introduit dans l'expression de e.

a. L'interrupteur K étant fermé depuis longtemps et le rotor immobilisé, donner la valeur i_o de l'intensité i_B du courant électrique qui traverse la bobine. Quelle est la valeur de i, intensité du courant électrique dans le rotor de la machine tournante ?

b. À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K. À cet instant, le rotor de la machine tournante est immobile, la masse m reposant sur un support que l'on enlève immédiatement. On pose $r = r_L + r_m$. Établir l'équation (e1) tirée des lois de l'électrocinétique liant les fonctions du temps $i(t)$, $\frac{di}{dt}$ et $\omega(t)$ avec L, r et K comme paramètres. L'état de la diode pour $t > 0$ est supposé être le même qu'à l'instant suivant l'ouverture de K.

c. L'ensemble de tous les éléments mobiles (machine tournante + réducteur + poulie + masselotte m + éléments de liaison) forme un système mécanique isolé noté (S) qui possède une énergie cinétique E_C que l'on écrira sous la forme $E_C = \frac{1}{2}J\omega^2$ où J est le moment d'inertie de (S) ramené à l'axe de rotation en amont du réducteur. On donne $J = 3.10^{-6}$ kg.m^2.

c.1. Dans quelle proportion la masselotte contribue-t-elle à cette valeur de J ?

c.2. Tous les frottements sont négligés.

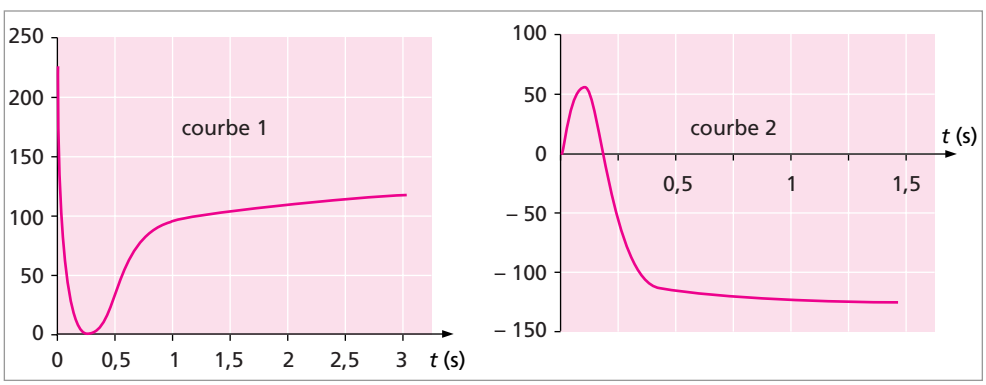
- Sans faire de calcul, justifier que la masse m va d'abord monter.
- En appliquant au système (S) le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et $t + dt$, établir l'équation (me) liant $i(t)$ et $\frac{d\omega}{dt}(t)$ avec K, J, m, g, a et C comme paramètres.

d. Donner l'équation différentielle (dif) vérifiée par $i(t)$ avec L, K, J, m, g, a et C comme paramètres.

e. Sans résoudre l'équation (dif) :

- Exprimer littéralement puis numériquement $\frac{di}{dt}(t = 0)$, $\frac{d\omega}{dt}(t = 0)$ et la tension aux bornes de la bobine $u(t = 0_+)$.
- Justifier que $i(t)$ tend vers une valeur limite i_{lim} quand t devient grand.
- Exprimer littéralement puis calculer i_{lim}, ω_{lim} et u_{lim}.

f. La résolution de l'équation (dif) permet de tracer les courbes suivantes où sont représentées les grandeurs $i(t)$ en mA et $\omega(t)$ en rad.s^{-1} pour t variant de 0 à 2 s.



f.1. Identifier chacune des courbes en justifiant qualitativement votre réponse.

f.2. Préciser sur quels intervalles de temps la machine tournante se comporte soit en moteur soit en génératrice.

f.3. Vérifier les valeurs numériques initiales et asymptotiques de i et ω.

f.4. À partir de l'une de ces courbes, déterminer l'instant où la masselotte passe par son altitude maximale.

f.5. Évaluer cette altitude maximale en mm en assimilant la partie de la courbe concernée à un triangle, l'altitude étant prise nulle à l'instant $t = 0$.

f.6. Quand la masselotte est à son altitude maximale, calculer la fraction d'énergie initialement stockée dans la bobine qui a été transformée en énergie potentielle de pesanteur. Commenter.

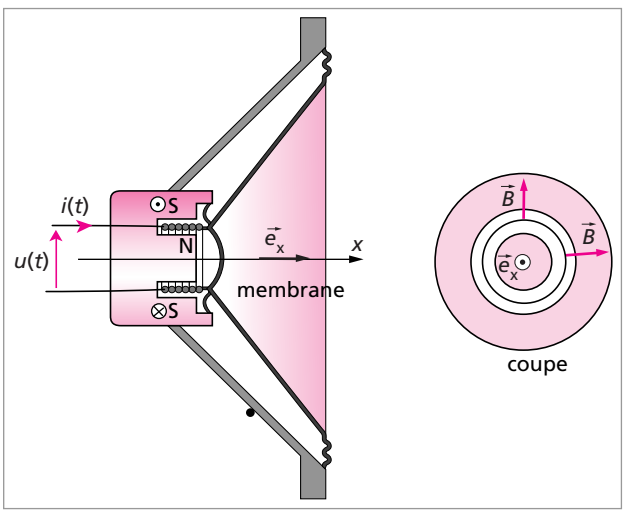
Exercice 29 Étude simplifiée d'un haut-parleur électrodynamique (d'après CAPES 1991)

Un haut-parleur électrodynamique est constitué (voir schéma) :

– d'un aimant annulaire, d'axe horizontal $x'x$, créant un champ magnétique $\vec{B}$ radial et de norme constante B dans la région utile de l'entrefer,

– d'un solénoïde indéformable de même axe $x'x$, comportant N spires circulaires de rayon a, placé dans l'entrefer de l'aimant,

– d'une membrane M, perpendiculaire à l'axe $x'x$, solidaire du solénoïde et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre grâce à un système élastique que l'on modélisera par un ressort unique de raideur k.



1. L'ensemble mobile {membrane + solénoïde}, de masse m, repéré par l'abscisse $x(t)$ lorsqu'il est en mouvement, est soumis aux forces suivantes :

– son poids et la réaction du support verticale et opposée au poids,

– la force de rappel du ressort de raideur k,

– la résultante des forces de Laplace exercées par l'aimant sur le solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$,

– une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{F} = -\mu \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \vec{e_x}.$$

Faire un schéma, en respectant les orientations données, où figure la force élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}f}$ s'exerçant sur un élément $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ de courant du solénoïde (on supposera sur ce schéma l'intensité i positive). Expliciter cette force élémentaire. En déduire les caractéristiques de la résultante $\overrightarrow{f}$ s'exerçant sur l'ensemble du solénoïde (on posera $\ell = 2\pi Na$).
Le référentiel d'étude étant supposé galiléen, appliquer le théorème du centre d'inertie en projection sur l'axe $x'Ox$, la position d'équilibre lorsque le solénoïde n'est parcouru par aucun courant étant repérée par $x = 0$.
En déduire l'équation différentielle liant $x(t)$ et ses dérivées à $i(t)$ [équation 1].

2. Le solénoïde se déplaçant dans l'entrefer à la vitesse $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x}$, calculer la force électromotrice induite $e(t)$ par le déplacement en fonction de B, ℓ et v. On adoptera la convention habituelle selon laquelle e est positive si, seule dans le circuit fermé, elle y fait circuler un courant d'intensité positive, et on précisera, à l'aide d'une figure, les autres conventions choisies. La bobine, de résistance R et d'inductance propre L, est connectée à une source idéale de tension délivrant la tension $u(t)$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ s'écrit :

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \mathrm{B}\ell v = u \quad \text{[équation 2]}$$

3. La source idéale délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$, on se propose d'étudier le régime forcé à la pulsation ω imposée par la source. On associe à $u(t)$ la forme complexe $\underline{u}(t) = U\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\omega t}$ avec $j^2 = -1$. On cherche alors $i(t)$ et $v(t)$ sous les formes complexes associées :

$$\underline{i}(t) = I\sqrt{2}\mathrm{e}^{j(\omega t-\varphi)} = \underline{I}\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\omega t} \text{ et } \underline{v}(t) = V\sqrt{2}\mathrm{e}^{j(\omega t-\Psi)} = \underline{V}\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\omega t}.$$

À partir de l'équation 1, exprimer $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$. En utilisant l'équation 2, écrire la relation liant $\underline{U}$, $\underline{I}$ et $\underline{V}$. Déduire des résultats précédents la relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ que l'on mettra sous la forme $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ où $\underline{Z}$ est une impédance complexe.
On note $\underline{Z_\mathrm{L}}$ l'impédance complexe de la bobine en l'absence de mouvement de la membrane. Exprimer $\underline{Z_\mathrm{L}}$.
Montrer que l'on peut mettre $\underline{Z}$ sous la forme $\underline{Z} = \underline{Z_\mathrm{L}} + \underline{Z_\mathrm{m}}$ où $\underline{Z_\mathrm{m}}$ représente l'impédance motionnelle du haut-parleur. Exprimer les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z_\mathrm{m}}$, soit $\underline{Z_\mathrm{m}} = R_\mathrm{m}(\omega) + jX_\mathrm{m}(\omega)$, où R_m représente la résistance motionnelle et X_m la réactance motionnelle.

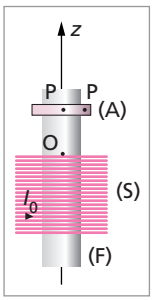
4. On se propose de tracer le diagramme d'impédance du haut-parleur. Soit $P(\omega)$ le point du plan complexe d'affine $\underline{Z_\mathrm{m}}(\omega)$. Montrer que le lieu décrit par le point P quand ω varie est un cercle de rayon R_o, tangent à l'axe imaginaire à l'origine, appelé cercle de Kennely. Exprimer R_o en fonction de B, ℓ et μ.

- Placer les points correspondants à $\omega \longrightarrow 0$, $\omega \longrightarrow \infty$ et $\omega = \omega_\mathrm{o} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
- L'énergie fournie par la source est dissipée en partie dans la résistance ohmique R sous forme de chaleur et dans la résistance motionnelle R_m sous forme d'émission acoustique. Dans quel intervalle de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$ la résistance motionnelle est-elle

de valeur supérieure ou égale à R_o ? Placer les points correspondant à ω_1 et ω_2 sur la courbe précédente. Exprimer $\omega_1 - \omega_2$ en fonction de μ et de m.

Exercice 30 L'expérience d'Elihu Thomson, illustration de la loi de Lenz

Un appareil expérimental dû à Elihu Thomson et figurant dans la collection de nombreux lycées est composé de trois parties, représentées sur la figure ci-dessous.
– un solénoïde (S) vertical de longueur $\ell = 13$ cm, de rayon $R = 3$ cm, qui comprend $N = 320$ spires jointives, donc un nombre de spires par mètre $n = 24{,}6$ spires/m. (S) est parcouru par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz.
– un cylindre plein (F) de fer doux, de longueur supérieure à ℓ remplit le solénoïde (S). On admettra ici, pour simplifier, qu'il a pour effet de multiplier par 100 les champs magnétiques créés par (S).
– sur ce noyau de fer doux, qui dépasse largement la hauteur du solénoïde, on enfile un anneau métallique cylindrique (A) en aluminium, de rayon $R = 3$ cm, de hauteur et d'épaisseur négligeables. La résistance électrique de l'anneau vaut $X = 1{,}75.10^{-4}\ \Omega$ et son coefficient d'auto-induction vaut $L = 9,5\ \mu$H (on ne tiendra pas compte de L dans les deux premières parties du problème). La masse de l'anneau vaut $m = 13{,}4$ g.



En l'absence de courant dans le solénoïde, l'anneau repose sur la face supérieure de (S). Lorsque le courant sinusoïdal $I(t) = I_o \sin \omega t$ est établi dans (S), l'anneau est éjecté de façon spectaculaire vers le haut, le long du noyau de fer doux, d'une hauteur H de 30 à 40 cm. Il peut même, dans certaines conditions, atteindre une position d'équilibre et rester en « lévitation magnétique ».
Si cette expérience est spectaculaire et très facile à mettre en oeuvre, son interprétation théorique est plus délicate et une approche superficielle ne permet pas d'expliquer l'observation : il faut tenir compte non seulement du phénomène d'induction mais également du phénomène d'auto-induction dans l'anneau.
On donne $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ u.S.I et $g = 10$ m/s^2.
1. Étude du seul solénoïde (S) (sans noyau de fer doux) parcouru par un courant d'intensité I_o constant
a. Montrer rapidement que le champ magnétique $\overrightarrow{b}(M)$ créé par une seule spire de (S) en un point M de son axe $z'z$ peut s'exprimer sous la forme : $\overrightarrow{b}(M) = \dfrac{\mu_o I_o}{2R} \sin^3 \theta \overrightarrow{u_z}$ où θ représente l'angle sous lequel la spire est vue du point M et où $\overrightarrow{u_z}$ est un vecteur unitaire de l'axe de la spire. Faire un schéma.
b. En déduire l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ créé par (S) en un point M de l'axe $z'z$, situé à l'extérieur de (S), et d'où l'on voit les deux faces nord et sud de (S) sous les angles respectifs θ_1 et θ_2. Faire un schéma.
c. On repère par $z = OM$ la position du point M par rapport au centre O de la face supérieure de (S). Montrer que $\overrightarrow{B}(M)$ peut s'écrire $\overrightarrow{B}(M) = B_o f(z) \overrightarrow{u_z}$ où $f(z)$ ne dépend que de R, ℓ et z.

– Donner l'expression de B_o. Le calculer lorsque (S) est seul (sans noyau de fer doux) et pour $I_o = 5$ A.
– Donner l'expression de $f(z)$. Calculer $f(0)$ lorsque $z = 0$. En déduire la valeur numérique de la norme de $\overrightarrow{B}(O)$ pour $I_o = 5$ A.

d. Indiquer rapidement une méthode précise de mesure de $B(M)$.

e. Si l'on déplace le point M sur l'axe $z'z$, $\overrightarrow{B}(M)$ peut-il être uniforme :

– à l'extérieur de (S) ?

– à l'intérieur de (S) ?

Si oui, à quelle condition ? Cette condition est-elle respectée ici ?

f. Soit P un point voisin de M, situé dans un plan parallèle aux spires de (S) et passant par M. Soit r la distance entre P et l'axe $z'z$, $r \ll \ell$. On se place en coordonnées cylindriques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ et on appellera $\overrightarrow{B_r}(P)$, $\overrightarrow{B_\theta}(P)$ et $\overrightarrow{B_z}(P)$ les composantes de $\overrightarrow{B}(P)$.

f.1. On admettra que $\overrightarrow{B_z}(P) = \overrightarrow{B}(M)$. Pourquoi ?

f.2. Que peut-on dire de $\overrightarrow{B_\theta}(P)$? Pourquoi ?

f.3. De quelle(s) variable(s) dépend la norme de $\overrightarrow{B_r}(P)$? Pourquoi ?

f.4. En utilisant la conservation du flux du champ magnétique, sous forme locale, exprimer $B_r(P)$ en fonction de r, B_o et de la dérivée $f'(z) = df/dz$ de la fonction $f(z)$ qui intervient dans l'expression de $B(M)$ (cf. question 1.c).
On rappelle qu'en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rB_z)}{\partial z}\right]$$

f.5. Retrouver l'expression de $B_r(P)$ en utilisant la conservation du flux du champ magnétique cette fois sous forme intégrale. On décrira avec précision le cylindre élémentaire utilisé pour l'intégration.

f.6. Dessiner l'allure des lignes de champ magnétique passant par M et P. Représenter sur le même schéma les champs et ainsi que leurs composantes.

f.7. Calculer $B_z(P)$ et $B_r(P)$ lorsque $z = 0$, pour $I_o = 5$ A et $r = R = 3{,}0$ cm.

2. Étude de (S) + (F)
Lorsque le noyau de fer doux (F) est introduit dans le solénoïde (S), calculer les nouvelles valeurs numériques prises par B_o, $B(O)$, $B_z(P)$ et $B_r(P)$, définies dans la première partie, lorsque $I_o = 5$ A, $z = 0$ et $R = 3{,}0$ cm.
Ce sont ces valeurs numériques que l'on utilisera par la suite tout en conservant les notations définies dans la première partie.

3. Étude de (S) + (F) + (A) : première interprétation de l'expérience d'Elihu Thomson.
Dans cette partie, on se contentera d'un raisonnement qualitatif, sans aucune application numérique.

3.a. Énoncer la loi de Lenz. L'appliquer ici pour expliquer le saut de l'anneau (A) lors de l'établissement du courant dans le solénoïde (S). Donner une explication claire assortie d'un schéma proprement annoté.

b. (S) est parcouru par le courant d'intensité $I(\mathrm{t}) = I_\mathrm{o} \sin \omega t$. Il crée en un point P voisin de l'axe $z'z$, un champ magnétique $\overrightarrow{B}(\mathrm{P}) = B_\mathrm{o} f(z) \sin \omega t \overrightarrow{u_\mathrm{z}} - \dfrac{rB_\mathrm{o} f'(z)}{2} \sin \omega t \overrightarrow{u_\mathrm{r}}$. En déduire :

b.1. le flux $\Phi(t)$ créé par le champ du solénoïde à travers l'anneau, situé dans le plan horizontal à l'altitude z. On appellera Φ_o l'amplitude de $\Phi(t)$. Exprimer Φ_o en fonction de B_o, R et $f(z)$.

b.2. la f.e.m. $e(t)$ induite dans l'anneau . On appellera e_o l'amplitude de $e(t)$. Exprimer e_o en fonction de Φ_o, puis de $f(z)$.

b.3. l'intensité $i(t)$ du courant induit dans l'anneau . On appellera i_o l'amplitude de $i(t)$. Exprimer i_o en fonction de e_o, puis de $f(z)$.

b.4. la force élémentaire de Laplace $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ s'exerçant sur un élément de l'anneau. Montrer qu'elle comprend deux composantes $\overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{r}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{z}}$ que l'on exprimera séparément.
Représenter sur un schéma, les composantes de $\overrightarrow{B}(\mathrm{P})$, $\overrightarrow{B}(\mathrm{P}')$, $\overrightarrow{\mathrm{d}F}(\mathrm{P})$et $\overrightarrow{\mathrm{d}F}(\mathrm{P}')$ pour deux points opposés P et P′ de l'anneau.

b.5. la force de Laplace résultante $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur l'anneau. La mettre sous la forme $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_\mathrm{o}} g(t)$. Donner l'expression de $\overrightarrow{F_\mathrm{o}}$ en fonction de R, ω, B_o, X, $f(z)$ et $f'(z)$. Donner l'expression de $g(t)$.

c. Que vaut la valeur moyenne de $\overrightarrow{F}$ sur une période ?
L'anneau est véritablement éjecté. Le raisonnement suivi ici (partie 3) permet-il donc d'expliquer le saut de l'anneau ?

d. Que se passerait-il si le courant circulant dans (S) était continu ? L'explication développée dans cette partie serait-elle satisfaisante ?

4. Étude de (S) + (F) + (A) : étude plus rigoureuse de l'expérience.
On tiendra compte, à partir de maintenant, de l'auto-inductance de l'anneau (A). On rappelle que $L = 9{,}5\ \mu\mathrm{H}$.

4.a. Les réponses aux questions 3.a, 3.b.1 et 3.b.2 étant inchangées, on utilisera les notations Φ_o et e_o. Donner l'équation différentielle régissant les variations du courant induit $i(t)$ dans l'anneau. La résoudre en utilisant la méthode des nombres complexes. Mettre la solution sous la forme $i(t) = i_\mathrm{o} \cos(\omega t - \varphi)$. Expliciter i_o en fonction de e_o, X et ω. Expliciter $\sin \varphi$.

b. La force de Laplace résultante $\overrightarrow{F}$ exercée sur l'anneau, situé à la distance z de (S) obéit à la même loi que celle trouvée à la question 3.b.5, c'est-à-dire $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_\mathrm{o}} g(t)$. Seule l'expression de $i(t)$ a été modifiée : $i(t) = i_\mathrm{o} \cos(\omega t - \varphi)$. Exprimer $\overrightarrow{F}$ et la mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{F} = F_\mathrm{o} \alpha(z) \beta(t) \overrightarrow{u_\mathrm{z}}.$$

Donner l'expression des fonctions $\alpha(z)$ et $\beta(t)$.

c. Exprimer la valeur moyenne de $\overrightarrow{F}$ dans le temps.

d. Montrer que l'anneau décolle de la position $z = 0$.

e. L'anneau, ainsi libéré, admet une position d'équilibre dans le champ de pesanteur. En supposant l'anneau horizontal, comment pourrait-on calculer son altitude, mesurée à partir de la surface supérieure du solénoïde (on ne fera que poser l'équation permettant ce calcul).

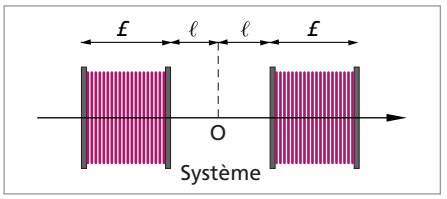
5.a. Citer deux autres expériences mettant en évidence la loi de Lenz, mais peut-être moins spectaculaires que celle étudiée ci-dessus. Les interpréter en une ligne et avec un schéma. Ces expériences nécessitent-elles de faire appel au phénomène d'auto-induction dans l'induit ?

b. Pourrait-on observer l'expérience de Thomson en introduisant l'anneau entre deux bobines de Helmoltz ? Pourquoi ?

Les moteurs

Exercice 31 Production d'un champ tournant (d'après agrégation chimie 2002)

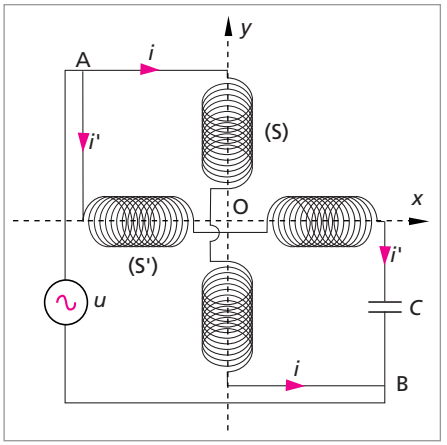
Un système (S) est constitué de deux solénoïdes identiques et coaxiaux comportant chacun N spires circulaires de rayon a et possédant chacun une longueur $\mathcal{L}$; leurs faces en regard sont distantes de 2ℓ. Ils sont montés en série de telle sorte que le courant d'alimentation d'intensité I y circule dans le même sens.



1. Montrer que le champ au centre O du système (S) peut, en module, se mettre sous la forme $B = kI$ où k est un coefficient à exprimer en fonction des caractéristiques géométriques du système.

A.N. Calculer k pour $\mathcal{L} = 7$ cm, $\ell = 5$ cm, $a = 3$ cm, $N = 800$. En déduire la valeur de B lorsque $I = 4$ A.

On met en place deux systèmes (S) et (S′) identiques au précédent selon la disposition de la figure ci-contre : les axes Oy de (S) et Ox de (S′) sont orthogonaux et se coupent en O, milieu commun. Chaque système a une résistance électrique totale R et une inductance totale L.



Entre les points A et B sont branchés en parallèle :
– un générateur de tension de force électromotrice sinusoïdale :

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega_o t$$

– le système (S)
– le système (S′) monté en série avec un condensateur de capacité C.

2. À tension $u(t)$ donnée, prévoir qualitativement le rôle de la capacité C sur le courant $i'(t)$ dans (S′) par rapport au courant $i(t)$ dans (S). En s'appuyant par exemple sur le cas de la polarisation des ondes électromagnétiques, prévoir qu'au point O le champ magnétique total est un vecteur tournant dans le plan xOy.

3. Déterminer, en utilisant la méthode des complexes, les intensités instantanées $i(t)$ et i'(t) sous la forme :

$$i(t) = I\cos(\omega_o t - \varphi) \qquad \text{et} \qquad i'(t) = I'\cos(\omega_o t - \varphi') \tag{1}$$

et donner les expressions des intensités maximums I et I' ainsi que de $\tan\varphi$ et $\tan\varphi'$.

4. Montrer, en supposant que R et ω_o sont imposées, qu'il est possible d'exprimer L et C pour satisfaire la double condition : $I = I'$ et $\varphi = \varphi' - \pi/2$. Que valent dans ces conditions I, I', φ et φ' ?

5. A.N. Calculer L et C sachant que $R = 25{,}1\ \Omega$ et $f_o = \omega_o/2\pi = 50$ Hz ;
– la valeur de L (inductance totale du système) est-elle plausible sachant que l'inductance propre L' d'une bobine unique est donnée par l'expression $L' = \pi\mu_o\dfrac{N^2a^2}{\ell}$?

6. Déterminer dans les conditions de la question 4 le vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$ au point O en notant B_o son module (à exprimer en fonction de k, U et R) et $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ les vecteurs unitaires des deux axes.
À quelle fréquence ce champ tourne-t-il dans le plan xOy ?
Quelle est la valeur numérique de B_o avec les conditions précédentes ?

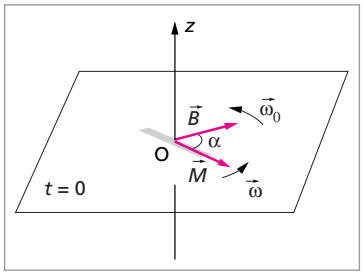
7. Connaissez-vous un autre montage simple, susceptible de donner un champ magnétique tournant ?

Exercice 32 **Principe d'un moteur synchrone** (d'aprés agrégation chimie 2002)

Le montage de l'exercice précédent où les bobines sont parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_o produit un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme, d'amplitude B_o, qui tourne dans le plan xOy autour de l'axe Oz avec la pulsation ω_o constante (le stator) ; D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe Oz (le rotor) constitué d'un petit aimant portant un moment magnétique permanent $\overrightarrow{M}$, orthogonal à Oz, tourne dans le plan xOy d'un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω.

La valeur de l'angle $(\overrightarrow{M}, \overrightarrow{B})$ à l'instant initial est noté α comme indiqué sur la figure. On note $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire de l'axe Oz.
Rappelons que le moment $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ des forces exercées par le champ $\overrightarrow{B}$ sur un dipôle magnétique $\overrightarrow{M}$ a pour expression :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$$



1. Calculer la valeur instantanée de ce couple magnétique $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ exercé par le champ $\overrightarrow{B}$ sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps $\langle \overrightarrow{\Gamma}(t) \rangle$ et commenter le résultat en distinguant le cas $\omega = \omega_o$ du cas $\omega \neq \omega_o$.

2. Pour quelles valeurs de ω et α ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Justifier la terminologie de « moteur synchrone » ; l'aimant suit-il ou précède-t-il alors le champ magnétique dans son mouvement ?
Quelle est dans ce cas la puissance maximale P_m qu'il peut fournir en régime permanent ? Où est précisément la source d'énergie dans ce montage ?

3. On note $\Gamma = \left| \langle \overrightarrow{\Gamma}(t) \rangle \right|$ le module de la valeur moyenne du couple magnétique, Γ_m la valeur maximale de Γ et $\Gamma_u \leqslant \Gamma_m$ le couple utile fourni par le moteur en régime permanent. Tracer le graphe $\Gamma(\alpha)$ pour les valeurs de α correspondant à un dispositif fonctionnant en moteur.
Quelle relation lie Γ et Γ_u en régime permanent de fonctionnement du moteur ? Que constate-t-on alors graphiquement pour une valeur donnée de Γ_u ?
Énoncer le critère de stabilité de fonctionnement du moteur en régime permanent (lorsque par exemple celui-ci prend accidentellement de l'avance ou du retard sur son régime permanent), puis déterminer qualitativement à partir du graphe $\Gamma(\alpha)$ le domaine de α correspondant à un régime stable.

Exercice 33 Moteur asynchrone

Par un montage convenable de bobines parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation ω_o, on peut produire un champ magnétique tournant avec une vitesse angulaire ω_o, appelée vitesse de synchronisme. Ce champ magnétique est supposé tourner dans le plan xOy, autour d'un axe $z'z$ perpendiculaire à ce plan.
Une petite bobine plate, de surface S, est placée dans le champ magnétique tournant et elle est mobile autour de l'axe $z'z$. Soient R sa résistance électrique et L son inductance propre. La bobine est animée d'un mouvement circulaire et uniforme de vitesse angulaire ω.
On désigne par $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire normal à la bobine mobile et on appelle α la valeur à l'instant $t = 0$ de l'angle $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{B})$.

1. Calculer à chaque instant le flux qui traverse la petite bobine mobile. On appelle Φ_o le flux maximum à travers la bobine. Calculer la f.e.m. instantanée induite dans le circuit et en déduire le courant induit.

2. Exprimer le moment magnétique de la bobine. En déduire le moment instantané $\Gamma(t)$ du couple de forces électromagnétiques s'exerçant sur cette bobine. Que vaut la valeur moyenne Γ_m de ce moment ? À quelle condition le dispositif peut-il être considéré comme un moteur ?

3. Étudier les variations de Γ_m avec ω. On supposera que $\omega_o > L/R$. Interpréter les différentes branches de la courbe $\Gamma_m(\omega)$.

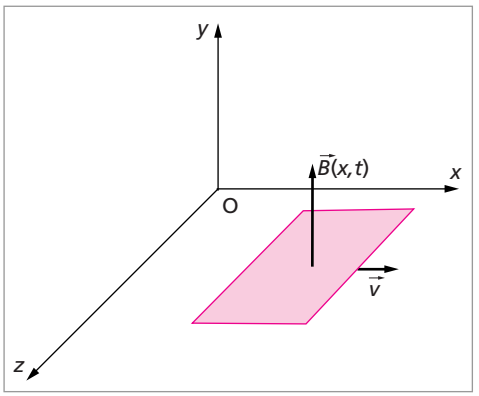
4. La bobine, initialement au repos, est soumise à un couple résistant de moment Γ_r, dû aux frottements. À quelle condition se met-elle en mouvement ? Montrer qu'elle atteint un régime permanent stable dont on précisera la vitesse angulaire. Le couple résistant augmente brusquement, décrire le fonctionnement ultérieur du moteur.

Exercice 34 Moteur linéaire

Dans le référentiel du laboratoire ($Oxyz$) un inducteur linéaire est constitué par des bobinages créant dans l'espace considéré un champ magnétique de la forme :

$$\overrightarrow{B} = B_o \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - \omega_o t\right)\overrightarrow{u_y}$$

où λ est une longueur constante et ω_o une pulsation constante.



L'induit est représenté par un cadre carré, de côté a, situé dans le plan xOz, de sorte que ses côtés restent parallèles aux axes Ox et Oz. Il se déplace alors selon un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v. On suppose que $a \ll \lambda$ c'est-à-dire que le flux qui traverse l'induit à l'instant t correspond à celui d'un champ uniforme sur toute la surface du cadre.

1. Exprimer le flux Φ traversant l'induit en fonction de t. On posera $\omega = 2pv/\lambda$ et $\Phi_o = B_o a^2$ (ω peut être > 0 ou < 0 selon le signe de v). Calculer le courant induit i circulant dans le cadre à l'instant t en régime permanent. Le cadre possède une résistance R et une inductance propre L.

2. Montrer que l'induit est soumis à une force instantanée $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$. Calculer F et sa valeur moyenne F_m. Étudier les variations de F_m avec ω (on admettra que $R < L\omega_o$).

3. Pour quelle valeur de v le dispositif fonctionne-t-il comme un moteur ? Le moteur est soumis de la part des liaisons et des pièces qu'il entraîne à une force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -F_f\overrightarrow{u_x}$ ($F_f > 0$). À quelle condition le moteur démarre-t-il s'il est initialement au repos ? Montrer qu'il atteint alors un régime de fonctionnement stable.

Équations de l'électromagnétisme en régime variable

Exercice 35 Condensateur sphérique à fuite

Les électrodes d'un condensateur sphérique, de centre O, ont des rayons respectifs a et b ($a < b$). L'électrode interne porte initialement une charge positive. Le milieu entre les électrodes étant légèrement conducteur, cette charge « fuit » vers l'extérieur. Cela crée une densité volumique de courant dans l'intervalle situé entre les électrodes.

1. Déterminer le vecteur densité de courant en un point M situé à la distance r du centre O, en fonction de la charge $Q(t)$ que porte l'électrode interne à la date t.

2. Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ au point M. On admettra que la charge répartie en volume entre les électrodes est négligeable devant celle portée par chaque armature.

3. Que peut-on dire du champ magnétique créé par le courant de fuite, compte tenu des symétries du dispositif ?

4. On trace un contour quelconque sur une sphère de rayon r ($a < r < b$). Vérifier le théorème d'Ampère généralisé sur ce contour.

Exercice 36 Conservation de la charge électrique

Un condensateur plan, perpendiculaire à l'axe Oz, est chargé par un courant d'intensité I variable au cours du temps. Les plaques sont des disques de rayon R. Le courant est amené au centre des plaques par un fil d'épaisseur négligeable. On considère que le courant est superficiel sur les faces en regard des armatures. On admet enfin que :

- la densité superficielle de charge σ est uniforme sur chaque armature et ne dépend donc que du temps,
- il n'y a aucune concentration de charge aux bords du disque.

1. Préciser la direction du vecteur densité superficielle de courant $\overrightarrow{j_\sigma}$ et les coordonnées dont dépendent ses composantes.

2. Utiliser la conservation de la charge pour relier σ et $\overrightarrow{j_\sigma}$.

3. Exprimer $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ en fonction du courant I et déterminer $\overrightarrow{j_\sigma}$.

Étude macroscopique des diélectriques

Exercice 37 Ordres de grandeur dans le diamant

Un échantillon de diamant (masse molaire $M = 12$ g/mol ; masse volumique $\mu = 3{,}5$ g/cm^3) acquiert un vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ ($P = 10^{-7}$ C/m^2) lorsqu'il est placé entre les armatures d'un condensateur plan. La tension entre les armatures est $U = 100$ V et la distance entre celles-ci vaut $d = 2$ cm. La surface de chaque armature vaut $S = 5$ cm^2.

Calculer, dans ces conditions :

1. le moment dipolaire électrique moyen $\overrightarrow{p}$ porté par chaque atome,

2. la distance moyenne entre G_+ et G_- (barycentres des charges + et des charges - dans l'atome de carbone),

3. la susceptibilité électrique de l'échantillon de diamant,

4. les charges surfaciques qui apparaissent sur le diamant,

5. les permittivités relative et absolue du diamant,

6. la capacité du condensateur avant et après introduction du diélectrique.

Exercice 38 Champ électrique créé par une sphère diélectrique

Une sphère diélectrique neutre, de centre O, de rayon R, est polarisée uniformément. Soit $z'z$ l'axe parallèle à son vecteur-polarisation.

Exprimer, en fonction de son vecteur-polarisation $\overrightarrow{P}$:

1. le moment dipolaire électrique équivalent à la sphère, vue d'un point M tel que $\mathrm{OM} = r \gg R$;

2. le potentiel électrique en M, point situé à l'extérieur de la sphère (on rappelle que le potentiel créé en M par un dipôle $\overrightarrow{p}$ vaut $V(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\,\cos\theta}{r^2}$ où θ est l'angle formé par $\mathrm{O}\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{p}$) ;

3. le potentiel électrique en un point M′ situé sur la surface de la sphère, que l'on exprimera en fonction de la côte z de M′ ;

4. le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. On tracera l'allure des lignes de champ.

Exercice 39 Barreau cylindrique neutre et polarisé longitudinalement

Un barreau cylindrique, de rayon R, d'axe $z'z$, de hauteur h est polarisé uniformément dans une direction parallèle à son axe. Soit $\overrightarrow{P}$ son vecteur-polarisation.

1. Déterminer les charges portées par le cylindre.

2. Exprimer le champ électrique et le vecteur-déplacement créés en tout point M de l'axe du cylindre en fonction de $\overrightarrow{P}$ et des demi-angles α_1 et α_2 des cônes de sommet M s'appuyant sur les bases du cylindre. On distinguera les cas où M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre.

3. Étudier le cas limite où le diélectrique occupe un disque ($h \ll R$).

4. Étudier le cas limite où le diélectrique occupe un barreau infini ($h \gg R$).

Exercice 40 Cavité dans un diélectrique polarisé

Un matériau diélectrique de très grande dimension est polarisé uniformément. Il comporte une cavité interne. Pour les différentes formes de cavités suivantes, on étudiera la

répartition des charges de polarisation sur les parois de la cavité, puis on calculera le champ, au centre de la cavité, dû à ces charges de polarisation.

1. Cavité cylindrique, de rayon R, de hauteur h, d'axe parallèle à la direction du vecteur-polarisation $\overrightarrow{P}$.

2. Cas 1, mais la cavité est très plate ($h \ll R$).

3. Cas 1, mais la cavité est très allongée ($h \gg R$).

4. Cavité cubique ayant quatre arêtes parallèles à la direction de polarisation $\overrightarrow{P}$.

5. Cavité cubique d'orientation quelconque.

Exercice 41 Champ électrique à l'intérieur d'une sphère diélectrique

On étudie une sphère diélectrique L.H.I., de susceptibilité χ_e, plongée dans un champ électrique extérieur uniforme $\overrightarrow{E_o}$. Calculer le champ électrique à l'intérieur de la sphère :

1. par le méthode itérative, en précisant les conditions de validité de cette méthode ;

2. par la méthode self-consistante.

On rappelle le résultat obtenu dans l'exercice 38 : une sphère diélectrique, de polarisation uniforme $\overrightarrow{P}$, crée un champ électrique $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$ à l'intérieur d'elle-même.

Exercice 42 Capacité d'un condensateur plan formé de deux diélectriques

Un condensateur plan est rempli de deux diélectriques L.H.I., de permittivité ε_1 et ε_2, d'épaisseur e_1 et e_2. L'armature supérieure, de surface S, est portée au potentiel V et porte une densité surfacique de charges « libres » σ uniforme. L'armature inférieure est portée au potentiel nul. On néglige les effets de bords.

On rappelle qu'une feuille de diélectrique L.H.I. de susceptibilité χ_e, plongée dans un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_o}$, créait, en son intérieur, un champ électrique $\overrightarrow{E} = \dfrac{\overrightarrow{E_o}}{1 + \chi_e}$.

1. Calculer le champ électrique en tout point du condensateur.

2. En déduire sa capacité. La comparer à celles du même condensateur rempli de l'un ou de l'autre des deux diélectriques seulement.

3. Préciser la valeur des charges de polarisation portées par chacune des surfaces.

Exercice 43 Diélectrique L.H.I. chargé

Dans un diélectrique L.H.I., de permittivité relative $\varepsilon_r = 2$, on introduit une densité volumique de charges « libres » uniforme ρ.

Montrer qu'il apparaît une densité volumique de charges de polarisation ρ_p que l'on calculera.

Exercice 44 Interface plane entre deux diélectriques

On étudie la surface plane de séparation entre deux diélectriques L.H.I., non chargés, de permittivités relatives $\varepsilon_{r1} = 2$ et $\varepsilon_{r2} = 4$.

1. Écrire les relations de continuité vérifiées par le champ électrique en un point de l'interface.

2. Soit $\theta_1 = 45°$ l'angle formé par le champ électrique $\overrightarrow{E_1}$ (dans le diélectrique 1) et la normale $\overrightarrow{n_{12}}$ à l'interface. Calculer l'angle θ_2 formé par le champ électrique $\overrightarrow{E_2}$ et la même normale $\overrightarrow{n_{12}}$.

3. L'interface porte-t-elle des charges de polarisation ? Si oui, donner leur expression en fonction de D_n, composante normale du vecteur déplacement électrique.

Étude microscopique des diélectriques

Exercice 45 Susceptibilité d'un gaz non polaire et du liquide correspondant

Sous pression normale et à 20 °C, l'oxygène gazeux, considéré comme un gaz parfait, possède une susceptibilité χ de $4{,}87.10^{-4}$. On donne $M = 32$ g/mol et $R = 8{,}32$ uS.I.

1. Calculer la susceptibilité χ' de l'oxygène liquide de masse volumique $\mu = 1{,}19$ g/cm^3.

2. Expérimentalement on mesure $\chi' = 0{,}507$. Peut-on affirmer que la susceptibilité ne dépend que de la nature du diélectrique et de sa densité ?

3. Calculer la polarisabilité de l'oxygène gazeux.

4. Calculer le moment dipolaire électrique de la molécule d'oxygène à l'état gazeux.

Exercice 46 Relation de Clausius-Mossotti

Soit un diélectrique isotrope, de polarisation $\overrightarrow{P}$ uniforme, plongé dans un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$.

1. Exprimer le champ local $\overrightarrow{E}$ en tout point du diélectrique.

2. Le diélectrique est un gaz ou un milieu L.H.I. de polarisabilité α, contenant N molécules par unité de volume. Montrer que $\overrightarrow{P}$ est proportionnel à $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$ et exprimer le facteur de proportionnalité en fonction de N et α.

3. En déduire l'expression de la susceptibilité du diélectrique.
Discuter le cas où cette susceptibilité devient infinie, que l'on appelle « catastrophe de polarisation ». Quelle serait la taille de la maille d'un tel cristal cubique simple et monoatomique ? Est-ce compatible avec les résultats du modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié ?

4. Quelle relation relie la permittivité relative ε_r du diélectrique à N et α ? Cette relation est appelée relation de Clausius-Mossotti.

5. Si le diélectrique est constitué de molécules polaires, que montre cette relation ?

6. Si le diélectrique est un gaz dilué, ε_r est voisin de 1. Donner alors une expression approchée de ε_r. Quelle est la signification du résultat obtenu ?

Exercice 47 Susceptibilité et polarisabilité de l'eau

À la température $\theta_1 = 120$ °C et sous la pression $P_1 = 0{,}75.10^5$ Pa, la susceptibilité de l'eau vaut $\chi_1 = 4{,}002.10^{-3}$. À la température $\theta_2 = 210$ °C et sous la pression $P_2 = 0{,}93.10^5$ Pa, la susceptibilité de l'eau vaut $\chi_2 = 3{,}285.10^{-3}$.
On donne la constante de Boltzmann $k = 1{,}38.10^{-23}$ J/K.

1. Que vaut le moment dipolaire permanent de la molécule d'eau ? Le comparer avec la valeur donnée par les ouvrages de chimie $p = 6{,}17.10^{-30}$ C.m.

2. Que vaut la polarisabilité électronique et atomique de la molécule d'eau ?

Exercice 48 Polarisation de $BaTiO_3$

Le réseau du titanate de baryum $BaTiO_3$ contient un ion Ba^{2+} et un ion Ti^{4+} par maille cubique. Dans son état ferroélectrique, ces ions sont déplacés chacun de 10^{-11} m par rapport aux nœuds du réseau, dans une direction parallèle à l'arête de celui-ci. La distance entre deux ions Ba^{2+} plus proches voisins vaut $2{,}83.10^{-10}$ m.

1. Que vaut la charge totale des ions positifs portés par une maille ?

2. Calculer le moment dipolaire de chaque maille du réseau.

3. Calculer la polarisation du cristal (on mesure expérimentalement 0,26 C/m^2).

Exercice 49 Atome d'hydrogène dans un champ oscillant

On se place dans le modèle de l'électron élastiquement lié (*modèle de Thomson*) et l'atome H est soumis à un champ oscillant $E = E_o \cos \omega t$. On peut imaginer décrire ainsi le comportement de l'atome d'hydrogène excité par une lumière monochromatique de pulsation ω.
On donne comme « dimension de l'atome » : $a_o = 10^{-10}$ m, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $m = 9.10^{-31}$ kg et $h = 6{,}62.10^{-34}$ J/s.

1. On suppose d'abord que l'électron n'est soumis qu'à la force de rappel due au proton $\overrightarrow{F_r} = -\dfrac{e^2}{4\pi a_o^3 m}\,\overrightarrow{x}$, ainsi qu'à la force électrique $\overrightarrow{F_e}$ due au champ $\overrightarrow{E}$.

a. Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit le déplacement x de l'électron.

b. Montrer que l'électron oscille avec une pulsation propre ω_o que l'on calculera.

c. Calculer numériquement la fréquence νo, la longueur d'onde λ_o et l'énergie $W_o = h\nu_o$, en eV, du photon incident ainsi absorbé par l'atome.

2. En fait, il existe des sources d'amortissement à ce mouvement oscillatoire, dues à la réémission de photons. Celles-ci peuvent être modélisées par une force de « frottement » supplémentaire agissant sur l'électron, de la forme $\overrightarrow{F_f} = -m\gamma\overrightarrow{v}$. Quelle est l'unité de γ ?

a. Écrire l'équation différentielle correspondante.

b. Décrire qualitativement la solution « forcée », mouvement oscillatoire de pulsation ω. Pour quelles valeurs de γ a-t-elle lieu ?

3. L'équation différentielle précédente étant linéaire, on peut, pour la résoudre, utiliser la notation complexe. On pose $E = \mathcal{R}e(\underline{E})$ avec $\underline{E} = E_0 e^{-j\omega t}$; $x = \mathcal{R}e(\underline{x})$ avec $\underline{x} = \underline{x_o} e^{-j\omega t}$. En remplaçant les grandeurs réelles par leurs expressions complexes dans l'équation différentielle précédente, donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{x_0}$ du mouvement de l'électron.

4. Définir et exprimer le moment dipolaire électrique complexe $\underline{p}$ de l'atome. Montrer qu'il est proportionnel à $\underline{E}$. Définir et exprimer la polarisabilité complexe $\underline{\alpha}$ de l'atome. Comment vibrent $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{E}$ à la pulsation ω ?
Soit $\alpha = \alpha' + j\alpha''$. Quels phénomènes physiques représentent α' et α'' ?

5. On a vu précédemment que l'électron n'oscillait que si $\gamma < 2\omega_o$. Dans tous les cas suivants on prendra $\gamma \ll \omega_o$.

a. Donner l'expression de α' et α'' quand $\omega \ll \omega_o$. Comparer au cas statique. Comparer les mouvements de l'électron aux variations de $\overrightarrow{E}$.

b. Donner l'expression de α' et α'' quand $\omega \gg \omega_0$. Comparer les mouvements de l'électron aux variations de $\overrightarrow{E}$.

c. Donner l'expression de α' et α'' quand $\omega \approx \omega_o$ et que $|\omega_o - \omega| \ll \gamma$.

d. Montrer que la dérivée de α' et α'' par rapport à ω s'annule pour $\omega = \omega_o \pm \gamma$, puis tracer $\alpha' = f(\omega)$ et $\alpha'' = g(\omega)$. Discuter les courbes obtenues.

Milieux aimantés

Exercice 50 Champ magnétique dans un barreau cylindrique très long

1. Le cylindre est uniformément aimanté et son vecteur-aimantation $\overrightarrow{M}$ est parallèle à l'axe du cylindre. Quelles sont les densités volumiques et surfaciques de courant qui circulent dans le cylindre ? En déduire le champ magnétique régnant à l'intérieur du barreau.

2. Le cylindre est maintenant constitué d'un matériau L.H.I. de perméabilité magnétique relative μ_r. Il est soumis à un champ extérieur $\overrightarrow{B_{ext}}$ uniforme, parallèle à l'axe du barreau. Calculer le champ magnétique régnant dans le cylindre :

a. par la méthode itérative, en précisant ses conditions de validité ;

b. par la méthode self-consistante.

Exercice 51 Théorie du paramagnétisme de Langevin

On étudie un échantillon paramagnétique contenant N particules par unité de volume, chacune possédant un moment magnétique $\overrightarrow{m}$ identique.

1. Exprimer le nombre de particules dN contenues, par unité de volume, dans un cône d'angle solide élémentaire $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$ (demi-angle au sommet θ).

2. L'échantillon est soumis à un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ uniforme. Quelle est l'énergie potentielle U de chaque particule ? En toute rigueur, quel champ doit-on utiliser dans l'expression obtenue ? Discuter.

3. La répartition des moments magnétiques n'est plus isotrope. Si on applique la répartition de Boltzmann, quel est le nombre dN' de particules qui possèdent l'énergie U, parmi les dN particules précédentes ?

4. Quelle est la contribution de chacune de ces dN' particules au vecteur-aimantation $\overrightarrow{M}$ de l'échantillon ?

5. Si $mB \ll kT$, calculer $\overrightarrow{M}$. On obtient la loi de Curie. En déduire l'expression de la susceptibilité magnétique de l'échantillon. Vérifier qu'il est bien paramagnétique. En déduire une méthode de mesure de $\overrightarrow{m}$.

6. Si $mB \ll kT$, mais si le milieu est très dense, on ne peut plus négliger le champ créé par les autres dipôles magnétiques devant le champ extérieur. On suppose que le champ créé par les autres dipôles $\overrightarrow{B_{\text{autre}}}$ est proportionnel à $\overrightarrow{M}$: $\overrightarrow{B_{\text{autre}}} = \mu_0 \gamma \overrightarrow{M}$. Que devient l'expression reliant $\overrightarrow{M}$ à $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$? On obtient la loi de Curie-Weiss. Discuter l'existence d'une température critique.

7. Si $mB \gg kT$ (basse température, champ intense), que devient $\overrightarrow{M}$? Discuter.

Exercice 52 Théorie du diamagnétisme de Langevin

On étudie d'abord le cas de l'électron de l'atome d'hydrogène, de rayon a et placé dans un champ magnétique variable $\overrightarrow{B}(t)$.

1. Montrer qu'au champ $\overrightarrow{B}$, on peut associer un potentiel-vecteur $\overrightarrow{A} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{r}$ au point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$.

2. À partir de $t = 0$ et jusqu'à la date t_1, on fait croître le champ magnétique depuis une valeur nulle jusqu'à la valeur $\overrightarrow{B}(t_1) = \overrightarrow{B_1}$ selon la loi : $\overrightarrow{B}(t) = \overrightarrow{b}\, t$, où $\overrightarrow{b}$ est un vecteur constant.
Montrer qu'il existe alors, dans tout l'espace, un champ électrique $\overrightarrow{E}$ que l'on exprimera.

3. Donner l'expression de la force électrique s'exerçant sur l'électron et calculer son moment $\overrightarrow{\Gamma}_N$ par rapport au noyau. On fera intervenir les coordonnées cartésiennes x, y, z décrivant la position de l'électron.

4. Que valent les valeurs moyennes $\langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$, $\langle xy \rangle$, $\langle yz \rangle$ et $\langle zx \rangle$? En déduire $\langle \overrightarrow{\Gamma}_N \rangle$ en fonction de $\overrightarrow{b}$ puis de $\overrightarrow{B}$.

5. Écrire le théorème du moment cinétique appliqué à l'électron. En supposant ce moment cinétique uniquement orbital, en déduire le moment magnétique de l'électron en fonction de $\overrightarrow{B}$.

6. Exprimer la susceptibilité magnétique d'un gaz d'hydrogène contenant N atomes par unité de volume. Généraliser au cas d'atomes contenant Z électrons (on posera $Za^2 = \sum_{i=1}^{i=Z} a_i^2$). En quoi cette expression traduit-elle bien une propriété diamagnétique du corps étudié ?

Exercice 53 Résonance paramagnétique électronique (R.P.E.)

Soit un atome de moment magnétique $\overrightarrow{m}$ dont le facteur de Landé vaut g. Cet atome est placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme et constant.

1. Quelle relation relie $\overrightarrow{m}$ au moment cinétique $\overrightarrow{J}$ de l'atome ?

2. Quelle est l'action de $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{m}$?

3. Écrire le théorème du moment cinétique appliqué à l'atome et en déduire que :

a. $\overrightarrow{m}$ est indépendant du temps ;

b. l'angle entre $\overrightarrow{m}$ et $\overrightarrow{B}$ reste constant.

4. Soit $z'z$ un axe parallèle à $\overrightarrow{B}$. Comment évolue $\overrightarrow{m}$ au cours du temps ? Ce mouvement est appelé « précession de Larmor ». Exprimer sa fréquence de rotation, appelée « fréquence de Larmor ». La calculer numériquement en prenant $g = 1$ et $B = 0,1$ T.

Exercice 54 Atome à deux niveaux

On étudie un échantillon magnétique, de volume V, formé de N atomes par unité de volume. Chaque atome porte un moment magnétique $\overrightarrow{m}$. Placé dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}$, ce moment ne peut prendre que deux orientations : soit $\overrightarrow{m}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles et de même sens, soit ils sont parallèles et de sens opposés. On note T la température de l'échantillon.

On confondra ici le champ local et le champ macroscopique avec le champ extérieur $\overrightarrow{B}$.

1. Quelle est l'énergie U_+ d'un atome dont le moment magnétique $\overrightarrow{m}$ est de même sens que $\overrightarrow{B}$? Même question pour U_-, énergie d'un atome pour lequel $\overrightarrow{m}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{B}$.

2. En utilisant la répartition de Boltzmann, quelles sont les probabilités P_+ et P_- de trouver un atome dans l'état $\overrightarrow{m} // \overrightarrow{B}$ ou dans l'état $\overrightarrow{m} // -\overrightarrow{B}$? Préciser la valeur de la constante de normalisation.

3. Calculer la valeur moyenne $\langle \overrightarrow{m} \rangle$ du moment magnétique porté par un atome en fonction de $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{B}$, k et T.

4. Que vaut l'aimantation du système ?

5. On suppose que le champ est suffisamment faible pour que $mB \ll kT$.

a. Montrer alors que le milieu est L.H.I.

b. Que vaut sa susceptibilité magnétique ?

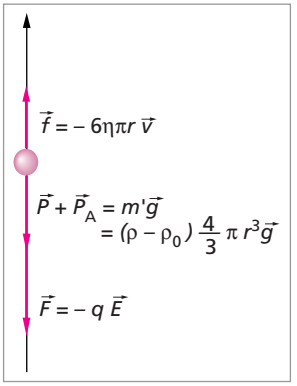
c. Comment qualifier l'état magnétique de ce corps ?

SOLUTIONS

1 **1.** On choisit le cas où $q > 0$ et $\overrightarrow{E}$ est vertical descendant. On définit la masse apparente de la goutte par $m' = (\rho - \rho_0)\frac{4}{3}\pi r^3$ (qui prend en compte le poids et la poussée d'Archimède).

2. Le principe fondamental de la dynamique projeté s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6\eta\pi r v + q\frac{U}{d} + m'g$$



Cette équation différentielle du premier ordre en v admet comme solution :

$$v = Ae^{-t/\tau} + \left(m'g + \frac{qU}{\mathrm{d}}\right)\frac{1}{6\eta\pi r}$$

avec

$$\tau = \frac{m}{6\eta\pi r} \quad \text{et} \quad A = \text{Cte.}$$

Quand $t \longrightarrow \infty$, v tend vers la vitesse limite :

$$v_l = \left(m'g + \frac{qU}{d}\right)\frac{1}{6\eta\pi r}$$

La constante de temps $\tau = \dfrac{m}{6\eta\pi r} = \dfrac{2r^2\rho}{9\eta}$ signifie que le mouvement rectiligne uniforme est atteint au bout d'environ 10τ, soit 10^{-4} s , si l'on prend $r = 1{,}04$ µm comme résultat du calcul de la question suivante.

3. Quand $U = 0$, la vitesse devient

$$v_0 = \frac{m'g}{6\eta\pi r} = \frac{4\pi r^3(\rho - \rho_0)g}{3 \times 6\eta\pi r} = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} \text{ d'où } r = 3\sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\rho - \rho_0)g}}.$$

A.N. $v_0 = 1{,}12\ 10^{-4}$ m.s^{-1} d'où $r = 1{,}04$ µm. Ce rayon est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière visible (0,4 µm < λ < 0,8 µm), toute mesure optique de r sera donc floue à cause du phénomène de diffraction.

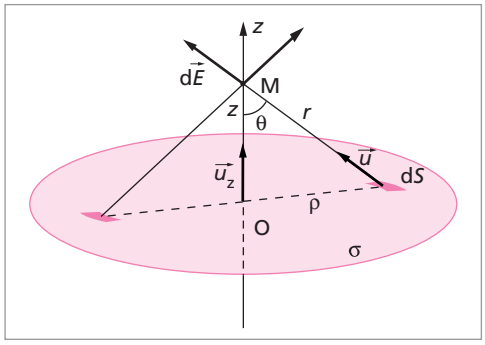
4.

$$v_l = v_0 + \frac{qU}{6\eta\pi rd} \text{ d'où } q = \frac{6\eta\pi rd(v_l - v_0)}{U} = 3e.$$

On obtient toujours une charge qui est bien un multiple de la charge élémentaire e.

Remarque : cette expérience est réalisable lors de l'épreuve de montage. Le trajet de la goutte peut être rendu visible par projection optique.

2 **1.** Un élément de surface dS du disque porte une charge élémentaire d$q = \sigma \mathrm{d}S$ qui crée un champ $\overrightarrow{\mathrm{d}E} = k\dfrac{\sigma \mathrm{d}S}{r^2}\overrightarrow{u}$. Deux surfaces élémentaires diamétralement opposées créeront deux champs élémentaires en un point M de l'axe dont la résultante aura comme direction l'axe $z'z$ du disque. Il en est de même pour le champ global.



Autre raisonnement : le champ $\overrightarrow{E}$ est un vecteur polaire, il appartient aux plans de symétrie du système. Or il y a une infinité de plans de symétrie passant par un point M de l'axe du disque : tous ces plans contiennent $z'z$. $\overrightarrow{E}$ est donc confondu avec l'axe du disque

$$\overrightarrow{E} = \| \overrightarrow{E} \| \overrightarrow{u_z}.$$

Seule la projection dE_z de $\overrightarrow{\mathrm{d}E}$ sur $z'z$ sera donc à intégrer sur toutes les charges élémentaires du disque pour le calcul de $\overrightarrow{E}$:

$$E_z = k\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi}{r^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{\cos\theta \rho \mathrm{d}\rho}{r^2}$$

(avec $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). En prenant comme variable d'intégration θ, il vient pour $z > 0$:

$$E = E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

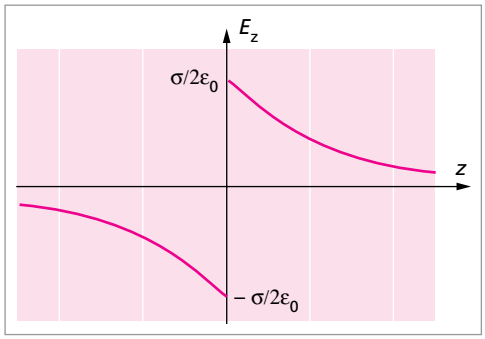
Pour $z < 0$, il suffit de remarquer que $E_z = -E_z(-z)$, soit

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right).$$

Les variations de E en fonction de z sont représentées sur la figure suivante.

Elles mettent en évidence la discontinuité de E en $z = 0$, qui vaut :

$$E_{z+}(0) - E_{z-}(0) = \sigma/\varepsilon_0$$



2. Quand $z \gg R$, un développement limité d'ordre 1 conduit, pour $z > 0$ à :

$$E_z \approx \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2}$$

Or le disque porte la charge totale $Q = \sigma\pi R^2$, on retrouve donc $E_z \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$, soit le champ créé par une charge ponctuelle Q à la distance z.

3. Quand $R \to \infty$, on retrouve le cas du plan infini chargé : $E_z = \sigma\,/2\varepsilon_0$ quand $z > 0$ et $E_z = -\sigma/2\varepsilon_o$ quand $z < 0$. E_z est indépendant de z.

4. La surface élémentaire dS du disque porte la charge d$q = \sigma$dS qui crée le potentiel d$V = \dfrac{k\sigma\mathrm{d}S}{r}$, en prenant $V(\infty) = 0$. Le potentiel en M s'écrira donc

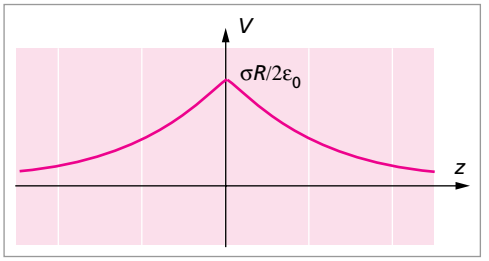
$$V = k\sigma \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \frac{\rho}{r}\mathrm{d}\rho.$$

La bonne variable d'intégration est encore θ. Elle conduit, pour $z > 0$, à :

$$V = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{R^2 + z^2}}{z} - 1\right)$$

On a de plus $V(-z) = V(z)$.

Remarque : le même résultat peut être obtenu à partir de l'expression de E_z trouvée à la question 1, puis en calculant la circulation de E_z entre M et l'infini. Les variations de V en fonction de z sont représentées sur la figure ci-contre. Il n'y a pas de discontinuité du potentiel à la traversée du disque.



Quand $z \gg R$, un développement limité identique à celui utilisé dans la question 2 conduit à

$$V = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z},$$

soit au potentiel créé par une charge ponctuelle Q.
Quand $R \to \infty$, on ne peut plus prendre $V(\infty) = 0$ car il existe alors des charges à l'infini. Il faut repartir de l'expression du champ créé par un plan infini : $E_+ = \sigma/2\varepsilon_0$ et $E_- = -\sigma/2\varepsilon_0$ puis faire circuler ce champ entre O et M par exemple :

$$V_0 - V_\mathrm{M} = \int_\mathrm{OM} \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$$

En choisissant $V_0 = 0$ en tout point du disque, il vient $V = -\sigma z/2\varepsilon_0$.

3

1. AB est un axe de symétrie du système. Tout plan contenant AB est donc un plan de symétrie. $\vec{E}$ étant un vecteur polaire, il sera contenu dans le plan (M, AB). Sa norme ainsi que le potentiel V ne dépendront que de la distance r de M à l'axe AB.

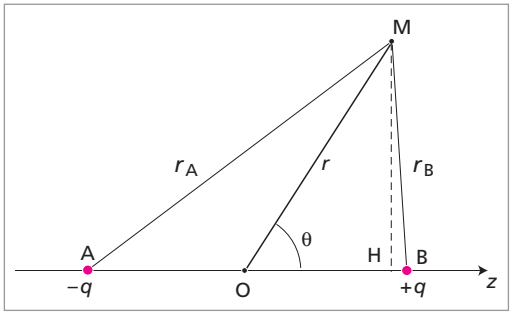
2. $V(\mathrm{M}) = V_\mathrm{A}(\mathrm{M}) + V_\mathrm{B}(\mathrm{M})$

$$= kq\left(-\frac{1}{r_\mathrm{A}} + \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)$$

Or $r_\mathrm{A}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{MH}^2$

$$= \left(\frac{d}{2} + r\cos\theta\right)^2 + (r\sin\theta)^2$$

$$= r^2\left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right).$$



Pour $r \gg d$, un développement limité conduit à $r_\mathrm{A}^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{2r}\right)$ et de même $r_\mathrm{B}^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d\cos\theta}{2r}\right)$. D'où $-\frac{1}{r_\mathrm{A}} + \frac{1}{r_\mathrm{B}} \approx \frac{d\cos\theta}{r^2}$. On obtient le potentiel en M :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{kqd\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\cos\theta}{r^2} = \frac{k\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Remarque : le potentiel d'une charge ponctuelle varie en $1/r$, celui de deux charges ponctuelles varie en $1/r^2$, celui de quatre charges ponctuelles dont la somme est nulle variera en $1/r^3$.

3. À partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$, on obtient :

$$E_\mathrm{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}\ ; \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{2kp\sin\theta}{r^3}\ ; \quad E_\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

$\vec{E}$ ne dépend que de r et θ, il est bien contenu dans le plan $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

4 **1.** La somme des charges étant nulle, le moment dipolaire $\vec{p}$ est indépendant du choix de l'origine. Soit A le barycentre du noyau de chlore et B celui du noyau d'hydrogène : en A se trouvent 17 protons et 18 électrons, en B se trouve un proton. En prenant A comme origine, il vient :

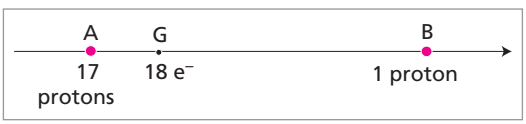
$$\vec{p} = 17\mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{AA}} - 18\mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = e\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

2. $p_\text{experimental} < p_\text{theorique}$. On se trouve dans la configuration suivante :

Soit G le barycentre des électrons de la molécule, en prenant A comme origine :

$$\overrightarrow{p_\text{expérimental}} = -18\mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{AG}} + \mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$= -18\mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{AG}} + \overrightarrow{p_\text{théorique}}$$



soit :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{p_{\text{théorique}}} - \overrightarrow{p_{\text{expérimental}}}}{18e}$$

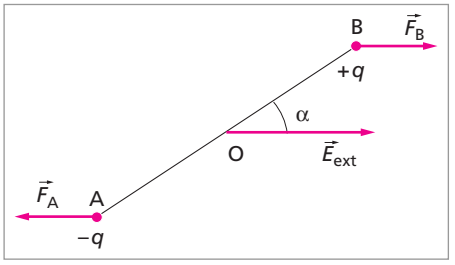
A.N. $\overline{AG} > 0$, donc G se trouve bien entre A et B. $AG = 5{,}87.\,10^{-12}$ m, $AG/d = 0{,}046$, G est très proche du noyau de chlore.

5 **1.a.** $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B} = -q\overrightarrow{E_{ext}}$

d'où $$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0},$$

la force résultante agissant sur le dipôle est nulle. Celui-ci est cependant soumis au moment :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E_{ext}}$$



b. L'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ extérieur vaut :

$$U = -qV_A + qV_B$$

Or

$$V_B - V_A = -\overrightarrow{E_{ext}} \cdot \overrightarrow{AB},$$

d'où

$$U = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E_{ext}}$$

c. À l'équilibre $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$ impose deux positions : $\alpha = 0$ ($\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{E_{ext}}$ sont colinéaires, $U = -pE_{ext}$ est minimum, l'équilibre est stable) et $\alpha = \pi$ ($\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{E_{ext}}$ sont de sens opposé, $U = pE_{ext}$ est maximum, l'équilibre est instable).

2.a. Le champ $\overrightarrow{E_{ext}}$ n'est plus le même en A et en B. Ces deux points étant voisins, on a cependant $E_B - E_A \approx \dfrac{dE}{d\ell}d$ d'où $\sum F \approx p\dfrac{dE}{d\ell}$. Cette force peut être représentée au milieu O du dipôle, tangente à la ligne de champ passant par O et dirigée dans le sens des champs croissants.

b. Le moment de ces forces vaut :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B})$$

c. Une position d'équilibre est caractérisée par $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$ ce qui correspond a $\overrightarrow{p}$ parallèle à $\overrightarrow{E_A}$ et $\overrightarrow{E_B}$.Le moment de ce couple tend donc à aligner le dipôle selon une ligne de champ passant par O. Cependant le dipôle reste alors soumis à une force non nulle qui tend à le déplacer dans le sens des champs croissants. Il n'y a donc pas de position d'équilibre.

d. Le raisonnement est le même que dans le cas d'un champ uniforme (question 1-b) :

$$U = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E_{\text{ext}}}$$

3.a. Le dipôle $\overrightarrow{p_1}$ crée au point O_2 le champ (voir exercice 3. question 3) :

$$\overrightarrow{E_1}(O_2) = \left(\frac{2kp_1 \cos\theta}{r^3} \overrightarrow{u_r} + \frac{kp_1 \sin\theta}{r^3} \overrightarrow{u}_\theta \right)$$

que l'on peut encore exprimer sous la forme :

$$\overrightarrow{E_1}(O_2) = \frac{k}{r^3} \left(3(\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{p_1})\overrightarrow{u_r} - \overrightarrow{p_1} \right)$$

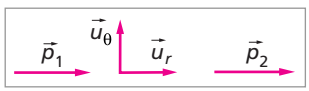
b. L'énergie d'interaction entre $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$ s'écrit : $U_{12} = -\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{E_1}(O_2)$, soit encore :

$$U_{12} = -\frac{k}{r^3} \left[3(\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{u}_r)(\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{u_r}) - \overrightarrow{p}_2 \cdot \overrightarrow{p_1}) \right]$$

c. 1er cas : $\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{u_r} = p_1$; $\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{u_r} = p_2$; $\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_1} = p_2 p_1$ d'où

$$U_{12} = -\frac{2kp_1p_2}{r^3}$$

Quand r décroît, U_{12} diminue, il y a donc attraction.



2e cas : $\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$ et $\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_1} = p_2 p_1$ d'où

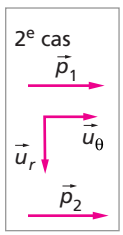
$$U_{12} = \frac{kp_1p_2}{r^3}$$

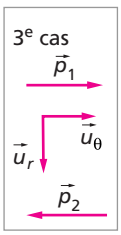
Quand r décroît, U_{12} augmente, il y a donc répulsion.

3e cas : $\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$ mais $\overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_1} = -p_2 p_1$ d'où

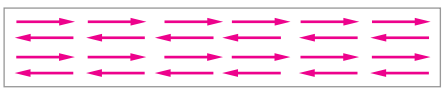
$$U_{12} = -\frac{kp_1p_2}{r^3}$$

Quand r décroît, U_{12} diminue, il y a donc attraction.





d. En conclusion, seul l'arrangement ci-contre satisfait les conditions d'équilibre décrites dans les 1er et 3ème cas précédents.



6 **1.** $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ donc $\overrightarrow{E_{\text{int}}}(M) = \alpha x\overrightarrow{i} + \alpha y\overrightarrow{j} + (\alpha z + E_o)\overrightarrow{k}$

2. $\overrightarrow{E_{\text{int}}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_{\text{int}}$ donc $E_{\text{int, x}} = \alpha x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ d'où $V = -\alpha\frac{x^2}{2} + C_1(y, z)$;

$E_{\text{int,y}} = \alpha y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ d'où $V = -\alpha\frac{y^2}{2} + C_2(x, z)$; $E_{\text{int,z}} = \alpha z + E_o = -\frac{\partial V}{\partial z}$

d'où $V = -\alpha\dfrac{z^2}{2} - E_o z + C_3(x, y)$

Il vient finalement :

$$V = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - E_o z + C = -\frac{\alpha r^2}{2} - E_o r\cos\theta + C$$

3.a. $\operatorname{div} E_{int} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} = 3\alpha = \frac{\rho}{\varepsilon_o},$$

d'où :

$$\rho = 3\alpha\varepsilon_o = \text{Cte}$$

b. $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -3\alpha = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

soit le même résultat pour ρ que précédemment.

4.

$$\overrightarrow{E}_{\text{int, r}}(M) = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} = (\alpha r + E_o\cos\theta)\overrightarrow{u_r}$$

En $r = a$:

$$\overrightarrow{E}_{\text{int, a}} = (\alpha a + E_o\cos\theta)\overrightarrow{u_r}$$

5.

$$V_{ext} = \frac{\alpha a^3}{r} + \frac{\lambda\cos\theta}{r^2}$$

En $r = a$,

$$V_{ext}(a) = \alpha a^2 + \frac{\lambda\cos\theta}{a^2}$$

Or

$$V_{int}(a) = -\frac{\alpha a^2}{2} - E_o a\cos\theta + C$$

V est continu en $r = a$ donc $V_{ext}(a) = V_{int}(a)$, ce qui conduit à

$$\cos\theta\left(\frac{\lambda}{a^2} + aE_o\right) = -\frac{3\alpha a^2}{2} + C.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit θ, il vient

$$\lambda = -E_o a^3 \qquad \text{et} \qquad C = 3\alpha a^2/2$$

6.

$$E_{ext,r}(M) = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial r} = \frac{\alpha a^3}{r^2} + \frac{2\lambda\cos\theta}{r^3} \qquad \text{et} \qquad E_{ext,a} = \alpha a + \frac{2\lambda\cos\theta}{a^3}.$$

7. La discontinuité de la composante normale du champ s'écrit :

$$E_{ext,a} - E_{int,a} = \sigma/\varepsilon_o$$

soit :

$$\left(\alpha a + \frac{2\lambda\cos\theta}{a^3}\right) - (\alpha a + E_o\cos\theta) = \sigma/\varepsilon_o,$$

avec $\lambda = -E_o a^3$. On obtient ainsi la densité surfacique de charges :

$$\sigma = -3\varepsilon_o E_o\cos\theta$$

qui vaut $-3\varepsilon_o E_o$ pour $\theta = 0$, qui vaut 0 pour $\theta = \pm\pi/2$ et qui vaut $+3\varepsilon_o E_o$ pour $\theta = \pi$. σ est négatif pour $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ et positif dans l'autre hémisphère correspondant à $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$.

8. La charge totale portée par la surface s'écrit :

$$Q_S = \iint_S \sigma \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} (-3\varepsilon_o E_o\cos\theta)(2\pi a^2 \mathrm{d}\theta) = 0.$$

Celle portée par l'ensemble de la sphère s'écrit :

$$Q = \iiint \rho \mathrm{d}\tau = \rho V = 4\pi a^3 \alpha\varepsilon_o.$$

9.a. Le moment dipolaire de plusieurs charges ponctuelles s'écrit $\overrightarrow{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$.
Pour une distribution continue de charges, il s'écrit :

$$\overrightarrow{p_V} = \iiint \rho \overrightarrow{\mathrm{OM}} \mathrm{d}\tau = \iiint \rho r \overrightarrow{u_r} \mathrm{d}\tau$$

ou bien

$$\overrightarrow{p_S} = \iint \sigma r \overrightarrow{u_r} \mathrm{d}S.$$

b.c. $\rho = 3\alpha\varepsilon_o = \mathrm{Cte}$, en prenant deux points M et M′ de la sphère diamètralement opposés :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{0},$$

donc

$$\overrightarrow{p_V} = \overrightarrow{0}.$$

Par contre,

$$\sigma = -3\varepsilon_o E_o\cos\theta, \mathrm{d}S = a^2\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, r\overrightarrow{u_r} = a\overrightarrow{u_r}$$

d'où

$$\overrightarrow{p_S} = -3\varepsilon_o E_o a^3 \overrightarrow{u_z} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_S} = -4\pi\varepsilon_o E_o a^3 \overrightarrow{u_z}$$

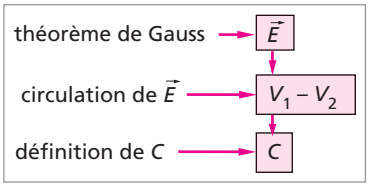
10.

$$V_{\mathrm{ext}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Le potentiel de la sphère est égal à celui d'une charge ponctuelle Q située au centre O de la sphère, additionnée de celui d'un dipôle de moment $\overrightarrow{p}$ situé également en O.

7 **1.** Méthode générale pour le calcul d'une capacité :

Ici, le champ est radial : $\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{u_r}$. On choisit une surface de Gauss sphérique, de centre O et de rayon r. Le flux du champ électrostatique sortant de cette surface vaut $\Phi = 4\pi r^2 E$. Soient $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{E_3}$ les champs dans les trois régions de l'espace délimitées par les deux sphères.



Si $r < R_1$,

$$Q_{\text{int}} = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{0}.$$

Si $R_1 < r < R_2$,

$$Q_{\text{int}} = Q_1, \qquad \Phi = Q_1/\varepsilon_o, \qquad \overrightarrow{E_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2}\overrightarrow{u_r}.$$

Si $r > R_2$,

$$Q_{\text{int}} = Q_1 + Q_2 = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{0}.$$

On en déduit

$$V_1 - V_2 = -\int_2^1 \overrightarrow{E_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_2^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Puis la capacité :

$$C = Q_1/(V_1 - V_2)$$

$$C = 4\pi\varepsilon_o\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

Remarque : Si $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$ alors $C \approx 4\pi\varepsilon_o\dfrac{R_1^2}{e} = \dfrac{\varepsilon_o S}{e}$. On retrouve la capacité d'un condensateur plan.

A.N. $C = 2.10^{-11}$ F $= 20$ pF.

2.
$$V_o = V_1 - V_2 \Longrightarrow Q_o = Q_1 = CV_o = 4.10^{-8}\ \text{C} = 40\ \text{nC}.$$

3. La conservation de la charge s'écrit (Voir figure page suivante) :

$$Q_o = CV_o = Q + Q'.$$

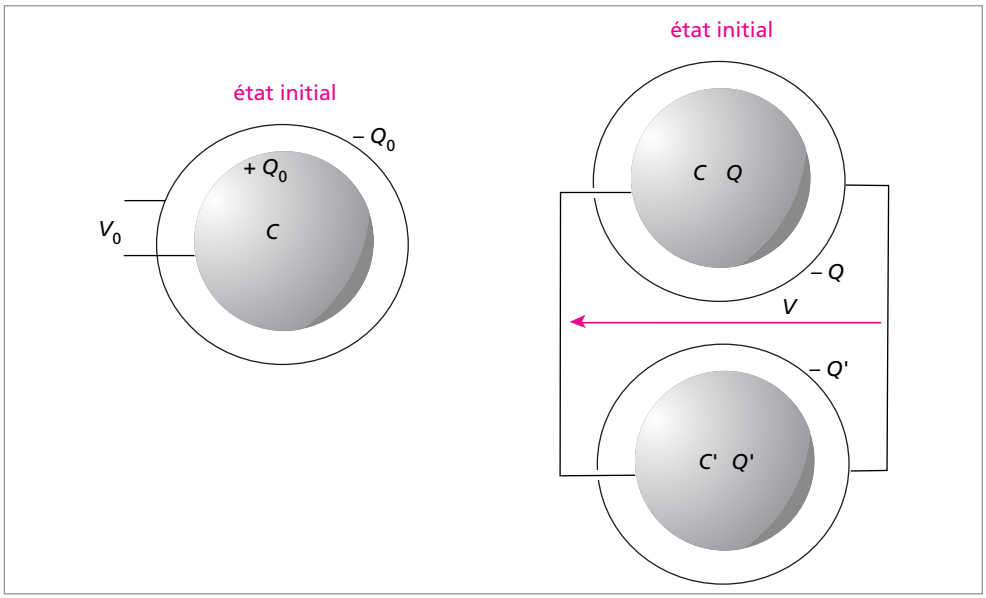
Les condensateurs étant montés en parallèle, ils sont soumis à la même tension entre leurs armatures :

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q'}{C'}.$$

D'où :

$$Q = \frac{C^2V_o}{C + C'} \quad Q' = \frac{CC'V_o}{C + C'} \quad V = \frac{CV_o}{C + C'}$$

A.N. $Q = 10$ nC , $Q' = 30$ nC , $V = 500$ V.



8 **1.** $p = \sigma^2/2\varepsilon_o$. La capacité d'une sphère vaut $C = 4\pi\varepsilon_o R$, La surface S porte la charge $Q = CV = 4\pi\varepsilon_o RV$, donc la densité surfacique de charge vaut :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon_o V}{R},$$

d'où :

$$p = \frac{\varepsilon_o V^2}{2R^2}$$

La petite surface du disque $s = \pi r^2$ est soumise à la force $F = ps$, d'où :

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon_o V^2 \pi r^2}{2R^2}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de O vers O′. Cette force repousse le disque vers le haut.

2. Le système « disque » se soulève si $F > P$ donc si $\dfrac{\varepsilon_o V^2 \pi r^2}{2R^2} > mg$, soit pour un potentiel $V \geqslant V_o$ tel que :

$$V_o = \frac{R}{r}\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_o \pi}}$$

3. Puisque $V > V_o$, le disque a décollé. Son centre M se trouve à la distance h du point O. Or la sphère S crée, en M, le champ :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{Q\vec{u}}{4\pi\varepsilon_o(R+h)^2} = \frac{RV\vec{u}}{(R+h)^2}.$$

Comme le disque porte la charge

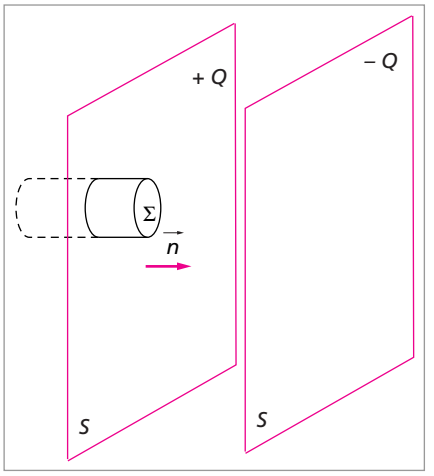
$$q = \sigma s = \frac{\varepsilon_o V_o \pi r^2}{R},$$

il est soumis à la force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}\,(\mathrm{M})$ en plus de son poids. À l'équilibre : $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$. Ceci conduit à une hauteur h de « lévitation » telle que :

$$h = R\left(\sqrt{\frac{2V}{V_o}} - 1\right)$$

9 **1.** La méthode générale, décrite dans l'exercice 7 est appliquée ici à une surface de Gauss Σ située de part et d'autre de l'une des armatures. La discontinuité du champ de part et d'autre de cette armature peut aussi être utilisée :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} n = \frac{Q}{\varepsilon_o S}\overrightarrow{n}.$$



La circulation du champ entre les armatures s'écrit :

$$V_1 - V_2 = -\int_1^2 \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \frac{Qd}{\varepsilon_o S}.$$

D'où la capacité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_o S}{d}$$

2. Soit $\overrightarrow{F_{\mathrm{el}}}$ la force exercée par l'armature portant la charge $-Q$ sur l'armature opposée, portant la charge $+Q$. L'opérateur exerce la force $\overrightarrow{F}_{\mathrm{op}} = -\overrightarrow{F_{\mathrm{el}}}$.
Or

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{el}}} = pS\overrightarrow{n} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_o}\overrightarrow{n} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}\overrightarrow{n},$$

d'où :

$$W_{\mathrm{op}} = \int_1^2 \overrightarrow{F_{\mathrm{op}}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \frac{Q^2(d'-d)}{2\varepsilon_o S}$$

Or l'énergie électrostatique du condensateur dans l'état initial et dans l'état final valent respectivement

$$W_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}QV \quad \text{et} \quad W_f = \frac{1}{2}QV',$$

donc

$$\Delta W = W_f - W_{\mathrm{i}} = \frac{Q^2(d'-d)}{2\varepsilon_o S} = W_{\mathrm{op}}.$$

Le système étant électriquement isolé, il n'y a pas d'effet Joule, donc pas de perte d'énergie.

3. Q dépend de la distance x entre les armatures selon la relation :

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_o SV}{x}$$

Quand cette distance x augmente, Q diminue. Un calcul identique au précédent conduit à :

$$F = pS = \frac{\varepsilon_o SV^2}{2x^2} \quad \text{et} \quad W_{op} = \int_i^f \overrightarrow{F_{op}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \frac{\varepsilon_o SV^2(d' - d)}{2dd'}$$

Dans ce cas $\Delta W = -W_{op} < 0$: le condensateur perd de l'énergie bien que l'opérateur lui fournisse du travail. La charge Q diminue et $(Q - Q')$ passe dans le générateur qui maintient la tension constante. Si cette tension était créée par un accumulateur et que le déplacement était infiniment lent (donc sans provoquer d'effet Joule), cette différence d'énergie correspondrait à l'augmentation d'énergie chimique de l'accumulateur qui se rechargerait ainsi.

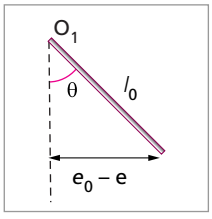
10

1. Dans le condensateur : $E = V/e$. Or chaque armature contribue pour moitié au champ total. D'autre part, la charge portée par chaque armature vaut :

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_o SV}{e}$$

Donc chaque armature subira la force :

$$F = QE = \left(\frac{\varepsilon_o SV}{e}\right)\left(\frac{V}{2e}\right)$$

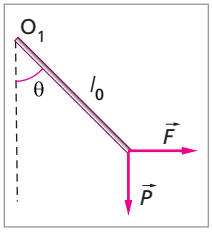


D'après le schéma, $e_o - e = l_o \sin\theta$ et

$$F = \frac{\varepsilon_o SV^2}{2(e_o - l_o \sin\theta)^2}$$

2. À l'équilibre, la somme des moments des forces s'annule :

$$\Gamma_{\overrightarrow{F}} + \Gamma_{\overrightarrow{P}} = 0,$$



soit $Fl_o \cos\theta - mgl_o \sin\theta = 0$, d'où :

$$\frac{\varepsilon_o SV^2 l_o \cos\theta}{2(e_o - l_o \sin\theta)^2} = mgl_o \sin\theta$$

3. Au premier ordre, $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$ (en radian) et l'équation précédente devient : $\varepsilon_o SV^2 \approx 2mg\theta(e_o - l_o\theta)^2 \approx 2mg\theta e_o^2$. D'où :

$$\theta \approx \frac{\varepsilon_o SV^2}{2mge_o^2}$$

4.a. On est limité par le contact entre (P) et (P_o), soit pour $\sin\theta_{max} = e_o/l_o = 0{,}1$ donc $\theta = 5{,}74°$.

b. Si $\theta = \theta_{max}/2$ lorsque $V = V_{max}$, alors $\dfrac{\theta_{max}}{2} \approx \dfrac{\varepsilon_o S V_{max}^2}{2mge_o^2}$ avec $\theta_{max} \approx e_o/l_o$.
On obtient :

$$V_{max} = \sqrt{\frac{mge_o^3}{\varepsilon_o S l_o}} = 333\ kV$$

11 **1.** Il faut utiliser $U = \dfrac{1}{2}\iiint_\tau \rho(P)V(P)d\tau$ et pour cela trouver l'expression du potentiel $V(P)$ intérieur à la sphère. Le théorème de Gauss appliqué à une surface sphérique de rayon r donne :

si $r < R$: $Q_{int} = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$, $\Phi = 4\pi r^2 E_{int} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$ d'où $E_{int} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o}$ et $V_{int} = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} + C_1$

si $r > R$: $Q_{int} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$, $\Phi = 4\pi r^2 E_{ext} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$ d'où $E_{ext} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}$ et $V_{ext} = -\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r} + C_2$

Quand r tend vers l'infini, V_{ext} tend vers 0, d'où $C_2 = 0$.

La continuité du potentiel en $r = R$, $V_{int}(R) = V_{ext}(R)$ conduit à $C_1 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}$, soit finalement l'expression du potentiel cherché : $V_{int} = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} + \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}$. L'énergie électrostatique de la sphère vaut alors :

$$U = \frac{1}{2}\int_0^R \rho V_{int} 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{4\rho^2\pi R^5}{15\varepsilon_o} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o R}$$

2. Méthode de « la pelure d'oignon »
Soit une sphère de rayon $r < R$ et portant la charge q. Le potentiel créé à sa surface vaut $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$. Or si cette sphère est une partie de la sphère étudiée de densité volumique ρ, $q = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$ et $V(r) = \dfrac{\rho r^2}{3\varepsilon_o}$. On désire recouvrir cette sphère par une calotte sphérique de rayon r et d'épaisseur dr. Cette calotte portera la charge $dq = 4\pi r^2\rho dr$. Le travail nécessaire pour amener cette calotte depuis l'infini jusqu'à la surface de la sphère de rayon r vaut $dU = dqV(r)$. Si la sphère de rayon R est ainsi construite par calottes successives, il aura fallu fournir le travail :

$$U = \int_0^R V(r)dq = \int_0^R \left(\frac{\rho r^2}{3\varepsilon_o}\right)(4\pi r^2\rho dr) = \frac{4\rho^2\pi R^5}{15\varepsilon_o} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o R}$$

3. Il faut utiliser la densité d'énergie :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon o \left\|\overrightarrow{E}(P)\right\|^2$$

qui conduit à l'énergie :

$$U = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2}\varepsilon o \left\| \overrightarrow{E}(\mathrm{P}) \right\|^2 \mathrm{d}\tau$$

L'intégrale portant sur tout l'espace, il faut distinguer l'espace intérieur à la sphère où règne $E_{\text{int}} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o}$ et l'espace extérieur où règne $E_{\text{ext}} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}$. On est amené à calculer la somme des deux intégrales :

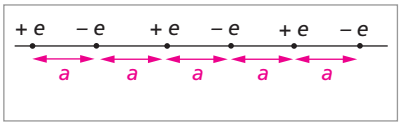
$$U = \frac{\varepsilon_o}{2}\left[\int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_o}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r\right].$$

On obtient évidemment le même résultat qu'aux deux questions précédentes.

Remarque : ce calcul peut être refait dans le cas d'une sphère portant la même charge totale Q mais répartie uniformément sur sa surface. On obtient alors une énergie électrostatique $U = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R}$ inférieure à celle de sphère chargée en volume.

12 L'énergie de l'ensemble de la chaîne s'écrit, avec $N \longrightarrow \infty$,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}}$$



L'énergie par ion vaudra :

$$U_{\text{ion}} = \mathrm{Lim}_{N\longrightarrow\infty}\frac{U}{N}.$$

Or

$$\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a}+\frac{1}{4a}-\ldots.\right)\times 2.$$

La multiplication par 2 provient de la sommation sur les deux demi-droites à gauche et à droite de l'origine. Dans cette suite, on reconnaît le développement limité de

$$\mathrm{Ln}(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

pour $x = 1$, soit pour Ln2. L'énergie par ion devient :

$$U = -\frac{e^2 \mathrm{Ln}2}{4\pi\varepsilon_o a}$$

$U < 0$ signifie que l'opérateur fournit du travail pour former le cristal ionique, de plus, si la distance a entre les ions diminue, ce travail augmente.

13 **1.a.**

$$F \gg P = mg\,; \qquad q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

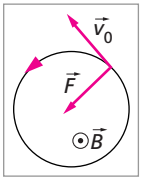
b. L'accélération $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, il en est de même pour $\vec{v_o}$, le mouvement de la particule se fait donc dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

Dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u_t} + \dfrac{v^2}{R}\vec{u_n}$ et $\vec{v} = v\vec{u_t}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$qv\vec{u_t} \wedge Bv\vec{u_z} = m\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R}\vec{u_n}\right].$$

Or $\vec{u_t} \wedge \vec{u_z} = \vec{u_n}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et $v = \text{Cte} = v_o$. De plus $|q|\,v_oB = \dfrac{mv_o}{R}$ d'où $R = \dfrac{mv_o}{|q|\,B} = \text{Cte}$: le mouvement est circulaire et uniforme, de période :

$$T = \frac{2\pi R}{v_o} = \frac{2\pi m}{|q|\,B}.$$



Si $q < 0$ la trajectoire est représenté ci-contre.

c. $\vec{B}$ maintient la trajectoire circulaire et plane.

d. La trajectoire devient hélicoïdale d'axe Oz.

e. L'accélération initiale de l'électron est soumise à la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}v^2 = e\Delta V \quad \text{d'où} \quad v_o = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = 5{,}96.10^7\ \mathrm{ms}^{-1}, \quad R = 6{,}7\ \mathrm{cm} \quad \text{et} \quad T = 7{,}1\ \mathrm{ns}.$$

2.a. En coordonnées cylindriques,

$$\vec{r} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z},\ \vec{v} = v_r\vec{u_r} + v_\theta\vec{u_\theta} + v_z\vec{u_z} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u_\theta} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}$$

et

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{u_r} + \left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right]\vec{u_\theta} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{u_z}.$$

La relation fondamentale de la dynamique $q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, projetée sur les trois axes devient :

$$\text{sur } \vec{u_r} : \omega_C v_\theta = a_r \text{ soit } \omega_C r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\text{sur } \vec{u_\theta} : -\omega_C v_r = a_\theta \text{ soit } -\omega_C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\text{sur } \vec{u_z} : 0 = a_z \text{ soit } 0 = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

b. En introduisant $r = R + \epsilon$ et $\dfrac{d\theta}{dt} = -\omega_C + \omega'$, la deuxième équation du trio ci-dessus donne

$$-\omega_C \frac{d\epsilon}{dt} = 2\frac{d\epsilon}{dt}(-\omega_C + \omega') + (R + \epsilon)\frac{d\omega'}{dt}.$$

À l'ordre 0, $\epsilon = 0$, $\omega' = 0$. A l'ordre 1, $\omega_C \dfrac{d\epsilon}{dt} = R\dfrac{d\omega'}{dt}$ ou encore :

$$\omega_C \epsilon = R\omega'$$

(la constante d'intégration doit être nulle, pour respecter le résultat à l'ordre 0).

c. Il en est de même pour la première équation du trio de la question 2-a, qui devient :

$$\omega_C(R + \epsilon)(-\omega_C + \omega') = \frac{d^2\epsilon}{dt^2} - (R + \epsilon)(-\omega_C + \omega')^2.$$

En remplaçant ω' par $\omega_C\epsilon/R$, elle s'écrit au premier ordre en ϵ/R :

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \omega_C^2 \epsilon.$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est de la forme $\epsilon = \mathcal{A}e^{-\omega_C t}$, elle décroît et s'annulle rapidement quand t augmente. Il y a donc retour rapide à la valeur $r = R$ selon $\overrightarrow{u_r}$. De plus, si ϵ s'annule rapidement, il en est de même pour ω'. Il y a retour à la position d'équilibre également selon $\overrightarrow{u_\theta}$.

d. La dernière équation du trio de la question 2.a conduit à

$$\frac{dz}{dt} = \text{Cte} = v_{oz} = v_z.$$

Le mouvement hélicoïdal se fait à vitesse constante selon l'axe de l'hélice.

14 **1.** La charge q est soumise à $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ parallèle à $y'y$ et dirigée dans le sens négatif de l'axe, quelle que soit le signe de q. A se charge donc positivement, C négativement, $V_h > 0$, quelle que soit le signe de q.

2. Pour que le mouvement des charges reste rectiligne et uniforme (régime continu, I = Cte) il faut qu'il existe une force $\overrightarrow{F_h} = -\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E_h} = -q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, d'où le champ de Hall $\overrightarrow{E_h} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ dirigé selon Oy. Il lui correspond une tension de Hall $V_h = E_h a = vBa$. Or $I = jab$ et $j = \rho v = nqv$. On obtient :

$$V_h = \frac{IBR_h}{b}$$

3. $n = \dfrac{\rho N}{M}$ où N est le nombre d'Avogadro ;

$$R_h = \frac{M}{\rho N e} \quad \text{et} \quad V_h = \frac{IBM}{\rho N e b}$$

4. Cet effet est utilisé pour la mesure de B (teslamètre) dans la sonde à effet Hall. On utilise un semi-conducteur qui permet d'amplifier la tension de Hall grâce aux deux types de porteurs de charges : les trous et les électrons.

15 **1.** $\overrightarrow{F} = -\mathrm{e}\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ est projetée sur les trois axes, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{e}}{m}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mathrm{e}B}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{\mathrm{e}B}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

La troisième équation donne $\dot{z} = \mathrm{Cte} = v_{oz} = 0$, $z = \mathrm{Cte} = z_o = 0$: le mouvement est plan.
Méthode classique de la variable complexe : on pose $Z = x + \mathrm{i}y$, les deux premières équations reviennent alors à :

$$\ddot{Z} = i\frac{\mathrm{e}B}{m}\dot{Z} = \mathrm{i}\omega_C\dot{Z}$$

qui admet comme solution

$$\dot{Z} = \dot{Z}_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_C t} = (\dot{x}_o + \mathrm{i}\dot{y}_o)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_C t} = \mathrm{i}v_o\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_C t}$$

ou encore $\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} = \mathrm{i}v_o(\cos\omega_C t + \mathrm{i}\sin\omega_C t)$. On obtient ainsi les équations horaires du mouvement :

$$x = \frac{v_o}{\omega_C}(\cos\omega_C t - 1)$$

$$y = \frac{v_o}{\omega_C}\sin\omega_C t$$

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps dans ces deux équations :

$$\left(x + \frac{v_o}{\omega_C}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_o}{\omega_C}\right)^2$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon

$$r = \frac{v_o}{\omega_C} = \frac{mv_o}{eB}$$

de centre O′ ($x_{O'} = -\dfrac{v_o}{\omega_C}$, $y_{O'} = z_{O'} = 0$). Ce cercle appartient au plan xOy et il est parcouru dans le sens trigonométrique à la pulsation cyclotron ω_C.

2. Le théorème de l'énergie cinétique entre anode et cathode s'écrit

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = eU$$

d'où $$v_o = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \text{puis} \quad r = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}$$

qui conduit à $$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}$$

A.N. $e/m = 1{,}74.10^{11}$ C.kg^{-1}; $\Delta(e/m)/(e/m) = 2\Delta r/r = 10\,\%$;

$e/m = (1{,}7 \pm 0{,}2)10^{11}$ C.kg^{-1} $\quad m = (9{,}2 \pm 0{,}9)10^{-31}$ kg

3. On a toujours $\ddot{z} = 0$, donc $\dot{z} = \text{Cte} = \dot{z}_o = v_o \cos\alpha$, d'où $z = v_o t \cos\alpha$. Les autres équations horaires deviennent :

$$x = \frac{v_o \sin\alpha}{\omega_C}(\cos\omega_C t - 1) \quad \text{et} \quad y = \frac{v_o}{\omega_C}\sin\alpha \sin\omega_C t.$$

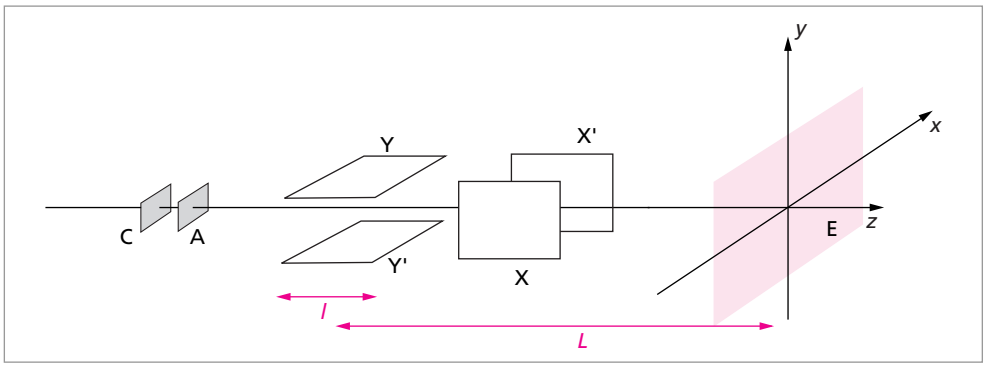
En projection sur xOy on obtient un cercle de centre O$''$

$$\left(x_{O''} = -\frac{v_o \sin\alpha}{\omega_C}, y_{O''} = z_{O''} = 0\right)$$

et de rayon $r = \dfrac{mv_o \sin\alpha}{eB}$. Puisque $z = v_o t \cos\alpha$, on obtient une hélice de base circulaire et d'axe Oz.

16 Bien que cet exercice ne fasse intervenir que le champ électrique, il est placé ici de manière à comparer la trajectoire d'un électron soumis à un tel champ (oscilloscope) ou à un champ magnétique (télévision). On conclura ces deux exercices en faisant cette comparaison : nature des trajectoires, formes différentes des deux appareils, pourquoi ne pas inventer un oscilloscope à champ magnétique et une télévision à champ électrique ?...

1.



2.a. Entre les plaques Y′Y :

$$\frac{eU}{d} = m\frac{d^2y}{dt^2} \Longrightarrow \frac{eUt}{md} = \frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{eUt^2}{2md} = y \Longrightarrow y = \frac{eUz^2}{2mdv_o^2}$$

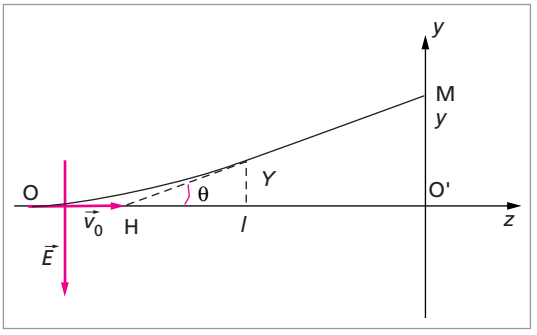
$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} \Longrightarrow 0 = \frac{dz}{dt} \Longrightarrow v_o t = z \Longrightarrow t = \frac{z}{v_o}$$

Pour $z = l,\ y = Y = \dfrac{eUl^2}{2mdv_o^2}$.

En dehors des plaques, le mouvement est rectiligne et uniforme :

$$\tan\theta = \frac{y}{L} = \frac{Y}{l/2} = \frac{2Y}{l}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{eUlL}{mdv_o^2}$$



auquel s'ajoute le théorème de l'énergie cinétique entre C et A :

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = eU_{AC}$$

b. sur l'écran $y = \dfrac{UlL}{2dU_{AC}}$: la déviation est bien proportionnelle à U.

3. $T' = T$: on voit une période de la sinusoïde,
$T' = 2T$: on voit deux périodes de la sinusoïde
$T' = T/2$: on voit une demi-période de la sinusoïde.

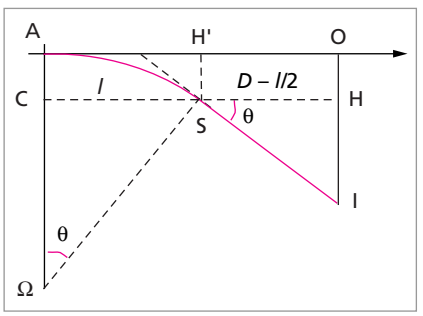
17

1.

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = eU_{AC} \Longrightarrow U_{AC} = \frac{mv_o^2}{2e} = 1{,}5 \text{ kV}.$$

2. $\overrightarrow{B_1}$ est dirigé dans le sens inverse de l'axe $z'z$ pour que la trajectoire soit concave et la force de Lorentz dirigée vers l'intérieur de l'arc de cercle,

$$R_1 = \frac{mv_o}{eB_1} = 0{,}187 \text{ m}.$$



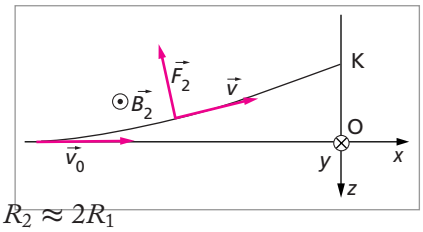
Dans P, le mouvement est uniforme,

$$v_S = v_o = 2{,}3.10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

Entre S et I, le mouvement est rectiligne et uniforme à la vitesse v_o.

$$\mathrm{OI} = \mathrm{OH} + \mathrm{HI} = \mathrm{AC} + \mathrm{HI} = R(1 - \cos\theta) + \left(D - \frac{l}{2}\right)\tan\theta \approx \frac{l^2}{2R_1} + \frac{Dl}{R_1} = 3\ \mathrm{cm}.$$

3. $\overrightarrow{F_2} = -e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_2}$ est parallèle à l'axe $y'y$ à l'entrée de P.



$$\mathrm{OK} \approx \frac{l^2}{2R_2} + \frac{Dl}{R_2} \quad \text{d'où} \quad R_2 = \frac{l(l+2D)}{2\mathrm{OK}}.$$

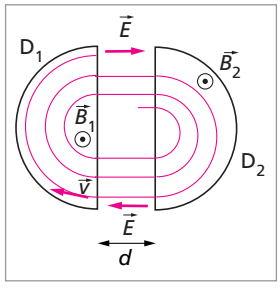
Or

$$\mathrm{OK} = \mathrm{OI}/2 \quad \text{d'où} \quad R_2 \approx 2R_1$$

Comme R est inversement proportionnel à B,

$$B_2 = B_1/2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_2} = 3{,}5.10^{-4}\overrightarrow{u_y}.$$

18 **1.** Voir figure ci-contre



2. Dans un *dee*, $R = \dfrac{mv}{eB}$, la durée d'un demi-tour vaut $\tau = \dfrac{\pi R}{v} = \dfrac{\pi m}{eB}$. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ régnant entre les dees doit changer de sens à chaque demi-tour de la particule. Sa période sera $T = 2\tau$ et sa fréquence

$$f = \frac{eB}{2\pi m} = 2{,}8\ \mathrm{GHz}$$

3. Entre deux *dees*, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, d'accélération $a = \dfrac{eE}{m} = 8{,}8.10^{15}\ \mathrm{ms}^{-2}$. Dans un dee, le mouvement est circulaire uniforme, d'accélération $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

4. $R_{max} = \dfrac{mv_{max}}{eB}$ donc $E_{Cmax} = \dfrac{(mv_{max})^2}{2m} = \dfrac{(eBR_{max})^2}{2m}$ en Joules, ou $E_{Cmax} = \dfrac{e(BR_{max})^2}{2m}$ en eV. $E_{Cmax} = 0{,}56$ GeV

5. $E_{Cmax} = eU$ d'où $U = 0{,}56.10^9$ V.

6. Entre chaque demi-tour : $\Delta E_c = eU_m$. Le nombre total de demi-tours sera donc égal à E_{Cmax}/eU_m. Le nombre de demi-tours dans chaque dee sera deux fois plus petit, soit égal à 28 000.

19 **1.** $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$: $v_1 = 1{,}32.10^5\ \mathrm{ms}^{-1}$; $v_2 = 1{,}31.10^5\ \mathrm{ms}^{-1}$.

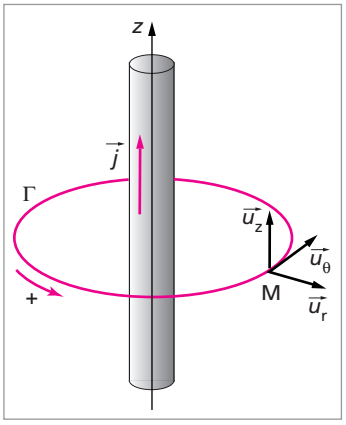
2. Pour que la force de Lorentz soit centripète, $\overrightarrow{B}$ doit être dans le même sens que $\overrightarrow{k}$.
$R = \dfrac{mv}{eB}$. R est constant, le mouvement est donc circulaire et uniforme.
A.N. $R_1 = 24{,}1$ cm ; $R_2 = 24{,}5$ cm.

3. Les points d'impacts seront donc séparés de $2(R_2 - R_1) = 8$ mm.

4. $R_o = 92{,}28$; $R = 89{,}23$; $\delta = -33{,}05$ le test est donc positif.

20 **1.** Les plans de symétrie du système contiennent M et $z'z$, $\overrightarrow{B}$ étant un vecteur axial, il est perpendiculaire à ces plans : $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_\theta}$. Il y a invariance par translation selon $z'z$: B est indépendant de z. Il y a invariance par rotation autour de $z'z$: B est indépendant de θ. Soit finalement :

$$\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}.$$



La courbe d'Ampère sera un cercle (Γ) de rayon r, passant par M et orientée selon $z'z$:

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B \cdot 2\pi r.$$

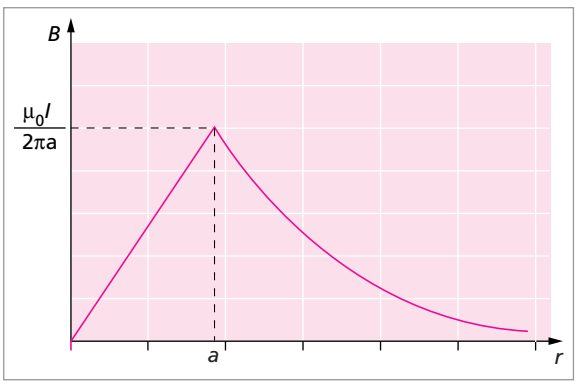
Si $r > a$: $\sum I_{\text{enlacés}} = I$, d'où $B \cdot 2\pi r = \mu_o I$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$,

si $r < a$: $\sum I_{\text{enlacés}} = j \cdot \pi r^2$, d'où $B \cdot 2\pi r = j\mu_o \pi r^2$ et $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \dfrac{\mu_o jr}{2}\overrightarrow{u_\theta}$,

si $r = a$: la densité surfacique de courant est nulle, $j_\sigma = 0$ d'où

$$\overrightarrow{B_{\text{int}}}(a) = \overrightarrow{B_{\text{ext}}}(a) = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\overrightarrow{u_\theta}$$

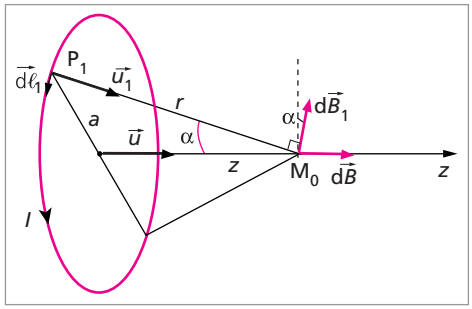
$\overrightarrow{B}$ est continu en $r = a$.
Les variations de B en fonction de r sont représentées ci-contre.



2. $B = 2.10^{-5}$ T $= 100B_h$.

3. Pour que la boussole soit désaimantée, il faut que $B_{\text{éclair}} > B_l$. Comme on se trouve à l'extérieur de l'éclair, cela revient à écrire $\dfrac{\mu_o I}{2\pi r} > B_l$, soit $r < 8{,}3$ m.

21 **1.** L'infinité de plans perpendiculaires à la spire et contenant $z'z$ sont des plans d'anti-symétrie (symétrie S.I.). $\overrightarrow{B}$ étant un vecteur axial, il est contenu dans les plans d'anti-symétrie : $\overrightarrow{B}$ est donc colinéaire à $z'z$: $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$. Il y a invariance par rotation autour de $z'z$: B est indépendant de θ et $\overrightarrow{B} = B(z)\overrightarrow{u_z}$. La loi de Biot et Savart permet d'exprimer le champ $\overrightarrow{dB_1}$ créé en M_o par l'élément de conducteur $\overrightarrow{d\ell_1}$:



$$\overrightarrow{dB_1} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\overrightarrow{d\ell_1} \wedge \overrightarrow{u}_1}{r^2}$$

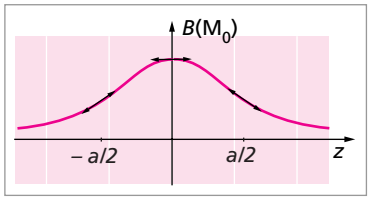
qui est perpendiculaire à P_1M_o. Or seule sa projection sur l'axe $z'z$ compte, soit $dB_{1z} = dB_1 \sin\alpha$ avec $\sin\alpha = a/r$. L'ensemble de la spire créera le champ :

$$\overrightarrow{B} = \oint_{\text{spire}} dB_{1z}\,\overrightarrow{u} = \frac{\mu_o I a}{4\pi r^3}\overrightarrow{u}\oint d\ell_1 = \frac{\mu_o I a^2}{2r^3}\overrightarrow{u}.$$

Or $B(O) = \dfrac{\mu_o I}{2a}$, d'où :

$$\overrightarrow{B}(M_o) = B(O)\left(\frac{a}{r}\right)^3\overrightarrow{u} = B(O)\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{-3/2}\overrightarrow{u}$$

Les variations de B en fonction de z sont représentées sur la figure ci-contre.



2. Le flux de $\overrightarrow{B}$ sortant d'une surface fermée est nul. Or $B = B(r, z)$, l'équation locale correspondante s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\,\overrightarrow{B} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial(rB_z)}{\partial z}\right] = 0.$$

Elle conduit à

$$\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -\frac{\partial(rB_z)}{\partial z}.$$

Si $r \ll a$, $B_z \approx B_o(z)$, d'où

$$\frac{\partial(rB_z)}{\partial z} = r\frac{dB_o(z)}{dz} \qquad \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r\frac{dB_o(z)}{dz}$$

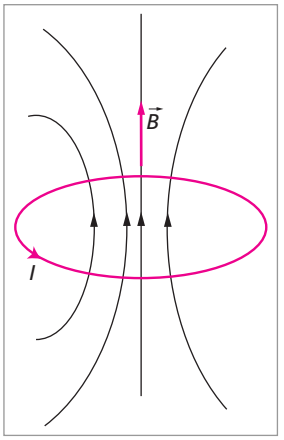
qui s'intègre :

$$rB_r(r, z) = -\frac{r^2}{2}\frac{dB_o(z)}{dz}$$

et donne :

$$B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2}\frac{dB_o(z)}{dz}$$

D'après les variations de B en fonction de z représentées dans la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}B_\mathrm{o}(z)}{\mathrm{d}z} < 0$, quel que soit z, donc $B_\mathrm{r}(r, z) > 0$, quels que soient r et z. C'est la seule possibilité pour que les lignes de champ se referment à l'infini.



22 **1.** D'après la première question de l'exercice précédent, le champ créé par une spire en M vaut :

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_\mathrm{o} I}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \overrightarrow{u} = \frac{\mu_\mathrm{o} I}{2a}\sin^3\alpha\,\overrightarrow{u}.$$

Pour $n\mathrm{d}z$ spires, il vaudra

$$\overrightarrow{\mathrm{d}B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_\mathrm{o} n\mathrm{d}z I}{2a}\sin^3\alpha\,\overrightarrow{u}.$$

Or $z = \mathrm{MP}$, $\tan\alpha = a/z$, $\mathrm{d}z = a\mathrm{d}\alpha/\sin^2\alpha$, donc

$$\overrightarrow{\mathrm{d}B}(\mathrm{M}) = -\frac{\mu_\mathrm{o} n I}{2}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\,\overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_\mathrm{o} n I}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\overrightarrow{u}$$

2. Au centre du solénoïde, $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2 = \dfrac{L}{2\sqrt{(a^2 + L^2/4)}}$, d'où

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{O}) = \frac{\mu_\mathrm{o} n I L}{2\sqrt{(a^2 + L^2/4)}}\overrightarrow{u}$$

Si $a \ll L/2$ alors $\overrightarrow{B}_\infty(\mathrm{O}) = \mu_\mathrm{o} n I\overrightarrow{u}$. Pour le solénoïde réel, un développement limité de $\overrightarrow{B}(\mathrm{O})$ au second ordre en a/L conduit à

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{O}) \approx \mu_\mathrm{o} n I\overrightarrow{u}(1 - 2a^2/L^2) \qquad \frac{B_\infty(\mathrm{O}) - B(\mathrm{O})}{B_\infty(\mathrm{O})} < 1\% \text{ si } \frac{L}{a} < 14.$$

3. On applique le théorème d'Ampère à un contour rectangulaire dont deux côtés sont parallèles à $z'z$ et deux côtés lui sont perpendiculaires. Ce rectangle est situé soit entièrement à l'intérieur du solénoïde, soit entièrement à l'extérieur. Dans les deux cas, il n'enlace aucun courant. Sachant de plus que $\overrightarrow{B} = B(z)\overrightarrow{u}$ pour un solénoïde infiniment long, on en déduit que $\overrightarrow{B_\mathrm{ext}} = \overrightarrow{\mathrm{Cte}}$ ainsi que $\overrightarrow{B_\mathrm{int}} = \overrightarrow{\mathrm{Cte}'}$. D'où $\overrightarrow{B_\mathrm{int}} = \mu_\mathrm{o} n I\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{B_\mathrm{ext}} = \overrightarrow{0}$.
Il y a discontinuité du champ à la surface du solénoïde, qui respecte :

$$\overrightarrow{B_\mathrm{int}} - \overrightarrow{B}_\mathrm{ext} = \mu_\mathrm{o}\overrightarrow{j_\sigma} \wedge \overrightarrow{u_\mathrm{r}}$$

avec la densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_\sigma} = -nI\overrightarrow{u_\theta}$.

23 **1.** En un point M de l'axe :

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_o I}{2a}\sin^3\alpha\,\overrightarrow{u} = \frac{\mu_o I}{2a}\left(1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{-3/2}\overrightarrow{u} = \frac{\mu_o I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\overrightarrow{u}.$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} \propto -\frac{z}{(a^2+z^2)^{5/2}},\ \frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}z^2} \propto -\frac{1}{(a^2+z^2)^{5/2}} + \frac{5z^2}{(a^2+z^2)^{7/2}}.$$

Cette dérivée seconde s'annule pour $z = \pm a/2$ qui correspond bien à deux points d'inflexion. $B(a/2) = 0{,}716B(\mathrm{O})$ d'où $B(a/2)/B(\mathrm{O}) = 0{,}716$ et $B(a) = B(\mathrm{O})/2\sqrt{2}$.

A.N. $B(\mathrm{O}) = 9{,}26.10^{-4}\ \mathrm{T} = 46B_T$.

2.

$$B(x) = \frac{\mu_o NI}{2}\left[\frac{a^2}{\left[a^2+\left(\frac{d}{2}+x\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{a^2}{\left[a^2+\left(\frac{d}{2}-x\right)^2\right]^{3/2}}\right]$$

$$= f\left(z=\frac{d}{2}+x\right) + f\left(z=\frac{d}{2}-x\right)$$

avec

$$f(z) = \frac{\mu_o NI}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

$$f\left(z=\frac{d}{2}\pm x\right) = f\left(\frac{d}{2}\right) \pm xf'\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{x^2}{2}f''\left(\frac{d}{2}\right) + o(x^3),$$

d'où :

$$B(x) = 2f\left(\frac{d}{2}\right) + x^2 f''\left(\frac{d}{2}\right) + o(x^3)$$

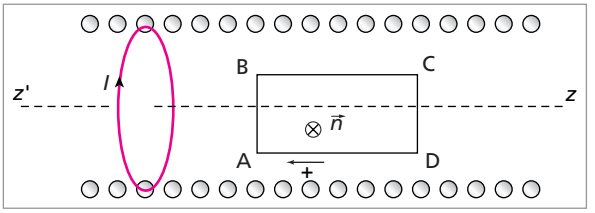
On aura $B(x) = 2f\left(\frac{d}{2}\right)$ si $f''\left(\frac{d}{2}\right) = 0$, ce qui correspond aux points d'inflexion de la courbe $B(z)$, obtenus pour $\frac{d}{2} = \frac{a}{2}$ soit $d = a$.

A.N. $B(\mathrm{O}) = 1{,}32$ mT, $B(\mathrm{O}_1) = 1{,}25$ mT $= 0{,}95B(\mathrm{O})$: le champ est uniforme à 5 % près.

24 **1.** Tout plan passant par une spire est un plan de symétrie. $\overrightarrow{B}$ étant un vecteur axial, il est perpendiculaire à ces plans de symétrie. $\overrightarrow{B}$ est donc parallèle à l'axe : $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$. Toute translation parallèle à $z'z$ ou toute rotation autour de $z'z$ laisse B inchangé ; B ne dépend ni de z ni de θ :

$$\overrightarrow{B} = B(\rho)\overrightarrow{u_z}.$$

2. On oriente arbitrairement le contour ABCD par la normale $\vec{n}$. Soient B_1 et B_2 les valeurs algébriques de B le long de AD et BC respectivement :



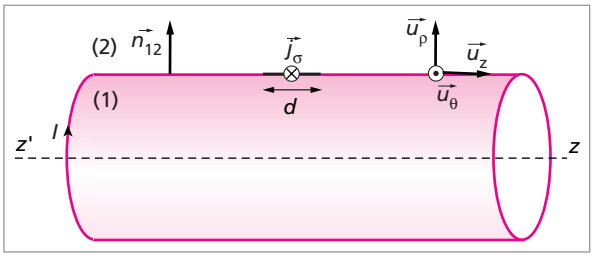
$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_2\overline{BC} + B_1\overline{DA}$$

$$= \overline{BC}(B_2 - B_1).$$

Dans le cas 1, $I_{enlacés} = 0$, d'où $B_2 = B_1$: le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.
Dans le cas 2, $I_{enlacés} = 0$, d'où $B_2 = B_1$: le champ est uniforme et nul à l'extérieur du solénoïde.
Dans le cas 3, $\sum I_{enlacés} = nI\overline{BC} > 0$, $\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \overline{BC}(B_{ext} - B_{int}) = -\overline{BC}B_{int}$, d'où :

$$\vec{B}_{int} = -\mu_o nI\vec{u}_z$$

3. La densité surfacique de courant circulant à la surface du solénoïde se définit par :



$\left\|\vec{j_\sigma}\right\|$ qui est l'intensité traversant un segment de longueur d parallèle à Oz donc $\left\|\vec{j_\sigma}\right\| = \dfrac{nId}{d} = nI$. Soit, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{j_\sigma} = -nI\vec{u_\theta}$$

On vérifie la relation de passage

$$\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \mu_o nI\vec{u}_z$$

et d'autre part

$$\vec{j_\sigma} \wedge \vec{u_\rho} = -nI\vec{u_\theta} \wedge \vec{u_\rho} = nI\vec{u}_z$$

d'où

$$\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \mu_o \vec{j_\sigma} \wedge \vec{u_\rho}.$$

4.a. Tout plan passant par une spire est un plan de symétrie. $\vec{A}$ étant un vecteur polaire, il est contenu dans ces plans : $A_z = 0$. De plus

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_C \frac{I\vec{d\ell}}{r},$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} // -\overrightarrow{u_\theta}$. Enfin toute translation parallèle à $z'z$ ou toute rotation autour de $z'z$ laisse A inchangé donc

$$\overrightarrow{A} = A_\theta(\rho)\overrightarrow{u_\theta}.$$

b. On utilise $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$

À l'intérieur du solénoïde :

$$\overrightarrow{B_{\text{int}}} = -\mu_o nI\overrightarrow{u_z} = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A_{\text{int}}})_z\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\text{int}})\overrightarrow{u_z} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\text{int}}) = -\mu_o nI\rho$$

$$\Longrightarrow \rho A_{\text{int}} = -\frac{\mu_o nI\rho^2}{2} + \text{Cte} \Longrightarrow \overrightarrow{A_{\text{int}}} = \left(-\frac{\mu_o nI\rho}{2} + \frac{\text{Cte}}{\rho}\right)\overrightarrow{u_\theta}.$$

Si $\overrightarrow{A_{\text{int}}} = \overrightarrow{0}$ en $\rho = 0, \text{Cte} = 0$:

$$\overrightarrow{A_{\text{int}}} = -\frac{\mu_o nI\rho}{2}\overrightarrow{u}$$

À l'extérieur du solénoïde :

$$\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\text{ext}})\overrightarrow{u_z} \Longrightarrow \rho A_{\text{ext}} = \text{Cte} \Longrightarrow A_{\text{ext}} = \text{Cte}/\rho.$$

La continuité du potentiel vecteur en $\rho = R$ s'écrit :

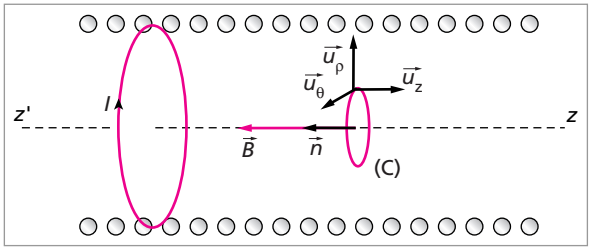
$$-\frac{\mu_o nIR}{2} = \frac{\text{Cte}}{R} \Longrightarrow \text{Cte} = -\frac{\mu_o nIR^2}{2}$$

$$\overrightarrow{A}_{\text{ext}} = -\frac{\mu_o nIR^2}{2\rho}\overrightarrow{u_\theta}$$

c. On utilise

$$\oint_C \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S.$$

(C) est un cercle de rayon ρ orienté dans le sens du courant, dont le centre se trouve sur l'axe $z'z$. $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\rho\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$ (le sens de parcours choisi est opposé au sens de $\overrightarrow{u_\theta}$ d'où le signe $-$) et



$$\overrightarrow{A} = A_\theta(\rho)\overrightarrow{u_\theta}.$$

À l'intérieur :

$$\oint_C \overrightarrow{A_{\text{int}}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\oint_C A_\theta(\rho)\rho\mathrm{d}\theta = -A_\theta(\rho)2\pi\rho.$$

D'autre part

$$\iint_S \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = \mu_o nI\pi\rho^2$$

soit finalement

$$-A_\theta(\rho)2\pi\rho = \mu_o nI\pi\rho^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_{\text{int}}} = -\frac{\mu_o nI\rho}{2}\overrightarrow{u_\theta}.$$

À l'extérieur : $\oint_C \overrightarrow{A_{ext}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -A_\theta(\rho)2\pi\rho, \iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,dS = \mu_o nI\pi R^2$

qui conduit à $-A_\theta(\rho)2\pi\rho = \mu_o nI\pi R^2$ et $\overrightarrow{A_{ext}} = -\dfrac{\mu_o nIR^2}{2\rho}\overrightarrow{u_\theta}$.

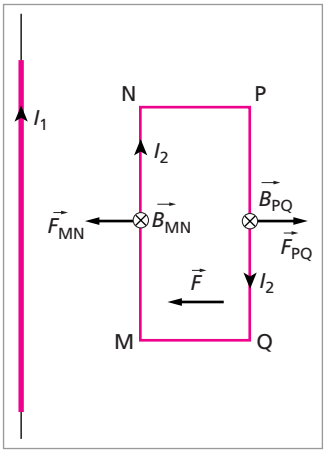
Remarque : les conditions aux limites en $\rho = R$ et à l'infini ne sont pas utilisées dans cette méthode.

d. On pourrait également utiliser $\Delta\overrightarrow{A} + \mu_o \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. Cette méthode nécessiterait d'écrire la continuité de $\overrightarrow{A}$ en $\rho = R$ comme pour toute équation locale de départ.

25

1. $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi d}\overrightarrow{u_\theta}$ (voir exercice VI.2)

2.a.



$$\overrightarrow{B_{MN}} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi(e-a)}\overrightarrow{u_\theta}.$$

$$\overrightarrow{F}_{MN} = I_2\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B}_{MN} = \mu_o \frac{I_1 I_2 b}{2\pi(e-a)}\overrightarrow{u_r}$$

De même :

$$\overrightarrow{B_{PQ}} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi(e+a)}\overrightarrow{u_\theta} \Longrightarrow$$

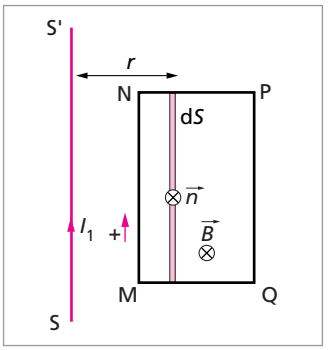
$$\overrightarrow{F_{PQ}} = I_2\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{B_{PQ}} = \frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi(e+a)}\overrightarrow{u_r}.$$

Les côtés NP et QM sont soumis à des forces égales et opposées dont la résultante est nulle.

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{MN}} + \overrightarrow{F_{PQ}} = -\frac{\mu_o I_1 I_2 ab}{\pi(e^2-a^2)}\overrightarrow{u_r}.$$

Le cadre est attiré par le fil.

b. Le flux élémentaire du champ magnétique sortant de la surface dS, distante de r du fil et orientée par la normale $\overrightarrow{n}$ comme indiqué sur la figure vaut :



$$d\Phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,dS = \frac{\mu_o I_1 b\,dr}{2\pi r}.$$

Le flux sortant du cadre vaut :

$$\Phi = \int_{e-a}^{e+a} \frac{\mu_o I_1 b\,dr}{2\pi r} = \frac{\mu_o I_1 b}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{e+a}{e-a} > 0.$$

3. Si le cadre se déplace de dr = de perpendiculairement au fil, le travail des forces magnétiques est donné par le théorème de Maxwell :

$$dW = F\,de = I_2 d\Phi \Longrightarrow F = I_2\frac{d\Phi}{de} = \frac{\mu_o I_1 I_2 ab}{\pi(e^2-a^2)}.$$

26 **1.a.** Le circuit est ouvert, il n'y a donc pas de courant induit. Il ne peut pas y avoir de force de Laplace venant freiner le mouvement de la barre. $\vec{B}$ n'influe donc pas sur le mouvement de celle-ci, qui est uniformément accéléré selon l'axe Ox avec $a = g\sin\alpha$ comme accélération.

b. $d = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2$ d'où $t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\alpha}} = 0{,}49$ s

c. Le circuit étant ouvert, c'est le *flux coupé* Φ_c qui intervient dans la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

$\Phi_c = \iint \vec{B}\,.\,\vec{n}\,dS$ est défini à partir d'une orientation prélable de la surface coupée. On peut orienter celle-ci dans le sens MPQN, la normale sortante $\vec{n}$ sera alors perpendiculaire à cette surface et orientée vers le haut, elle fera un angle α avec $\vec{B}$ et $\Phi_c = BLx\cos\alpha$ (on aurait pu choisir l'orientation inverse, Φ_c serait alors de signe opposé). Avec l'orientation choisie

$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d\Phi_c}{dx}\frac{dx}{dt} = -BL(\cos\alpha)g(\sin\alpha)t$$

(avec l'orientation inverse, e serait alors de signe opposé). En éliminant t (question 1.b) il vient :

$$e = -BL\cos\alpha\sqrt{2d\sin\alpha} = -0{,}15\text{ V} < 0$$

(avec l'orientation inverse on aurait obtenu $e = +0{,}15$ V)

2.a. Le circuit est maintenant fermé. Un courant induit $i = e/R$ apparaît. Une force de Laplace de freinage $\vec{F} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$ est créée qui est perpendiculaire à $\vec{B}$ donc horizontale et dirigée vers la gauche. Plus la vitesse de la barre augmente, plus $\vec{F}$ augmente jusqu'à ce que sa projection sur l'axe Ox soit égale et opposée à celle du poids de la barre. Le mouvement devient alors uniforme et la barre atteint sa vitesse limite.

b. Ceci se produit quand $|i_{lim}|\,LB\cos\alpha = mg\sin\alpha$ soit pour

$$|i_{lim}| = \frac{mg\tan\alpha}{BL} = 2{,}7\text{ A}$$

Remarque : avec l'orientation choisie précédemment (sens MPQN) on avait trouvé $e < 0$. Le produit ei devant toujours être positif, $i < 0$: le courant induit circule dans le sens MNQP et donc de Q vers P dans la barre. La force de Laplace est bien une force de freinage.

c. $e_{lim} = Ri_{lim} = -BLv_{lim}\cos\alpha$ (cf. question 1.c avec $v = g(\sin\alpha)t$). Il vient :

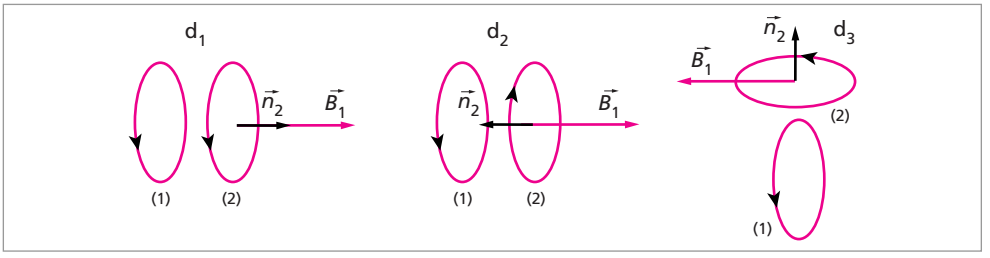
$$v_{lim} = -\frac{Ri_{lim}}{BL\cos\alpha} = \frac{Rmg\sin\alpha}{B^2L^2\cos^2\alpha} = 100\text{ m/s!}$$

27 **1.a.** $L = \Phi/i$ où Φ est le flux propre créé par un circuit au travers de lui-même.

b. $M_{21} = \Phi_{21}/i_2$ où Φ_{21} est le flux créé par (2) dans (1) et i_2 l'intensité du courant circulant dans (2).

c. $M = M_{12} = M_{21}$

d. L'orientation des spires est définie par le schéma et détermine leurs normales, en particulier $\vec{n_2}$.



Supposons qu'un courant d'intensité i_1 circule dans (1), dans le sens indiqué par l'orientation : $i_1 > 0$. Ce courant crée dans (2) un champ magnétique $\vec{B_1}$. Le flux de $\vec{B_1}$ à travers (2) s'écrit $\Phi_{1/2} = \iint_{(2)} \vec{B_1} \cdot \vec{n_2} \mathrm{d}S_2$, il est positif dans le premier cas, négatif dans le second et nul dans le troisième. On obtient donc : $M = M_{12} = \Phi_{12}/i_2 > 0$ pour d_1, $M > 0$ pour d_2 et $M = 0$ pour d_3.

2. $B = \mu_o n I = \mu_o \dfrac{N}{\ell} I$ et $\Phi = NBS = \mu_o \dfrac{N^2}{\ell} \pi \dfrac{\mathrm{d}^2}{4} I = LI$ où N est le nombre total de spires et ℓ la longueur du solénoïde, d'où :

$$L = \mu_o \frac{N^2}{\ell} \pi \frac{\mathrm{d}^2}{4} = 15{,}8 \text{ mH}$$

3.a. $\Phi_a = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{22} + \Phi_{21} = 2(L + M)i$ d'où $L_a = 2(L + M)$
Dans le dipôle (b), $\Phi_{12} = \Phi_{21} = -Mi$ d'où $L_b = 2(L - M)$

b. $Z_a = \sqrt{(2r)^2 + L_a^2(2\pi f)^2}$; $Z_b = \sqrt{(2r)^2 + L_b^2(2\pi f)^2}$

c. Les deux dernières questions conduisent à :

$$L + M = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{Z_a^2}{4} - r^2} \qquad \text{et} \qquad L - M = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{Z_b^2}{4} - r^2}$$

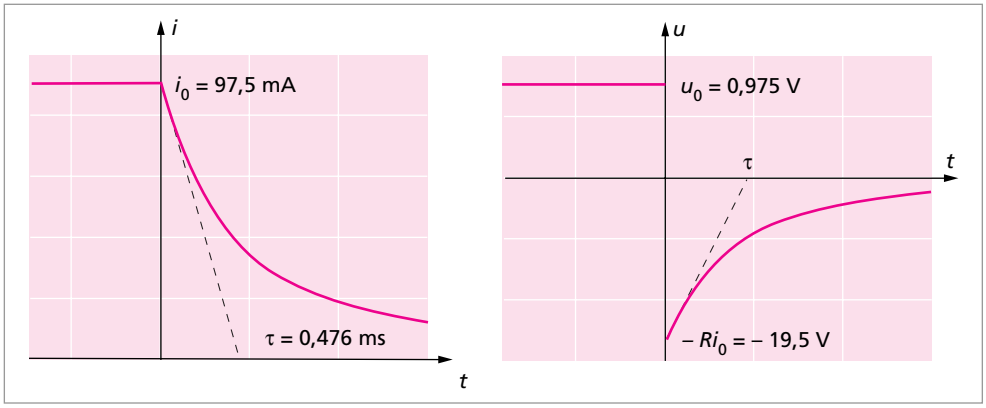
d'où $L = 11{,}9$ mH et $M = 3$ mH.

4. En série : $L_{éq} = L_1 + L_2$ si $M \ll L_1, L_2$. En parallèle $L_{éq} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ si $r_1, r_2 \ll L_1\omega, L_2\omega$.

28 **1.a.** En régime permanent, la bobine se comporte comme une résistance ohmique r. Soit $R_{éq}=\dfrac{rR}{r+R}$, la loi du diviseur de tension s'écrit $u_o = E\dfrac{R_{éq}}{R_o + R_{éq}} = 0{,}975$ V d'où $i_o = \dfrac{u_o}{r} = 97{,}5$ mA.

b. À l'ouverture de K : $L\dfrac{di}{dt} + (R+r)i = 0$ qui admet comme solution : $i = i_o e^{-(R+r)t/L}$ d'où $u = -Ri = -Ri_o e^{-(R+r)t/L}$

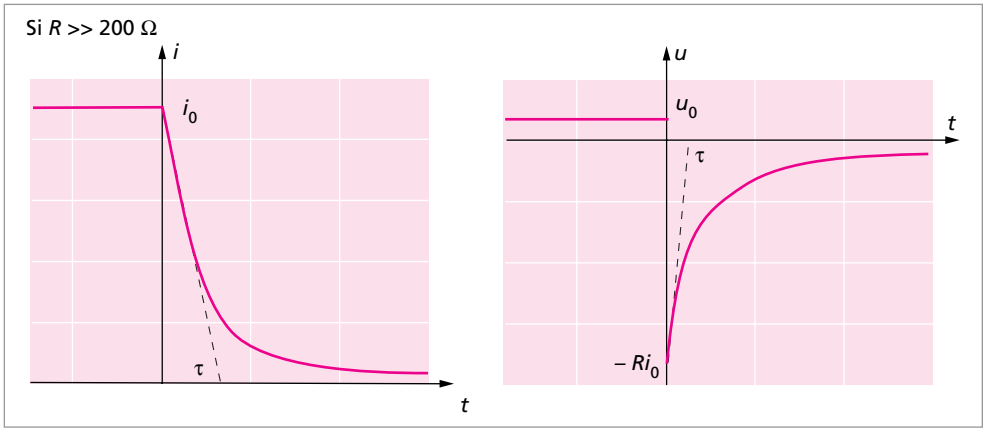
c. Noter la tangente à l'origine de ces deux courbes qui coupe l'axe des temps à l'abscisse $t = \tau = L/(R+r) = 0{,}476$ ms.

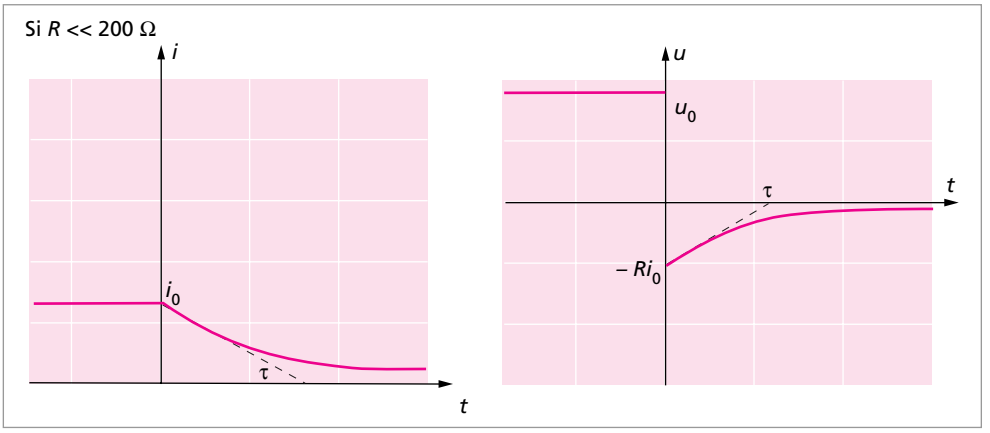


d. L'énergie consommée dans R par effet Joule s'écrit :

$$E_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = -\frac{Ri_o^2}{2}\frac{L}{R+r} = 0{,}454 \text{ mJ}$$

e. Si R augmente, i_o augmente, τ diminue, u_o augmente et Ri_o augmente, d'où les courbes suivantes :

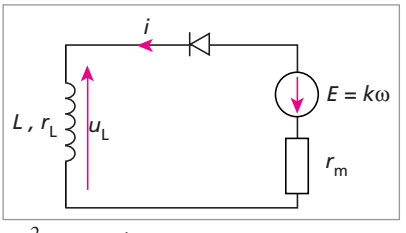




2.a. En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r_L. Le rotor étant bloqué, il se comporte comme conducteur ohmique de résistance infinie.

$$i_o = \frac{E}{R_1 + r_L} = 250 \text{ mA} \qquad \text{et} \qquad i = 0 \text{ car la diode est bloquée.}$$

b. Le schéma équivalent du circuit est représenté sur la figure ci-contre. La loi des mailles s'écrit :



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + K\omega = 0 \qquad \text{(e1)}$$

c.1. L'énergie cinétique de m s'écrit :

$$E_{Cm} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(a\omega_1)^2 = \frac{1}{2}m\frac{a^2}{C^2}\omega^2 = \frac{1}{2}J_m\omega_1^2$$

d'où $J_m = m\left(\frac{a}{C}\right)^2 = 2.10^{-7}$ kg.m^2.

c.2. (i) - Le moment du couple moteur vaut $\Gamma_o = Ki_o = 7{,}5$ mN.m.
Le moment du poids de m transmis par le réducteur vaut : $\Gamma_m = \frac{mga}{C} = 2$ mN.m.
$\Gamma_o > \Gamma_m$: m va monter.
(ii) - Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $\delta W = \mathrm{d}E_C$.
Pour le système m : $\mathrm{d}z = a\omega_1\mathrm{d}t = \frac{a}{C}\omega\mathrm{d}t$.
Pour le système {rotor + m} : $\Gamma\omega at - \frac{mga}{C}\omega\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$.
En simplifiant par ω et avec $\Gamma = Ki$, il vient :

$$Ki - \frac{mga}{C} = J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(me)}$$

d. En dérivant (e1) et en éliminant $\frac{d\Omega}{dt}$ entre (e1 dérivée) et (me), il vient :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{K^2}{J}i = \frac{Kmga}{JC} \qquad \text{(dif)}$$

e. (i) - En utilisant (e1) ainsi que la continuité de i et ω :

$$\frac{di}{dt}(t = 0^+) = -\frac{r}{L}i_o = -3{,}5\ \text{As}^{-1}$$

En utilisant (me) : $\frac{d\omega}{dt}(t = 0^+) = \frac{Ki_o}{J} - \frac{mga}{JC} = 1{,}83.10^3\ \text{rad.s}^{-2}$.

En utilisant (el) : $\omega(t = 0^+) = L\frac{di}{dt}(t = 0^+) + r_L i_o = -12{,}5\ \text{V}$.

(ii) - La solution générale de l'équation (dif) sans second membre tend vers zéro quand $t \to \infty$. i_{lim} représente alors la solution particulière de l'équation (dif) avec second membre.

(iii) - $i_{lim} = \frac{mga}{JC} = 66\ \text{mA}$; $\omega_{lim} = -\frac{ri_{lim}}{K} = -1{,}54\ \text{rad.s}^{-1}$; $u_{lim} = r_L i_{lim} = 1{,}32\ \text{V}$.

f.1. La courbe 1 correspond à $i(t)$, la courbe 2 à $\omega(t)$ car $\omega(0^+) = 0$ et $i^+(0^+) \neq 0$.

f.2. Soit $t = t_o$ tel que $\omega(t_o) = 0$, d'après la courbe 2, $t_o = 0{,}21$ s.Pour $t < t_o$, le travail du poids est négatif, la machine se comporte comme un moteur. Pour $t > t_o$, le travail du poids est positif, la machine se comporte comme une génératrice.

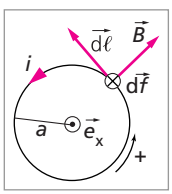
f.3. $i(0) = 250\ \text{mA}$ $\omega(0) = 0\ \text{rad/s}$ $i_{lim} = 66\ \text{mA}$ $\omega_{lim} = -154\ \text{rad/s}$.

f.4. L'altitude de la masselote est maximum quand $\frac{dz}{dt} = 0$, soit pour $\omega = 0$ qui correspond à $t_o = 0{,}21$ s.

f.5. $\theta_{max} = \frac{1}{2}.60.0{,}21 = 6\ \text{rad}$ $z_{max} = \frac{a\theta_{max}}{C} = 6\ \text{mm}$.

f.6. Pour $z = z_{max}$, $E_{p,max} = mgz_{max} = 12\ \text{mJ}$ en prenant $E_p(z = 0) = 0$. Or l'énergie stockée initialement dans la bobine valait $W_m = \frac{1}{2}Li_o^2 = 156\ \text{mJ}$. Une importante partie de cette énergie a été dissipée par effet Joule dans les résistances et seulement 7 % de l'énergie initiale a servi à remonter la masselote.

29 **1.** La vue de face du solénoïde est représentée ci-contre :

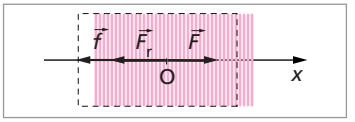


$\overrightarrow{df} = i\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} = -iBd\ell\overrightarrow{e_x}$ or $\oint d\ell = 2\pi Na$ d'où $\overrightarrow{f} = -iB\ell\overrightarrow{e_x}$.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_r} = m\overrightarrow{a}$$

La figure suivante représente le solénoïde vu de côté, supposé se déplacer dans le sens des x positifs, avec $\frac{dx}{dt} < 0$. L'équation précédente, projetée sur l'axe $x'x$ devient : $-iB\ell - kx - \mu\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ ou encore

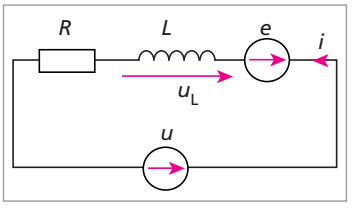


$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{f}{m}x = -\frac{B\ell}{m}i \qquad (1)$$

2. Pendant la durée dt, chaque spire du solénoïde s'est déplacée de d$x = v$dt et elle a coupé le flux $|d\Phi_c| = |B\ell v dt|$. D'où $e = -\frac{d\Phi_c}{dt}$, $|e| = B\ell v$. Le déplacement entraîne un courant induit de sens opposé à i (loi de Lenz), le courant induit est donc négatif, de même que le f.e.m. e.

$$e = -B\ell v$$

Le schéma électrique équivalent du solénoïde est représenté sur la figure ci-contre. La loi des mailles s'écrit : $u - e - u_L = 0$ soit encore :



$$u = Ri + L\frac{di}{dt} - B\ell v \qquad (2)$$

3. $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$, $\underline{U} = U$, $\underline{I} = Ie^{-j\varphi}$, $\underline{V} = Ve^{-j\Psi}$ d'où $\underline{\ddot{X}} = j\omega\underline{V}$ et $X = \frac{V}{j\omega}$. En remplaçant dans (1) :

$$\underline{V} = \frac{-B\ell\underline{I}}{\mu + j\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)}$$

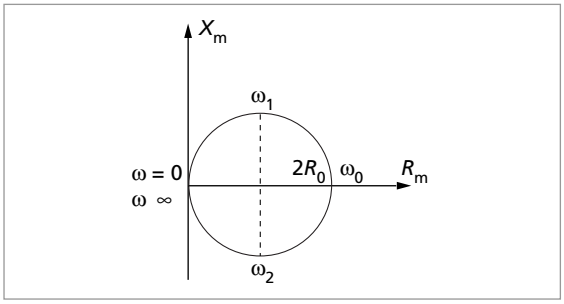
On fait de même dans (2) qui devient $\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I} - B\ell\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}$ d'où $\underline{Z} = (R + jL\omega) + \frac{B^2\ell^2}{\mu + j\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)} = \underline{Z_L} + \underline{Z_m}$ avec $\underline{Z_m} = R_m + jX_m$.

$$R_m = \frac{B^2\ell^2\mu}{\mu^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad X_m = \frac{B^2\ell^2\left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)}{\mu^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2}$$

4. L'équation d'un tel cercle est : $(R_m - R_o)^2 + X_m^2 = R_o^2$ soit $R_m^2 + X_m^2 = 2R_oR_m$. Elle est vérifiée en prenant les expressions de R_m et X_m obtenues à la question précédente et $R_o = \frac{B^2\ell^2}{2\mu}$.

Pour $\omega = 0$, $R_m = X_m = 0$. Quand $\omega \to \infty$, $R_m = X_m = 0$. Quand $\omega = \omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $R_m = \dfrac{B^2\ell^2}{\mu} = 2R_o$.

Pour $0 < \omega < \omega_o$, $\omega^2 < \dfrac{k}{m}$ d'où $X_m > 0$: le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.



Si $R_m \geq R_o$:

$$\frac{B^2\ell^2\mu}{\mu^2 + \left(\omega m - \dfrac{k}{\omega}\right)^2} \geq \frac{B^2\ell^2}{2\mu}$$

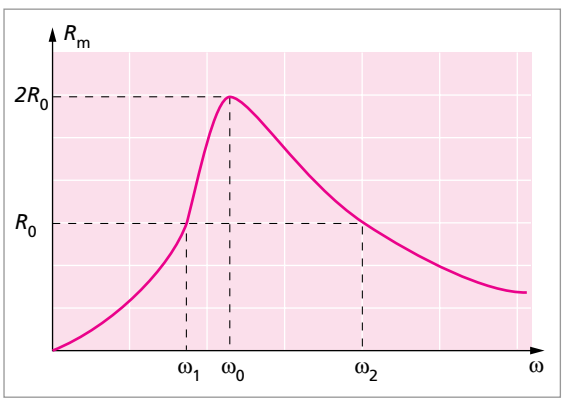
On aboutit à la résolution d'une inégalité du second degré en ω :

$$m^2(\omega^2 - \omega_o^2) - \mu^2\omega^2 \leqslant 0$$

qui admet deux solutions positives :

$$\omega_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4m^2\omega_o^2}}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4m^2\omega_o^2}}{2m}$$

Pour $\omega = \omega_1 = \omega_2$, $R_m = R_o$, d'où les points représentés sur le diagramme de Kennelly ci-dessus.



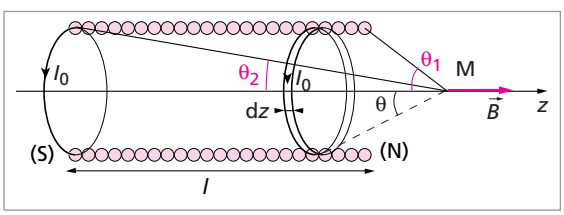
$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\mu}{m}$$

représente la bande passante du haut-parleur. Elle est indépendante de B et se comprend lorsque l'émission acoustique R_m est représentée en fonction de ω.

30 **1.a.** Voir la 1re question de l'exercice 21.

b. voir la 1re question de l'exercice 22 :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_o N I_o}{2\ell}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\overrightarrow{u_z}$$



c. $\cos\theta_1 = \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{z+\ell}{\sqrt{R^2+(z+\ell)^2}}$ d'où $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = B_o f(z)\overrightarrow{u_z}$ avec $B_o = \dfrac{\mu_o N I_o}{2\ell} = 7{,}73$ mT et $f(z) = \dfrac{z+\ell}{\sqrt{R^2+(z+\ell)^2}} - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$.

$$f(0) = \frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}} = 0{,}97$$

d. Placer une sonde de Hall en M.

e. $\overrightarrow{B}$ ne peut pas être uniforme à l'extérieur de (S). Par contre, $\overrightarrow{B}$ peut être uniforme à l'intérieur de (S) à condition que $\ell > 10R$. Ce n'est pas le cas ici car $\ell = 4{,}3R < 10R$, $\overrightarrow{B}$ n'est donc pas uniforme dans (S).

f.1. P est voisin de M donc $\overrightarrow{B_z}(\mathrm{P}) \approx \overrightarrow{B}(\mathrm{M})$. En fait cette égalité n'est pas respectée ultérieurement car si P appartient à l'anneau (A), alors $r = R$. En toute rigueur, il faudrait prendre un noyau de fer doux, un anneau (A) de rayon $r \ll R$ et interposer un carton au début de l'expérience entre (A) et la face nord de (S) pour éviter que l'anneau ne tombe dans le solénoïde.

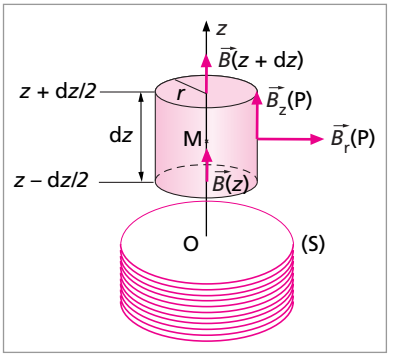
f.2. Le plan contenant $z'z$, M et P est un plan d'antisymétrie. $\overrightarrow{B}(\mathrm{P})$ est contenu dans ce plan : $\overrightarrow{B}_\theta(\mathrm{P}) = \overrightarrow{0}$.

f.3. La norme de $\overrightarrow{B}(\mathrm{P})$ est invariante par rotation autour de $z'z$, elle ne dépend donc pas de θ, il en est de même pour $\overrightarrow{B_r}(\mathrm{P})$ qui ne dépend que de r et z.

f.4. div $\overrightarrow{B}(\mathrm{P}) = 0$ avec $\overrightarrow{B}(\mathrm{P}) = B_z(z)\overrightarrow{u_z} + B_r(r,z)\overrightarrow{u_\theta}$ et $B_z(z) = B_o f(z)$. On obtient ainsi div $\overrightarrow{B}(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + B_o f'(z) = 0$. Or $\dfrac{\partial B_\theta}{\partial\theta} = 0$ d'où $\dfrac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -rB_o f'(z)$ et en intégrant $rB_r = -\dfrac{r^2}{2}B_o f'(z) + C(z)$. Soit finalement : $B_r(\mathrm{P}) = -\dfrac{r}{2}B_o f'(z) + \dfrac{C(z)}{r}$. Or $B_r = 0$ quand $r = 0$, $\forall z$ donc $C(z) = 0$ et

$$B_r(\mathrm{P}) = -\frac{r}{2}B_o f'(z)$$

f.5. On utilise un cylindre de hauteur dz, d'axe $z'z$, situé au dessus de (S) entre les cotes $z - \dfrac{\mathrm{d}z}{2}$ et $z + \dfrac{\mathrm{d}z}{2}$, comptées à partir de O.



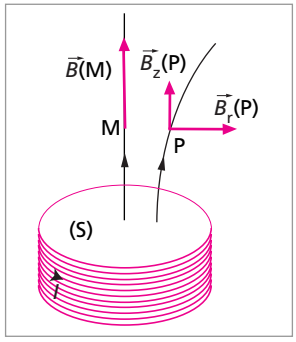
Le flux total sortant du cylindre s'écrit :

$$\Phi = \pi r^2 B_z\left(z + \frac{\mathrm{d}z}{2}\right) - \pi r^2 B_z\left(z - \frac{\mathrm{d}z}{2}\right) + 2\pi r \mathrm{d}z B_r(r,z)$$
$$= \pi r^2\left[\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right] + 2\pi r \mathrm{d}z B_r(r,z) = 0$$

En remarquant que $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = B_o f'(z)$ il vient :

$$B_r(\mathrm{P}) = -\frac{r}{2}B_o f'(z).$$

f.6. Les lignes de champ ont donc l'allure suivante : (*figure ci-contre*)



f.7. En $z = 0$,

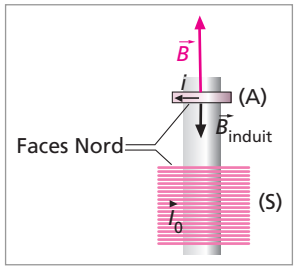
$$B_z(\mathrm{P}) = B(\mathrm{M}, z=0) = B_o\frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}} = 7{,}53\ \mathrm{mT}$$

$B_r(\mathrm{P}) = -\frac{R}{2}B_o f'(\mathrm{O})$. Or :

$$f'(z) = \frac{R^2}{[R^2+(z+\ell)^2]^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+\ell^2}}$$

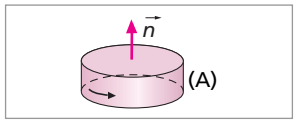
d'où $f'(\mathrm{O}) \approx \frac{\ell^2}{[R^2+\ell^2]^{3/2}}$ et $B_r(\mathrm{P}) = \frac{R\ell^2 B_o}{2[R^2+\ell^2]^{3/2}} = 0{,}825\ \mathrm{mT}$.

2. Il suffit de multiplier toutes les normes précédentes par 100 : $B_o = 0{,}773$ T, $B(\mathrm{O}) = 0{,}753$ T, $B_z(\mathrm{P}, z=0) = 0{,}753$ T et $B_r(\mathrm{P}, z=0) = 0{,}0825$ T.



3.a. Lorsqu' un courant s'établit dans (S), il se crée un courant induit i dans (A) tel que le champ induit $\vec{B}_{\text{induit}}$ par i dans (A) s'oppose au champ $\vec{B}$ créé par (S) (*figure ci-contre*). L'anneau (A) présente donc une face nord à la face supérieure de (S), qui est également une face nord : ces deux « pôles » se repoussent et (A) s'éloigne de (S).

b.1. $\Phi(t) = \iint_{\text{surface(A)}} \vec{B}(\mathrm{P})\,\vec{n}\,\mathrm{d}S$ avec $\vec{n} = \vec{u_z}$, $S = \pi R^2$ et $\vec{B}(\mathrm{P}) = B_o f(z)\sin\omega t\,\vec{u_z}$. D'où :



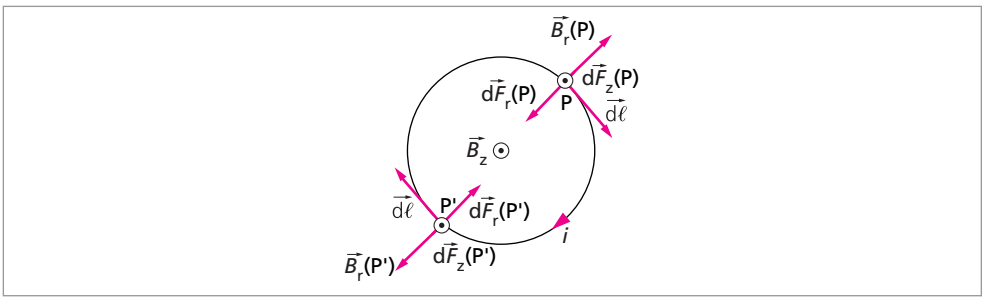
$$\Phi(t) = \pi R^2 B_o f(z)\sin\omega t = \Phi_o \sin\omega t \quad \text{avec} \quad \Phi_o = \pi R^2 B_o f(z)$$

b.2. $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\omega\Phi_\mathrm{o}\cos\omega t = -e_\mathrm{o}\cos\omega t$ avec $e_\mathrm{o} = \omega\Phi_\mathrm{o} = \omega\pi R^2 B_\mathrm{o} f(z)$

b.3. $i = \dfrac{e}{X} = -\dfrac{e_\mathrm{o}}{X}\cos\omega t = -i_\mathrm{o}\cos\omega t$ avec $i_\mathrm{o} = \dfrac{e_\mathrm{o}}{X} = \dfrac{\omega\pi R^2 B_\mathrm{o} f(z)}{X}$

b.4. $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{B}(\mathrm{P}) = iR\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}\wedge\left[B_\mathrm{o} f(z)\sin\omega t\,\overrightarrow{u_z} - \dfrac{R}{2}B_\mathrm{o} f'(z)\sin\omega t\,\overrightarrow{u_\mathrm{r}}\right] = \overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{r}} + \overrightarrow{\mathrm{d}F_z}$
avec

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{r}} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{B}_z = iRB_\mathrm{o}\mathrm{d}\theta f(z)\sin\omega t\,\overrightarrow{u_\mathrm{r}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{d}F_z} = \frac{iR^2 B_\mathrm{o}\mathrm{d}\theta f'(z)}{2}\sin\omega t\,\overrightarrow{u_z}$$



b.5. Les forces $\overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{r}}$ s'annulent deux à deux : $\overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{r}}(\mathrm{P}) = -\overrightarrow{\mathrm{d}F_\mathrm{r}}(\mathrm{P}')$. Par contre les forces $\overrightarrow{\mathrm{d}F_z}$ s'additionnent : $\overrightarrow{F} = \displaystyle\int_{(\mathrm{A})}\overrightarrow{\mathrm{d}F_z} = \int_0^{2\pi}\frac{iR^2 B_\mathrm{o}\mathrm{d}\theta f'(z)}{2}\sin\omega t\,\overrightarrow{u_z}$. Avec $i = i_\mathrm{o}\cos\omega t$ il vient $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_\mathrm{o}} g(t)$ où $\overrightarrow{F}_\mathrm{o} = -\dfrac{\omega\pi^2 R^4 B_\mathrm{o}^2 f(z) f'(z)}{2X}\overrightarrow{u_z}$ et $g(t) = \sin 2\omega t$.

c. $\langle\sin 2\omega t\rangle_T = 0$ d'où $\langle\overrightarrow{F}\rangle_T = \overrightarrow{0}$. Cette interprétation ne peut pas justifier le saut de l'anneau. Quand I passe de 0 à I_o dans (S), un courant induit apparaît dans (A) pendant l'établissement du courant dans (S). Le champ $\overrightarrow{B_\mathrm{r}}(\mathrm{P})$ est responsable d'une force de Laplace $\overrightarrow{F}$ parallèle à $\overrightarrow{u_z}$: l'anneau saute pendant la fermeture du circuit mais retombe dès que le courant I_o est établi dans (S).

d. Il n'y aurait aucun phénomène d'induction.

4.a. $e(t) = Xi(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ avec $e = e_\mathrm{o}\cos\omega t$. On pose $\underline{e} = e_\mathrm{o}\mathrm{e}^{j\omega t}$ et $\underline{i} = \underline{i_\mathrm{o}}\mathrm{e}^{j\omega t}$ d'où $\underline{i_\mathrm{o}} = \dfrac{e_\mathrm{o}}{X + jL\omega} = \dfrac{e_\mathrm{o}}{\sqrt{X^2 + (L\omega)^2}}\mathrm{e}^{-j\varphi}$ avec $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{X}$ ou $\sin\varphi = \dfrac{L\omega}{\sqrt{X^2 + (L\omega)^2}}$, $i(t) = i_\mathrm{o}\cos(\omega t - \varphi)$ et $i_\mathrm{o} = \dfrac{e_\mathrm{o}}{\sqrt{X^2 + (L\omega)^2}}$.

b. $\overrightarrow{F} = i(t)R^2 B_\mathrm{o}\pi f'(z)\sin\omega t\,\overrightarrow{u_z}$. En remplaçant $i(t)$ puis e_o par leurs expressions, il vient $\overrightarrow{F} = F_\mathrm{o}\alpha(z)\beta(t)\overrightarrow{u_z}$ avec $F_\mathrm{o} = -\dfrac{\omega\pi^2 R^4 B_\mathrm{o}^2}{\sqrt{X^2 + (L\omega)^2}}$, $\alpha(z) = f(z)f'(z)$ et $\beta(t) = \sin\omega t\cos(\omega t - \varphi)$.

c. $\sin\omega t\cos(\omega t-\varphi)=\dfrac{1}{2}[\sin(2\omega t-\varphi)+\sin\varphi]$, $\langle\sin\omega t\cos(\omega t-\varphi)\rangle=\dfrac{1}{2}\sin\varphi$ d'où :

$$\langle\overrightarrow{F}\rangle=F_o\alpha(z)\frac{\sin\varphi}{2}\overrightarrow{u_z}$$

d. $\sin\varphi=0{,}998$, $\alpha(0)=-6{,}93\ \mathrm{m}^{-1}$, $F_o=-0{,}502\ \mathrm{Nm}^{-1}$, $\left\langle\|\overrightarrow{F}\|\right\rangle=1{,}74$ N. $F>P$: (A) décolle.

e. A l'équilibre $F(z)=mg$ soit $F_o\alpha(z)\dfrac{\sin\varphi}{2}=mg$. On en déduit l'équation dont l'altitude d'équilibre est solution :

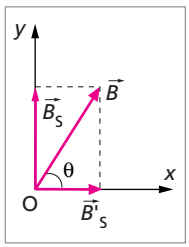
$$\alpha(z_{éq})=\frac{2mg}{F_o\sin\varphi}\qquad\text{où}\qquad\alpha(z_{éq})=f(z_{éq})f'(z_{éq})$$

5.a. On peut citer l'expérience des rails de Laplace ou bien la rotation d'une bobine placée entre deux bobines de Helmholtz (principe de l'alternateur). Aucune de ces expériences ne nécessite de tenir compte de l'autoinductance de l'induit.

b. $\overrightarrow{B}$ serait uniforme et parallèle à $\overrightarrow{u_z}$. Or c'est la composante radiale $\overrightarrow{B_r}(z)$ qui est responsable de la force de Laplace qui fait sauter l'anneau. On n'observerait donc rien dans ce cas.

31 **1.** Pour un solénoïde infiniment long $B=\mu_o nI$. Les deux champs s'ajoutent en O, d'où $B=2\mu_o\dfrac{N}{\ell}I=kI$. A.N. $k=0{,}0287$ T/A et $B=0{,}11$ T pour $I=4$ A.

2. L'impédance du système (S′ + C) est différente de celle du système (S). Les deux systèmes étant alimentés par la même tension, les amplitudes et les phases des courants qui les traversent seront différentes. Le condensateur entraîne une avance de phase du courant $i'(t)$ par rapport à celle de $i(t)$.



$B_S=ki(t)$, $B_{S'}=ki'(t)$ donc $\tan\theta=\dfrac{B_S}{B'_S}=\dfrac{i(t)}{i'(t)}$. B est donc un vecteur tournant de vitesse angulaire ω_o.

3. $\underline{I}=\underline{Y}U=\dfrac{U}{R+jL\omega_o}$, $I=\dfrac{U}{\sqrt{R^2+(L\omega_o)^2}}$ et $\tan\varphi=\dfrac{L\omega_o}{R}$

$$\underline{I'}=\underline{Y'}U=\frac{U}{R+j\left(L\omega_o-\dfrac{1}{C\omega_o}\right)},I'=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega_o-\dfrac{1}{C\omega_o}\right)^2}}\text{ et }\tan\varphi'=\frac{L\omega_o-\dfrac{1}{C\omega_o}}{R}$$

4. $I = I'$ conduit à $\pm L\omega_o = L\omega_o - \dfrac{1}{C\omega_o}$ qui admet comme seule solution possible : $LC = \dfrac{1}{2\omega_o^2}$. $\varphi = \varphi' - \pi/2$ conduit à $\tan\varphi \tan\varphi' = -1$ soit à $L\omega_o\left(L\omega_o - \dfrac{1}{C\omega_o}\right) = -R^2$. Ces deux résultats sont satisfaits pour $L = \dfrac{R}{\omega_o}$ et $C = \dfrac{1}{2R\omega_o}$. Dans ces conditions : $I = I' = \dfrac{U}{R\sqrt{2}}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi' = -\dfrac{\pi}{4}$

5. A.N. $L = 0{,}08$ H, $C = 63$ µF, $L' = 3{,}6$ mH d'où $2L' \ll L$. L'expression de L' n'est pas applicable ici ; un noyau de fer doux doit être placé à l'intérieur des deux solénoïdes.

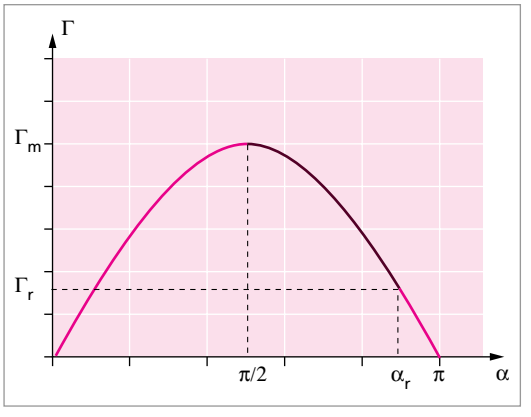
6. $I = I' \Longrightarrow B_S = B'_S$. Ces deux champs sont perpendiculaires entre eux, leur résultante est inclinée de 45° par rapport à chacun des axes, $B_o = \dfrac{B_S}{\cos 45°} = \sqrt{2}B_S$ d'où $\overrightarrow{B_o} = \dfrac{kU}{R\sqrt{2}}(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y})$. $\overrightarrow{B_o}$ tourne à la vitesse angulaire ω_o dans le plan xOy.

7. Faire tourner un aimant autour de son axe.

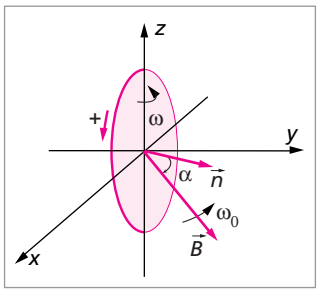
32 **1.** $\overrightarrow{\Gamma}(t) = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B} = MB_o \sin(\widehat{\overrightarrow{M}, \overrightarrow{B}})\overrightarrow{u_z} = MB_o \sin(\omega_o t - \omega t + \alpha)\overrightarrow{u_z}$.
$\langle\overrightarrow{\Gamma}\rangle = MB_o \langle\sin(\omega_o t - \omega t + \alpha)\rangle \overrightarrow{u_z}$. Or $\langle\sin(\omega_o t - \omega t + \alpha)\rangle = 0$ si $\omega \neq \omega_o$ et $\langle\sin(\omega_o t - \omega t + \alpha)\rangle = \sin\alpha$ si $\omega = \omega_o \Longrightarrow \langle\overrightarrow{\Gamma}\rangle = 0$ si $\omega \neq \omega_o$ et $\langle\overrightarrow{\Gamma}\rangle = MB_o \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$ si $\omega = \omega_o$.

2. Le dispositif fonctionne en moteur s'il reçoit du travail, donc si $\Gamma > 0$, soit $\sin\alpha > 0$ et $\omega = \omega_o$. Ces deux vitesses de rotation étant égales, elles justifient le nom de « moteur synchrone ». En effet il faut alors que $0 < \alpha < \pi$: l'aimant suit le champ magnétique. $P_m = \langle\Gamma\rangle\,\omega_o = MB_o \sin\alpha$ en régime permanent. La source d'énergie est électrique, elle provient de l'alimentation des bobines du stator.

3. En fonctionnement moteur $\Gamma > 0$. $\Gamma_m = MB_o$. En régime permanent, $\Gamma_u = \Gamma - \Gamma_r$ où $\Gamma_r = $ Cte est le couple résistant. Pour Γ_u et α donnés, si $\omega \neq \omega_o$, $\Gamma = 0$. Pour que le système continue à tourner, il faut que P_m augmente, donc que $\sin\alpha$ et α augmentent. Le domaine de stabilité correspond à la partie de la courbe telle que $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_r$ où α augmente quand Γ diminue (en noir sur la figure).



33 **1.** $\Phi = \iint \vec{B}.\vec{n}\,dS = BS\cos(\widehat{\vec{n},\vec{B}})$. Or à $t = 0$, $\alpha = (\widehat{\vec{n_o},\vec{B_o}})$ et au temps t, $(\widehat{\vec{n_o},\vec{n}}) = \omega t$, $(\widehat{\vec{B_o},\vec{B}}) = \omega_o t$. D'où, en posant $\Phi_o = BS$:



$$\Phi = \Phi_o \cos[(\omega_o - \omega)t + \alpha]$$

On en déduit $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = \Phi_o(\omega_o - \omega)\sin[(\omega_o - \omega)t + \alpha]$.

D'autre part $e = Ri + L\dfrac{di}{dt}$. On cherche une solution de la forme $i = Im(\underline{i})$ avec $\underline{i} = \underline{I}e^{j[(\omega_o-\omega)t+\alpha]}$ et $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$. Les deux expressions de e conduisent à :

$$\Phi_o(\omega_o - \omega) = R\underline{I} + jL(\omega_o - \omega)\underline{I}$$

d'où $I = \dfrac{(\omega_o - \omega)\Phi_o}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega_o - \omega)^2}}$ et $\varphi = \tan^{-1}\dfrac{L(\omega - \omega_o)}{R}$.

$$i(t) = I\sin[(\omega_o - \omega)t + \alpha + \varphi]$$

2. La bobine, parcourue par un courant i, possède un moment magnétique $\vec{M} = iS\vec{n}$. Sous l'action de $\vec{B}$, elle est soumise au couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ parallèle à $z'z$. Le module de ce moment vaut :

$$\Gamma(t) = I\Phi_o \sin[(\omega_o - \omega)t + \alpha]\sin[(\omega_o - \omega)t + \alpha + \varphi]$$

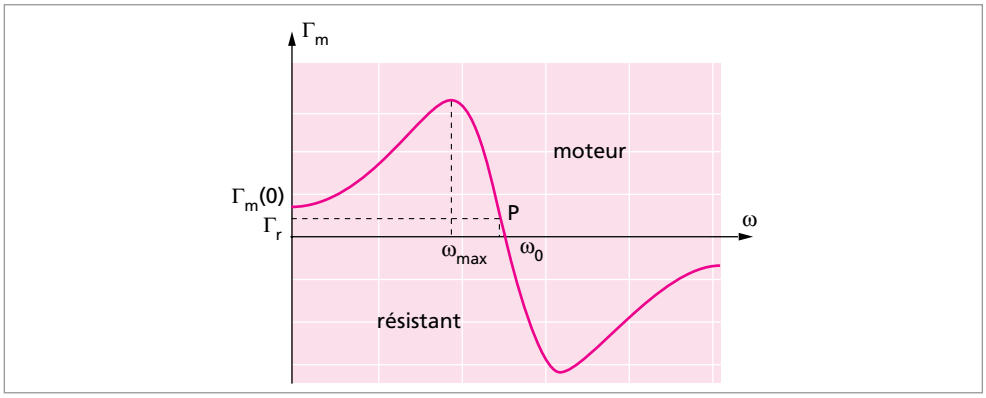
Or, $\langle \sin\theta \sin(\theta + \varphi)\rangle = \dfrac{1}{2}\cos\varphi$ d'où

$$\Gamma_m = \frac{1}{2}I_o\Phi_o\cos\varphi = \frac{\Phi_o^2 R(\omega_o - \omega)}{2[R^2 + L^2(\omega_o - \omega)^2]}$$

Dans une rotation de la bobine d'un angle élémentaire ωdt , celle-ci reçoit le travail des forces électromagnétiques qui vaut $\delta W = \Gamma_m d\theta = \Gamma_m \omega dt$. On est en présence d'un moteur si $\delta W > 0$, soit $\Gamma_m > 0$ d'où $(\omega_o - \omega) > 0$ et $\omega_o > \omega$.

3. $\Gamma_m(\omega = 0) = \dfrac{\Phi_o^2 R\omega_o}{2[R^2 + L^2\omega_o^2]}$, $\Gamma_m(\omega = \omega_o) = 0$.

$\dfrac{d\Gamma_m}{d\Omega} = \dfrac{\Phi_o^2 R}{2}\dfrac{L^2(\omega_o - \omega)^2 - R^2}{[R^2 + L^2(\omega_o - \omega)^2]^2} = 0$ si $\omega_{max} = \omega_o - \dfrac{R}{L}$ qui n'existe que si $\omega_o > \dfrac{R}{L}$.
Le dispositif est moteur au-dessus de l'axe des abscisses et résistant en dessous.



4. Si $\Gamma_m(\omega = 0) > \Gamma_r$, $\dfrac{d\omega}{dt} > 0$ tant que $\Gamma_m - \Gamma_r > 0$. Le point de fonctionnement atteint est P sur la figure précédente. Si Γ_r augmente, ω diminue mais Γ_m augmente : le couple moteur équilibre le couple résistant, le point de fonctionnement est stable.

34 **1.** On choisit d'orienter arbitrairement le cadre carré dans le sens trigonométrique, sa normale sortante est alors parallèle à Oy. $\Phi = \iint \vec{B}\,\vec{n}\,dS = Ba^2 = B_o a^2 \cos(2\pi\dfrac{x}{\lambda} - \omega_o t)$. Le cadre se déplace dans la direction $x'x$ avec la vitesse v donc $2\pi\dfrac{x}{\lambda} = 2\pi\dfrac{vt}{\lambda}$. Avec $\Phi_o = B_o a^2$ il vient :

$$\Phi = \Phi_o \cos[(\omega - \omega_o)t]$$

Or $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = \Phi_o(\omega - \omega_o)\sin(\omega - \omega_o)t = Ri + L\dfrac{di}{dt}$. La méthode est identique à celle suivie dans l'exercice précédent. Elle aboutit en régime permanent à

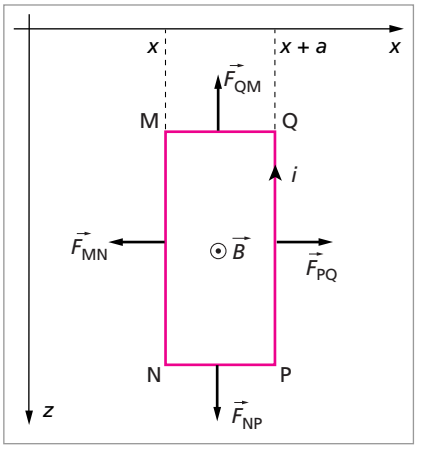
$$i(t) = I_o \sin[(\omega_o - \omega)t + \varphi]$$

avec

$$I_o = \frac{(\omega_o - \omega)\Phi_o}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega_o - \omega)^2}}$$

et

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{L(\omega - \omega_o)}{R}$$



2. $\overrightarrow{F_{QM}}$ et $\overrightarrow{F_{NP}}$ sont perpendiculaires au mouvement et :

$$\overrightarrow{F_{QM}} = -\overrightarrow{F_{NP}}.\ \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{QM}} + \overrightarrow{F_{NP}}$$
$$= ia[B(x + a) - B(x)]\overrightarrow{u_x}$$

En remplaçant par les expressions de B en fonction du temps et dans la limite où $a \ll \lambda$, il vient :

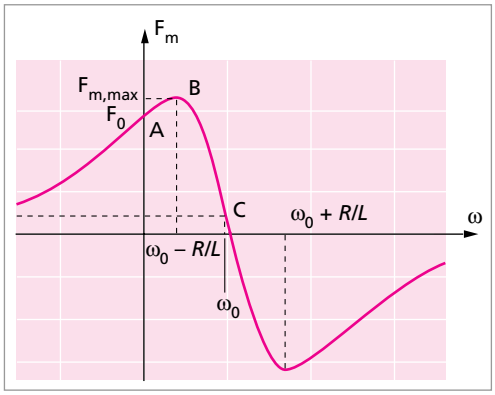
$$\overrightarrow{F} = -i2\pi\frac{\Phi_o}{\lambda}\sin[(\omega-\omega_o)t]\overrightarrow{u_x}$$

$$= -2\pi\frac{\Phi_o^2}{\lambda}\frac{(\omega-\omega_o)}{\sqrt{R^2+L^2(\omega_o-\omega)^2}}\sin[(\omega-\omega_o)t]\sin[(\omega-\omega_o)t+\varphi]\overrightarrow{u_x}$$

La valeur moyenne du produit des sinus vaut $\frac{\cos\varphi}{2} = \frac{R}{2\sqrt{R^2+L^2(\omega_o-\omega)^2}}$, d'où :

$$F_m = -\pi\frac{R\Phi_o^2}{\lambda}\frac{(\omega-\omega_o)}{R^2+L^2(\omega_o-\omega)^2}$$

$$= -\pi\frac{R\Phi_o^2}{\lambda}\frac{\Omega}{R^2+L^2\Omega^2}$$



en posant $\Omega = \omega - \omega_o$. $F_m(\Omega)$ est une fonction impaire qui s'annule pour $\Omega = 0$. Sa dérivée s'annule pour $\Omega_M = \omega_M - \omega_o = \pm\frac{R}{L}$, soit pour $\omega_M = \omega_o \pm \frac{R}{L}$ si $R < L\omega_o$. On obtient alors $F_{m,max} = \pi\frac{R\Phi_o^2}{2\lambda L}$. De plus $F_m(\omega = 0) = \pi\frac{R\Phi_o^2}{\lambda}\frac{\omega_o}{R^2+L^2(\omega_o-\omega)^2} = F$.

3. Le dispositif fonctionne en moteur s'il fournit de la puissance mécanique, donc si $\overrightarrow{F_m}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{\lambda}{2\pi}\omega F_m > 0$. Il faut alors que $\omega(\omega-\omega_o)$ soit négatif.

a. si $v > 0$, il faut que $\omega < \omega_o$ ou $v < \frac{\lambda\omega_o}{2\pi}$

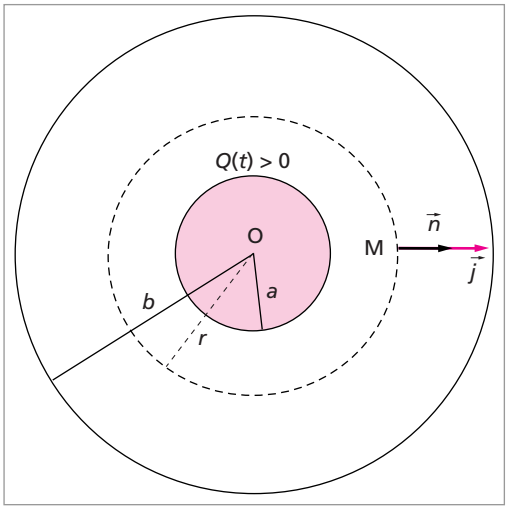
b. si $v < 0$, il faut que $\omega > \omega_o$ ou $v > \frac{\lambda\omega_o}{2\pi}$.

En présence de la force de frottement $\overrightarrow{F_f} = -F_f\overrightarrow{u_x}$, le moteur démarre si :

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{F_m} + \overrightarrow{F_f} > \overrightarrow{0} \qquad \text{donc si} \qquad F_f < \frac{\pi R\Phi_o^2}{\lambda}\frac{\omega_o}{R^2+(L\omega_o)^2}$$

Le cadre se met alors en mouvement et le point de fonctionnement décrit la courbe ABC. Il trouve un régime stationnaire en C. Ce point est un point de fonctionnement stable car si ω augmente F_m diminue et inversement.

35 **1.** Tout plan contenant OM est un plan de symétrie, d'autre part $\vec{j}(M)$ est un vecteur polaire, donc $\vec{j} = j\vec{u_r}$.



– L'invariance par rotation autour de O conduit à $\vec{j} = j(r)\vec{u_r}$.

– L'intensité du courant sortant d'une petite sphère S de centre O et de rayon r s'écrit :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = j(r)4\pi r^2.$$

D'où

$$j = \frac{I}{4\pi r^2}$$

avec $I > 0$.

– $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{d}q = -\mathrm{d}Q$ ($Q(t)$ diminue quand Q_i augmente) et $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} < 0$.

$$\vec{j} = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{u_r}$$

2. La symétrie sphérique entraîne que $\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$. Le théorème de Gauss appliqué à (S) s'écrit

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 4\pi E r^2 \quad \text{et} \quad \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi E r^2 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

3. $\vec{B}$ est un vecteur axial, il est donc perpendiculaire aux plans de symétrie, qui sont l'infinité de plans passant par OM. Donc $\vec{B} = \vec{0}$.

4. On doit donc vérifier

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi_{\vec{E}}}{\partial t}.$$

Or $\vec{B} = \vec{0}$ donc $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$. D'autre part

$$\mu_0 I_{\text{enlacés}} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = -\mu_0 \frac{\vec{u_r}}{4\pi r^2} \iint_S \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S$$

et

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi_{\vec{E}}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \iint_S \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S.$$

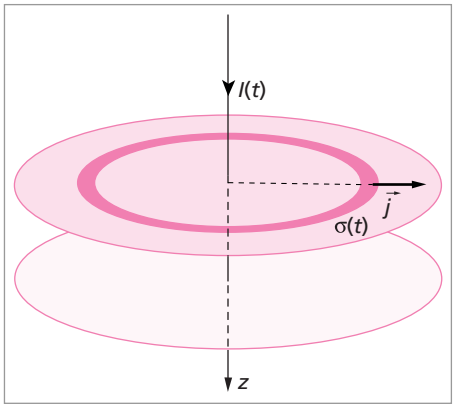
Le théorème d'Ampère généralisé est bien vérifié.

36 **1.** Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie, $\overrightarrow{j_\sigma}$ est un vecteur polaire :

$$\overrightarrow{j_\sigma} = j(r, \theta, z, t)\overrightarrow{u_r}.$$

$\overrightarrow{j_\sigma}$ est contenu dans les armatures, d'où $j_{\sigma,z} = 0$ et j est indépendant de z. Enfin il y a invariance par rotation autour de Oz.

$$\overrightarrow{j_\sigma} = j(r, t)\overrightarrow{u_r}$$



2. On choisit une couronne circulaire de centre O, limitée par les cercles de rayons r et $r + \Delta r$. La charge contenue à l'instant t est $Q(t) = \sigma(t)2\pi r\Delta r$ et à l'instant $t + \Delta t$: $Q(t + \Delta t) = \sigma(t + \Delta t)2\pi r\Delta r$. La variation de charge entre ces deux instants s'écrit $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t) = \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Delta t 2\pi r\Delta r$.
D'autre part la charge entrant dans la couronne pendant la durée Δt peut s'écrire : $\Delta Q_{\text{in}} = I(r)\Delta t = [j_\sigma(r, t)2\pi r]\Delta t$ et celle sortant de la couronne pendant la même durée : $Q_{\text{out}} = -I(r + \Delta r)\Delta t = -j_\sigma(r + \Delta r, t)2\pi(r + \Delta r)\Delta t$. La variation de charge pendant cette durée vaut $\Delta Q = \Delta Q_{\text{in}} + \Delta Q_{\text{out}}$. En identifiant les deux méthodes de calcul de ΔQ il vient :

$$\frac{\partial[rj_\sigma(r, t)]}{\partial r} + r\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ ou encore } \operatorname{div}\overrightarrow{j_\sigma} + \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

3. $\mathrm{d}Q = I(t)\mathrm{d}t$, $\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{I(t)}{\pi R^2}$. En remplaçant dans l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial(rj_\sigma)}{\partial r} = -r\frac{I(t)}{\pi R^2}$$

d'où

$$rj_\sigma(r, t) = -\frac{r^2 I(t)}{2\pi R^2} + C \quad \text{et} \quad j_\sigma(r, t) = -\frac{rI(t)}{2\pi R^2} + \frac{C}{r}.$$

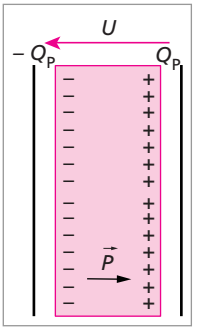
Puisqu'il n'y a pas d'accumulation de charge au bord du disque, $j_\sigma(R, t) = 0$ d'où

$$C = \frac{I(t)}{2\pi} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{j_\sigma} = \frac{I(t)}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\overrightarrow{u_r}.$$

37 **1.** Si N est le nombre d'atomes contenus dans 1 cm^3 de diamant, $\overrightarrow{P} = N\overrightarrow{p}$ avec $N = \dfrac{\mu \mathrm{N}}{M}$ où N est le nombre d'Avogadro. Le moment dipolaire induit vaut donc $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{P}\dfrac{M}{\mu \mathrm{N}}$. $\|\overrightarrow{p}\| = 5{,}7.10^{-37}$Cm.

2. $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{G_+G_-}$ avec $q = -6e$
d'où

$$\overrightarrow{G_+G_-} = \frac{\overrightarrow{p}}{6e}. \left\|\overrightarrow{G_+G_-}\right\| = 5{,}9.10^{-19} \text{ m}.$$



3. $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o \chi \overrightarrow{E}$. Ici $E = \dfrac{U}{d}$ d'où $\chi = \dfrac{Pd}{\varepsilon_o U} = 2{,}3$.

4. $\sigma_p = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{n}$ d'où $Q_p = PS = 5.10^{-11}$ C.

5. $\varepsilon_r = 1 + \chi = 3{,}3$ et $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r = 2{,}9.10^{-11}$ Fm^{-1}.

6. $C_o = \varepsilon_o \dfrac{S}{d} = 2{,}2.10^{-13}$ F et $C = \varepsilon_r C_o = 7{,}3.10^{-13}$ F.

38 **1.** La sphère crée, à l'extérieur, le même champ qu'un dipôle de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ tel que $\overrightarrow{p} = v\overrightarrow{P}$ où $v = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ d'où $\overrightarrow{p} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \overrightarrow{P}$.

2. Le potentiel créé par un dipôle s'écrit :

$$V(\text{M}) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

d'où le potentiel créé par la sphère à l'extérieur :

$$V(\text{M}) = \frac{R^3 P \cos\theta}{3\varepsilon_o r^2}.$$

3. Quand $r = R$, $V(\text{M}') = \dfrac{RP\cos\theta}{3\varepsilon_o}$ or $z = R\cos\theta$ d'où $V(\text{M}') = \dfrac{Pz}{3\varepsilon_o}$.

4. Quand $r < R$: $\overrightarrow{P}$ est uniforme, donc $\rho_p = -\operatorname{div}\overrightarrow{P} = 0$. L'équation de Poisson s'écrit $\Delta V + \dfrac{\rho_p}{\varepsilon_o} = 0$ soit $\Delta V = 0$ d'où $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = A$ et $V = Az + B$. La continuité du potentiel en $r = R$ entraîne que la solution $V = \dfrac{Pz}{3\varepsilon_o}$ convient (on a alors $V(\text{O}) = 0$). Enfin $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ conduit à

$$E = E_z = -\frac{\text{d}V}{\text{d}z} = -\frac{P}{3\varepsilon_o}$$

soit

$$\overrightarrow{E_{\text{int}}} = -\frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$$

le champ électrique est uniforme dans la sphère.

Quand $r > R$: on est en présence du champ d'un dipôle :

$$E_r^{ext} = -\frac{\partial V^{ext}}{\partial r} = \frac{2R^3 P\cos\theta}{3\varepsilon_o r^3}$$

et

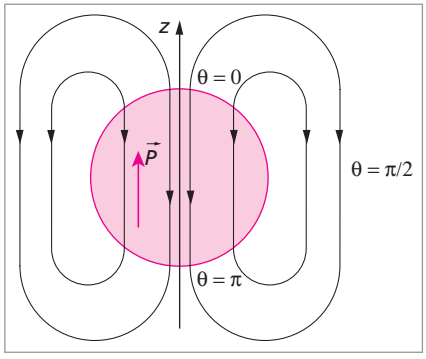
$$E_\theta^{ext} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V^{ext}}{\partial \theta} = \frac{R^3 P\sin\theta}{3\varepsilon_o r^3}.$$

La discontinuité à la surface de la sphère s'écrit

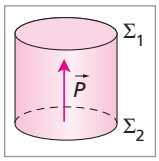
$$\sigma = \sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n} = P\cos\theta$$

et celle de la composante normale du champ :

$$\vec{E_{ext}} - \vec{E_{int}} = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_o}\vec{n} = \frac{P\cos\theta}{\varepsilon_o}\vec{n}.$$

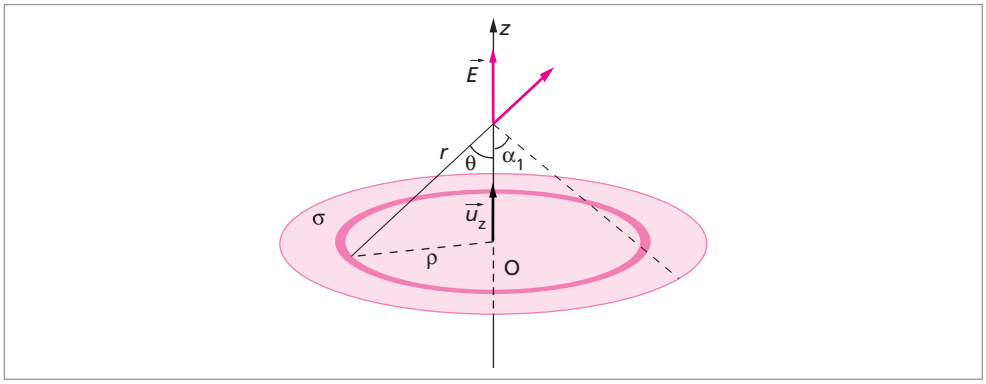


39 **1.** $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$. $\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$: la surface Σ_1 porte $\sigma_1 = P$ et la surface Σ_2 porte $\sigma_2 = -P$.



2. Le champ créé en un point de son axe par un disque portant une densité surfacique de charge σ constante vaut

$$\vec{E} = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi\rho d\rho\cos\theta\,\vec{u_z}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(1-\cos\alpha_1)\vec{u_z}.$$

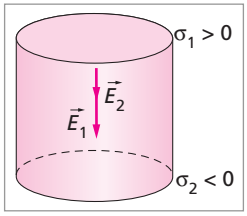


Si M se trouve à l'intérieur du cylindre :

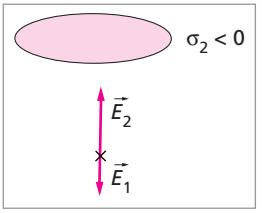
$$\vec{E}_{int} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_o}\left[1 - \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right]$$

et

$$\vec{D}_{int} = -\frac{\vec{P}}{2}\left[\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right]$$



Si M se trouve à l'extérieur du cylindre et en dessous :



$$\overrightarrow{E_{ext}} = -\frac{\overrightarrow{P}}{2\varepsilon_o}[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2]$$

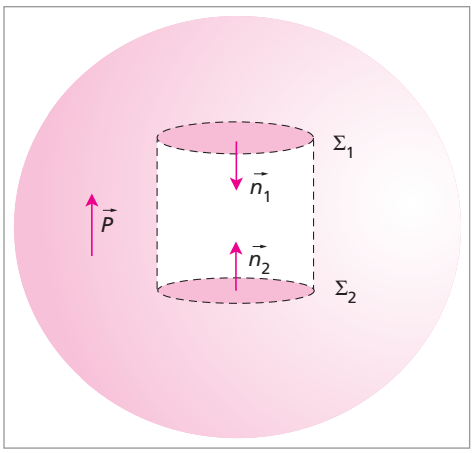
et

$$\overrightarrow{D}_{ext} = \frac{\overrightarrow{P}}{2}[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2]$$

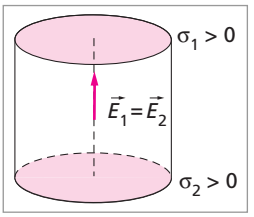
3. Si $h \ll R$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0$, $\overrightarrow{E_{int}} = -\dfrac{\overrightarrow{P}}{\varepsilon_o}$, $\overrightarrow{E_{ext}} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{D_{int}} = \overrightarrow{D_{ext}} = \overrightarrow{0}$.

4. Si $h \gg R$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\overrightarrow{E_{int}} = \overrightarrow{E_{ext}} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{D}_{int} = \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_{ext}} = \overrightarrow{0}$.

40



1. $\rho_p = -\operatorname{div}\overrightarrow{P} = 0$, $\sigma_1 = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{n}_1 = -P$, $\sigma_2 = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{n_2} = +P$. On est ramené au calcul du champ créé par deux disques :



$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(1-\cos\alpha).2\overrightarrow{u_z} = \frac{\overrightarrow{P}}{\varepsilon_o}(1-\cos\alpha).$$

2. $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\overrightarrow{P}}{\varepsilon_o}$.

3. $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$.

4. On rappelle que le champ créé par un disque vaut $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}(1-\cos\alpha)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_o}\overrightarrow{u_z}$ avec $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$.

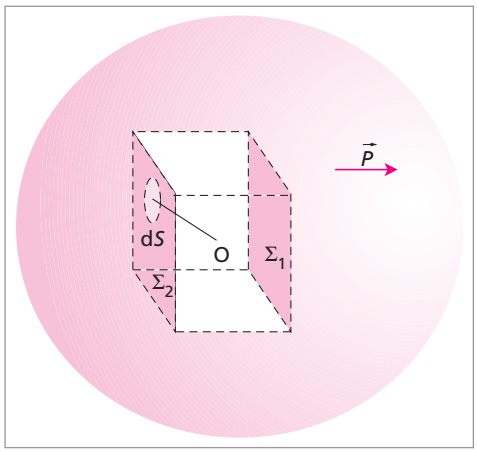
Σ_1 porte $\sigma_1 = -P$ et Σ_2 porte $\sigma_2 = +P$. Soit $\overrightarrow{dE_x}$ le champ créé par l'élément dS de Σ_2 portant σ_2 :

$$\overrightarrow{dE_x} = \frac{\sigma dS \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}\overrightarrow{u_z} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o r^2} d\Omega \overrightarrow{u_x}$$

où dΩ est l'angle solide sous lequel on voit dS. Si Ω est l'angle solide sous lequel on voit Σ_2 à partir du point O :

$$\overrightarrow{E} = 2\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\Omega\overrightarrow{u_x} = \frac{2\overrightarrow{P}\Omega}{4\pi\varepsilon_o}.$$

Or l'angle solide de tout l'espace vaut 4π et les six faces du cube jouent le même rôle,



d'où $\Omega = \frac{4\pi}{6}$ et $\overrightarrow{E} = \frac{2\overrightarrow{P}4\pi}{4\pi\varepsilon_0.6} = \frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$.

5. Pour un cube d'orientation quelconque, on introduit le trièdre Oxyz lié aux côtés du cube. Soient P_x, P_y, P_z les composantes de $\overrightarrow{P}$ sur ces axes pour les deux plans parallèles à yOz il apparaît $\sigma_x = \pm P_x$ qui créent $E_x = \frac{P_x}{3\varepsilon_o}$. De même $E_y = \frac{P_y}{3\varepsilon_o}$ et $_{ext}\frac{P_z}{3\varepsilon_o}$ d'où $\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$ quelle que soit l'orientation du cube par rapport à $\overrightarrow{P}$.

41

1. Méthode itérative

$\overrightarrow{E_o}$ crée $\overrightarrow{P_1} = \varepsilon_o\chi_e\overrightarrow{E_o}$; $\overrightarrow{P_1}$ crée $\overrightarrow{E_1} = -\frac{\overrightarrow{P_1}}{3\varepsilon_o} = -\frac{\chi_e}{3}\overrightarrow{E_o}$; $\overrightarrow{E_1}$ crée $\overrightarrow{P_2} = \varepsilon_o\chi_e\overrightarrow{E_1} = -\frac{\varepsilon_o\chi_e^2}{3}\overrightarrow{E_o}$; $\overrightarrow{P_2}$ crée $\overrightarrow{E_2} = -\frac{\overrightarrow{P_2}}{3\varepsilon_o} = +\frac{\chi_e^2}{9}\overrightarrow{E_o}$; $\overrightarrow{E_2}$ crée $\overrightarrow{P_3} = \varepsilon_o\chi_e\overrightarrow{E_2} = \frac{\varepsilon_o\chi_e^3}{3^2}\overrightarrow{E_o}$; $\overrightarrow{P_3}$ crée $\overrightarrow{E_3} = -\frac{\overrightarrow{P_3}}{3\varepsilon_o} = +\frac{\chi_e^3}{27}\overrightarrow{E_o}$; $\overrightarrow{E_3}$ crée $\overrightarrow{P_4} = \varepsilon_o\chi_e\overrightarrow{E_3} = -\frac{\varepsilon_o\chi_e^4}{3^3}\overrightarrow{E_o}$ etc ...

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_o} + \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} + \ldots = \overrightarrow{E_o}\left(1 - \frac{\chi_e}{3} + \frac{\chi_e^2}{3^2} - \frac{\chi_e^3}{3^3} + \frac{\chi_e^4}{3^4} + \ldots\right) = \frac{\overrightarrow{E_o}}{1 + \frac{\chi_e}{3}}.$$

Ce résultat est valable si $\frac{\chi_e}{3} < 1$ soit pour $\chi_e < 3$.

2. Méthode self-consistante

$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_o} + \overrightarrow{E_d}$ où $\overrightarrow{E_d}$ est le champ dépolarisant. $\overrightarrow{E}$ crée $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o\chi_e\overrightarrow{E}$. On peut aussi concevoir le vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ comme étant créé par le champ dépolarisant $\overrightarrow{E_d}$ tel que $\overrightarrow{E_d} = -\frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o} = -\frac{\chi_e}{3}\overrightarrow{E}$. On obtient alors $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_o} + \overrightarrow{E_d} = \overrightarrow{E_o} - \frac{\chi_e}{3}\overrightarrow{E}$ d'où $\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{E_o}}{1 + \frac{\chi_e}{3}}$. Ce résultat est valable ici quel que soit χ_e.

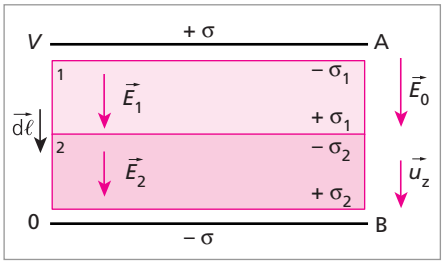
42 Pour une feuille mince : $\overrightarrow{E} = \dfrac{\overrightarrow{E_o}}{1+\chi_e}$ et en l'absence de diélectrique : $\overrightarrow{E_o} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\overrightarrow{u_z}$.

1. Dans le diélectrique 1 :

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\overrightarrow{E_o}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_{r1}}\overrightarrow{u_z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}\overrightarrow{u_z}.$$

De même dans le diélectrique 2 :

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}\overrightarrow{u_z}.$$



2. $Q = \sigma S$ et $V_A - V_B = \displaystyle\int_A^B \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{d\ell}$

d'où $V = E_1 e_1 + E_2 e_2 = \sigma\left(\dfrac{e_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{e_2}{\varepsilon_2}\right)$. Or $C = \dfrac{Q}{V_A - V_B} = \dfrac{Q}{V}$ d'où $C = \dfrac{S}{\dfrac{e_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{e_2}{\varepsilon_2}}$.

Comme $C_1 = \varepsilon_1\dfrac{S}{e_1}$ et $C_2 = \varepsilon_2\dfrac{S}{e_2}$, $\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{S}\left(\dfrac{e_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{e_2}{\varepsilon_2}\right) = \dfrac{1}{C}$: C est équivalent à C_1 et C_2 montés en série.

3. $\overrightarrow{P_1} = \varepsilon_o\chi_1\overrightarrow{E_1} = \dfrac{\varepsilon_o\sigma\chi_1}{\varepsilon_1}\overrightarrow{u_z} = \dfrac{\sigma\chi_1}{\varepsilon_{r1}}\overrightarrow{u_z}$. Or $\sigma_1 = \overrightarrow{P_1}\cdot\overrightarrow{u_z}$ d'où $\sigma_1 = \dfrac{\sigma\chi_1}{\varepsilon_{r1}} = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)$.

De même $\sigma_2 = \dfrac{\sigma\chi_2}{\varepsilon_{r2}} = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)$. À la surface de séparation entre les deux diélectriques apparaît au total :

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right).$$

43 L'équation locale du théorème de Gauss $\operatorname{div}\overrightarrow{D} = \varrho$ avec $\overrightarrow{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\overrightarrow{E}$ devient $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_o\varepsilon_r}$. Si des charges de polarisation existent, elles sont telles que $\varrho_p = -\operatorname{div}\overrightarrow{P}$ or $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o\chi_e\overrightarrow{E}$ d'où $\varrho_p = -\varepsilon_o\chi_e\operatorname{div}\overrightarrow{E}$. Finalement $\varrho_p = -\dfrac{\varrho\chi_e}{\varepsilon_r} = \dfrac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\varrho$. Si $\varepsilon_r = 2$, $\varrho_p = -\dfrac{\varrho}{2}$ et $\varrho_{tot} = \dfrac{\varrho}{2}$. $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\varrho}{2\varepsilon_o}$ est vérifiée.

44 **1.** $\varrho = 0$ donc $\operatorname{div}\overrightarrow{D} = 0$: $D_{n1} = D_{n2}$ ou $\varepsilon_{r1}E_{n1} = \varepsilon_{r2}E_{n2}$.

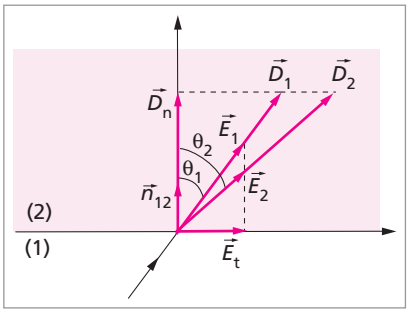
De plus $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ entraîne $E_{t1} = E_{t2}$.

2. $\sin\theta_1 = \dfrac{E_t}{E_1}$, $\sin\theta_2 = \dfrac{E_t}{E_2}$, $\cos\theta_1 = \dfrac{D_n}{D_1}$,

$\cos\theta_2 = \dfrac{D_n}{D_2}$ d'où $\tan\theta_1 = \dfrac{E_t}{E_1}\dfrac{D_1}{D_n} = \varepsilon_1\dfrac{E_t}{D_n}$,

$\tan\theta_2 = \varepsilon_2\dfrac{E_t}{D_n}$ et finalement $\dfrac{\tan\theta_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2}$.

A.N. : $\tan\theta_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\theta_1 = 2$ et $\theta_2 = 63{,}4°$.



3. $\sigma_{p1} = \overrightarrow{P_1}\cdot\overrightarrow{n_{12}}$, $\sigma_{p2} = -\overrightarrow{P_2}\cdot\overrightarrow{n_{12}}$,

$\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2} = (\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2})\cdot\overrightarrow{n_{12}}$. Or $\overrightarrow{P_1} = \varepsilon_o\chi_{e1}\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_1}\cdot\overrightarrow{n_{12}} = E_{n1}$. Il en est de même pour $\overrightarrow{P_2}$, d'où $\sigma_p = \varepsilon_o(\chi_{e1}E_{n1} - \chi_{e2}E_{n2})$. Comme $\varepsilon_{r1}E_{n1} = \varepsilon_{r2}E_{n2}$, $\sigma_p = \varepsilon_o\left(\chi_{e1}\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \chi_{e2}\right)E_{n2}$. Enfin $D_{n2} = \varepsilon_2 E_{n2} = D_n$, il vient finalement

$$\sigma_p = \varepsilon_o D_n\left(\frac{\chi_{e1}}{\varepsilon_1} - \frac{\chi_{e2}}{\varepsilon_2}\right) = -\frac{D_n}{4}.$$

45 **1.** $\overrightarrow{P} = n\overrightarrow{p} = \varepsilon_o\chi\overrightarrow{E}$ où n est le nombre de molécules par unité de volume. $\overrightarrow{p}$ est supposé être le même dans l'oxygène gazeux et l'oxygène liquide. Pour un même champ $\overrightarrow{E}$, n est proportionnel à χ d'où $\chi' = \chi\dfrac{n'}{n}$. Or pour un gaz, si π représente sa pression et N le nombre d'Avogadro, $\pi = \dfrac{n}{N}RT$ d'où $n = \dfrac{\pi N}{RT} = 2{,}5.10^{25}$ molécules/m^3. Pour un liquide, $n' = \dfrac{\mu N}{M}10^6 = 2{,}24.10^{28}$ molécules/m^3. Finalement $\chi' = \chi\dfrac{\mu RT10^6}{M\pi} = 0{,}436$.

2. $\chi'_{exp} \gtrless \chi'_{théo}$: on a négligé l'interaction entre les dipôles induits qui intervient pour 14 % dans χ alors que $n' \cong 10^3 n$.

3. $\chi = n\alpha$ d'où $\alpha = \dfrac{\chi RT}{\pi N} = 1{,}95.10^{-29}$ m^3.

46 **1.** Le champ dû à σ_s est $\overrightarrow{E_s} = \dfrac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$ (cf. la sphère diélectrique de l'exercice 38) or $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_{ext}} + \overrightarrow{E_s}$ d'où $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_{ext}} + \dfrac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_o}$.

2. Pour un gaz ou un milieu LHI, $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o N\alpha\overrightarrow{E}$ d'où

$$\overrightarrow{P} = \frac{\varepsilon_o N\alpha}{1 - \dfrac{N\alpha}{3}}\overrightarrow{E_{ext}}.$$

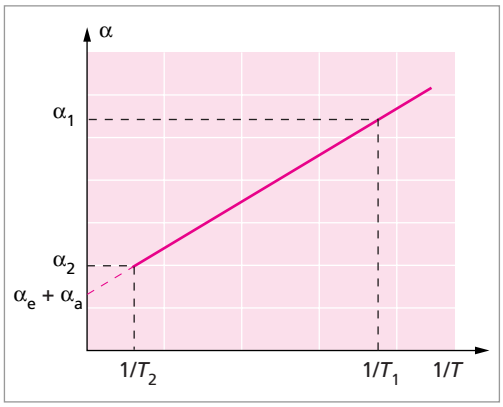
3. $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o \chi \overrightarrow{E_{ext}}$ d'où $\chi = \dfrac{N\alpha}{1 - \dfrac{N\alpha}{3}}$. La catastrophe de polarisation se produit si $\chi \to \infty$ soit si $N\alpha \to 3$. Soit d la taille de la maille et $V = d^3$ son volume. Dans l'hypothèse où il y a un atome ou une molécule par maille, $N = d^{-3}$ et $\dfrac{\alpha}{d^3} \to 3$ soit $d \to \sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{3}}$. Dans le modèle de l'électron élastiquement lié où a_o est la « dimension » de l'atome, $\alpha = 4\pi a_o^3$ d'où $d \to \sqrt[3]{\dfrac{4\pi}{3}} a_o = 1{,}6 a_o$. Ceci correspond à $N = d^{-3} = 2{,}4.10^{29}$ atomes/m^3, c'est-à-dire une densité très élevée, pour laquelle l'expression obtenue pour χ n'est plus exacte.

4. $\varepsilon_r = 1 + \chi = 1 + \dfrac{N\alpha}{1 - \dfrac{N\alpha}{3}}$ d'où $\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \dfrac{N\alpha}{3}$: relation de Clausius - Mosotti.

5. Si les molécules sont polaires : $\alpha \simeq \dfrac{p^2}{3\varepsilon_o kT}$: ε_r dépend de T.

6. $\varepsilon_r \geqslant 1$, d'après le résultat de la 4^e question, $\varepsilon_r \approx 1 + N\alpha$. Si on avait confondu $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E_{ext}}$, on aurait obtenu $\overrightarrow{P} = \varepsilon_o(\varepsilon_r - 1)\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{P} = N\alpha\varepsilon_o \overrightarrow{E}$ d'où $\varepsilon_r = 1 + N\alpha$, relation valable pour un diélectrique très dilué seulement.

47 **1.** $\alpha = \alpha_e + \alpha_a + \dfrac{p^2}{3kT\varepsilon_o}$ d'où la courbe $\alpha = f(1/T)$ suivante.



Pour un gaz, on peut confondre $\overrightarrow{E_{macro}}$ et $\overrightarrow{E_{local}}$, ce qui permet d'écrire : $\chi \approx N\alpha$. La droite obtenue possède la pente

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}} = \frac{\dfrac{\chi_1}{N_1} - \dfrac{\chi_2}{N_2}}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}}.$$

En assimilant $H_2O(g)$ à un gaz parfait : $P = NkT$ d'où $\dfrac{1}{N} = \dfrac{kT}{P}$ et la pente précédente s'écrit

$$k\frac{\dfrac{\chi_1 T_1}{P_1} - \dfrac{\chi_2 T_2}{P_2}}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}} = \frac{p^2}{3k\varepsilon_o}.$$

Finalement

$$p = k\sqrt{3\varepsilon_o \left(\frac{\dfrac{\chi_1 T_1}{P_1} - \dfrac{\chi_2 T_2}{P_2}}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}} \right)} = 6{,}4.10^{-30} \text{ C.m} \neq p_{exp}.$$

2. L'ordonnée à l'origine de la courbe précédente vaut

$$\alpha_e + \alpha_a = \alpha_1 - \frac{\text{pente}}{T_1} = \frac{\chi_1 k T_1}{P_1} - \frac{p^2}{3kT_1\varepsilon_o} \ll \frac{p^2}{3kT_1\varepsilon_o} \quad \text{(polarisation d'orientation).}$$

48 **1.** $Q_+ = 6e$/maille

2. $\overrightarrow{p} = Q_+ \overrightarrow{\delta}$ soit $\|\overrightarrow{p}\| = 6e\delta = 9{,}6.10^{-30}$ Cm/maille.

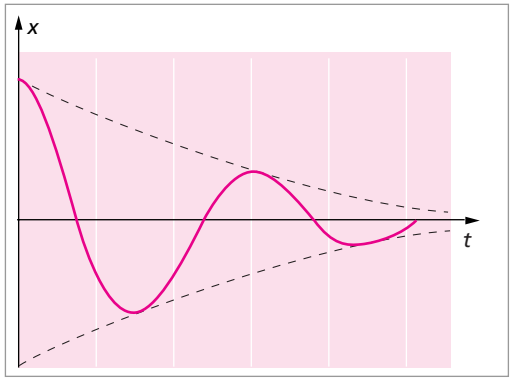
3. $\overrightarrow{P} = \frac{\Sigma \overrightarrow{p}}{V}$. Le volume d'une maille vaut d^3 avec $d = 2{,}83.10^{-10}$ m, d'où $\|\overrightarrow{P}\| = 0{,}42$ C/m > P_{exp}.

49 **1.a.** $\overrightarrow{F}_r = -k\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{F}_e = -e\overrightarrow{E}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $m\ddot{x} = -kx - eE$ soit $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{eE}{m}$ avec $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o a_o^3}$.

b. $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1{,}6.10^{16}$rad/s.

c. $\nu_o = \omega_o/2\pi = 2{,}5.10^{15}$ Hz, $\lambda_o = c/\nu_o = 1{,}2.10^{-7}$ m, $W_o = h\nu_o = 10{,}3$ eV.

2.a. $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = -\frac{eE}{m}$ où γ est homogène à une pulsation.



b. Les oscillations sont amorties si $\Delta < 0$, soit si $\gamma < 2\omega_o$. Sinon les oscillations sont forcées à la pulsation ω.

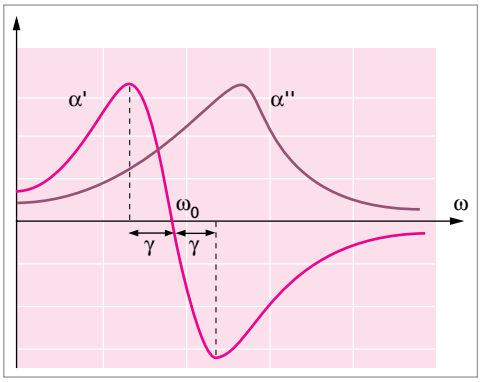
3. $-\omega_o \underline{X_o} - j\omega\underline{X_o} + \omega_o^2\underline{X_o} = -\frac{e}{m}E_o$ d'où la solution

$$\underline{X_o} = \frac{\frac{e}{m}E_o}{(\omega^2 - \omega_o^2) + j\omega\gamma}.$$

4. $\underline{p} = -e\underline{x} = -e\underline{X_o}e^{-j\omega t} = \frac{-\frac{e^2}{m}}{(\omega^2 - \omega_o^2) + j\omega\gamma}\underline{E}$ proportionnel à $\underline{E}$. Or $\underline{p} = \underline{\alpha}\varepsilon_o\underline{E}$ d'où $\underline{\alpha} = -\frac{e^2}{m\varepsilon_o}\frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2) + j\omega\gamma} = \alpha' + j\alpha''$. $p = \mathcal{R}e(\underline{p}) = \mathcal{R}e[\varepsilon_o(\alpha' + j\alpha'')\underline{E}]$. $p = \varepsilon_o\alpha' Eo\cos\omega t + \varepsilon_o\alpha'' Eo\sin\omega t = \varepsilon_o|\underline{\alpha}|Eo\cos(\omega t + \varphi)$: $\overrightarrow{p}$ est déphasé de φ par rapport à $\overrightarrow{E}$. α' correspond à la dispersion (si α est réel, χ_e et ε_r le sont également et $n = 1/\sqrt{\varepsilon_r}$). α'' correspond à l'absorption (cas statique).

5.a. $\omega \ll \omega_o$, $\alpha' \simeq \frac{e^2}{\varepsilon_o k} = 4\pi a_o^3$: c'est le cas statique : p et E vibrent en phase. $\alpha'' \simeq \frac{e^2\omega\gamma}{m\varepsilon_o\omega_o^4} = \frac{\alpha'\omega\gamma}{\omega_o^2} \ll \alpha'$.

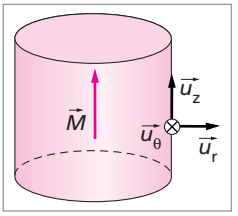
b. $\omega \gg \omega_o$, $\alpha' \simeq \dfrac{e^2}{m\varepsilon_o\omega_o^2}$ tend vers 0 par valeurs négatives. Il en est de même pour α'', mais par valeurs positives. De plus $|\alpha'| \gg \alpha''$: l'électron n'a pas le temps de suivre les variations de $\vec{E}$.



c. $\omega_o^2 - \omega^2 = (\omega_o + \omega)(\omega_o - \omega) \simeq 2\omega_o(\omega_o - \omega)$
d'où $\alpha' \simeq \dfrac{2e^2(\omega_o - \omega)}{m\varepsilon_o\omega_o\gamma^2} = \pm 2\alpha'_o\dfrac{\omega_o}{\gamma} \gg \alpha'_o$.
(α'_o représente la valeur de α' quand $\omega = 0$)
et $\alpha'' = \dfrac{e^2}{m\varepsilon_o\omega_o\gamma}$

d. $\dfrac{d\alpha'}{d\Omega} = 0$ pour $\omega_o - \omega = \pm\gamma$.

50 **1.** $\vec{M} = \overrightarrow{Cte}$ d'où $\vec{j} = \overrightarrow{rot}\vec{M} = \vec{0}$. De plus $\vec{j_\sigma} = \vec{M} \wedge \vec{n} = M\vec{u_\theta}$ montre que le cylindre est équivalent à un solénoïde infiniment long. Or dans ce cas, $\vec{B_{int}} = \mu_o nI\vec{u_z}$ et $\vec{j_\sigma} = nI\vec{u_\theta}$ soit $\vec{B_{int}} = \mu_o j_\sigma \vec{u_z}$. Ici $j_\sigma = M$ d'où



$$\vec{B_{int}} = \mu_o\vec{M}$$

2.a. $\vec{B_{ext}}$ crée $\vec{M_1} = \chi_m\vec{H}_{ext} = \dfrac{\chi_m}{\mu}\vec{B_{ext}}$. $\vec{M_1}$ crée $\vec{B_1} = \mu_o\vec{M_1} = \dfrac{\chi_m}{\mu_r}\vec{B_{ext}}$.

$\vec{B_1}$ crée $\vec{M_2} = \dfrac{\chi_m}{\mu}\vec{B_1} = \dfrac{\chi_m}{\mu\mu_r}\vec{B_{ext}}$. $\vec{M_2}$ crée $\vec{B_2} = \mu_o\vec{M_2} = \left(\dfrac{\chi_m}{\mu_r}\right)^2\vec{B_{ext}}$, etc

$\vec{B} = \vec{B_{ext}} + \vec{B_1} + \vec{B}_2 + \ldots = \vec{B_{ext}}\left(1 + \dfrac{\chi_m}{\mu_r} + \left(\dfrac{\chi_m}{\mu_r}\right)^2 + \ldots\right)$ qui converge si $\dfrac{|\chi_m|}{\mu_r} < 1$.

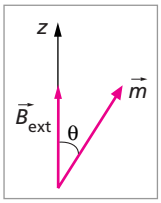
Dans ces conditions $\vec{B} = \dfrac{\vec{B}_{ext}}{1 - \dfrac{\chi_m}{\mu_r}}$. Or $\mu_r = 1 + \chi_m$ d'où $\vec{B} = \mu_r\vec{B_{ext}}$, résultat valable si $-\mu_r < \chi_m < \mu_r$ soit pour $\mu_r > 1/2$.

b. Soit $\vec{B}$ le champ dans le barreau : $\vec{M} = \chi_m\vec{H} = \dfrac{\chi_m}{\mu}\vec{B}$ (LHI). Or $\vec{M}$ crée un champ démagnétisant $\vec{B_d} = \mu_o\vec{M} = \dfrac{\chi_m}{\mu_r}\vec{B}$ d'après la question 1. Le champ total dans le barreau vaut $\vec{B} = \vec{N_{ext}} + \vec{B_d} = \vec{B_{ext}} + \dfrac{\chi_m}{\mu_r}\vec{B}$ qui conduit à $\vec{B} = \dfrac{\vec{B_{ext}}}{1 - \dfrac{\chi_m}{\mu_r}} = \mu_r\vec{B_{ext}}$. On obtient le même résultat, mais cette fois la méthode utilisée est valable quelle que soit la valeur de μ_r.

Remarque : le résultat obtenu n'est valable que pour un cylindre où $\vec{B_{ext}}$ est parallèle à l'axe. Il dépend à la fois de la forme de l'échantillon et de la direction de $\vec{B_{ext}}$.

51 **1.** $\mathrm{d}N = N\mathrm{d}\Omega/4\pi$.

2. $U = -\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = -mB_{\text{ext}}\cos\theta$ où on confond $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ et $\overrightarrow{B_{\text{local}}}$ donc les interactions entre dipôles, le matériau est alors peu dense.



3. $\mathrm{d}N' = \mathrm{d}Ne^{-U/\mathrm{k}T} = \mathrm{d}Ne^{mB_{\text{ext}}\cos\theta/\mathrm{k}T} = \dfrac{N\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\exp\left(\dfrac{mB_{\text{ext}}\cos\theta}{\mathrm{k}T}\right)$
avec $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

4. Seule compte la projection de $\vec{m}$ sur $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$, soit $m_z = m\cos\theta$.

5. $\vec{M} = \displaystyle\int_0^{\pi} m\cos\theta \mathrm{d}N'\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} m\cos\theta\frac{N}{4\pi}\exp\left(\frac{mB_{\text{ext}}\cos\theta}{kT}\right)2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\vec{u_z}$.

Si $mB_{\text{ext}} \ll \mathrm{k}T$, $\dfrac{mB_{\text{ext}}\cos\theta}{\mathrm{k}T} \ll 1$ et $\exp\left(\dfrac{mB_{\text{ext}}\cos\theta}{\mathrm{k}T}\right) \simeq 1 + \dfrac{mB_{\text{ext}}\cos\theta}{\mathrm{k}T}$. L'intégrale précédente se simplifie et conduit à

$$\vec{M} = \frac{m^2NB_{\text{ext}}\vec{u_z}}{3\mathrm{k}T} = \frac{C}{T}\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$$

On obtient la loi de Curie qui conduit à $\vec{M} = \chi_{\text{m}}\vec{H}$ d'où $\chi_{\text{m}} > 0$: le matériau est bien paramagnétique.
On mesure χ_{m} pour différentes températures, on trace $\chi_{\text{m}} = f(1/T)$ et la mesure de la pente permet d'accéder à m.

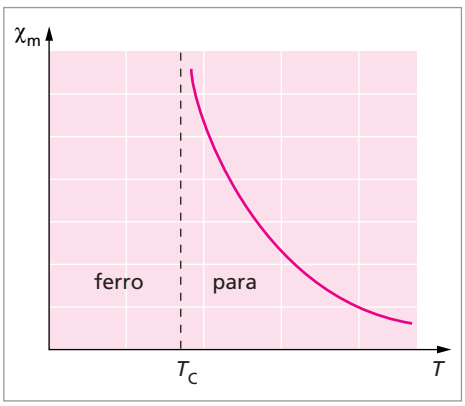
6. Dans l'expression précédente, il faut remplacer $\vec{B}_{\text{ext}}$ par $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} + \mu_{\text{o}}\gamma\vec{M}$. On obtient alors

$$\vec{M} = \frac{m^2N}{3\mathrm{k}}\frac{\overrightarrow{B_{\text{ext}}}}{T - \dfrac{\mu_{\text{o}}\gamma m^2}{3k}N} = \frac{C}{T - T_{\text{C}}}\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$$

c'est la loi de Curie-Weiss où

$$T_{\text{C}} = \frac{\mu_{\text{o}}\gamma m^2}{3\mathrm{k}}N$$

est la température de Curie. Cette théorie du champ moléculaire s'applique aussi aux corps ferromagnétiques, où l'interaction entre dipôles est importante, pour des températures supérieures à T_{C}.
($T_{\text{C}} = 1\,045$ K pour Fe, 627 K pour Ni, 1 385 K pour Co et 857 K pour Fe_3O_4).



7. Si $mB \gg kT$, la fonction

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\theta\exp\left(\frac{mB\cos\theta}{\mathrm{k}T}\right)\mathrm{d}(\cos\theta)$$

tend vers 1, d'où $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{m}N$: tous les moments magnétiques $\overrightarrow{m}$ sont parallèles à $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$: il y a saturation.

52 **1.** Si $\overrightarrow{A} = \dfrac{\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{r}}{2} = \dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{l} zB_y - yB_z \\ xB_z - zB_x \\ yB_x - xB_y \end{array}\right.$. Le calcul de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$ permet d'établir que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$.

2. $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{r}}{2}\right] = -\dfrac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{\text{OM}}}{2}$.

3. $\overrightarrow{f} = -\text{e}\overrightarrow{E} = \dfrac{\text{e}}{2}\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{r}$. $\overrightarrow{\Gamma_{\text{N}}} = \overrightarrow{\text{OM}} \wedge \overrightarrow{f} = \dfrac{e}{2}[\text{OM}^2\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{\text{OM}}.\overrightarrow{b})\overrightarrow{\text{OM}}]$. En coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\overrightarrow{\Gamma_{\text{N}}} = \frac{\text{e}}{2}\left|\begin{array}{l} (x^2+y^2+z^2)b_x - (xb_x + yb_y + zb_z)x \\ (x^2+y^2+z^2)b_y - (xb_x + yb_y + zb_z)y \\ (x^2+y^2+z^2)b_z - (xb_x + yb_y + zb_z)z \end{array}\right.$$

4. $\langle x^2+y^2+z^2\rangle = a^2$, $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle = \dfrac{a^2}{3}$ et $\langle xy\rangle = \langle yz\rangle = \langle zx\rangle = 0$. D'où $\left\langle \overrightarrow{\Gamma_{\text{N}}} \right\rangle = \dfrac{\text{e}a^2}{3}\overrightarrow{b} = \dfrac{\text{e}a^2}{3}\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$.

5. $\dfrac{\text{d}\overrightarrow{J}}{\text{d}t} = \left\langle \overrightarrow{\Gamma_{\text{N}}} \right\rangle$. Ici $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L}$ d'où $\dfrac{\text{d}\overrightarrow{L}}{\text{d}t} = \dfrac{\text{e}a^2}{3}\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$. Or $\overrightarrow{M} = -\dfrac{\text{e}}{2m}\overrightarrow{L}$.

L'équation différentielle sur $\overrightarrow{M}$ s'écrit

$$\frac{\text{d}\overrightarrow{M}}{\text{d}t} = -\frac{\text{e}^2a^2}{6m}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}.$$

qui s'intègre en :

$$\overrightarrow{M} = -\frac{\text{e}^2a^2}{6m}\overrightarrow{B} + \overrightarrow{\text{Cte}}.$$

La constante s'annule car, à $t = 0$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$.

6. $\overrightarrow{M} = N\overrightarrow{M} = -\dfrac{\text{e}^2a^2N}{6m}\overrightarrow{B} = \chi_{\text{m}}\overrightarrow{H} = \chi_{\text{m}}\dfrac{\overrightarrow{B}}{\mu_{\text{o}}}$ d'où $\chi_{\text{m}} = -\dfrac{\text{e}^2a^2N\mu_{\text{o}}}{6m} < 0$: le matériau est bien diamagnétique. Pour Z électrons

$$\chi_{\text{m}} = \sum_{i=1}^{Z} -\frac{\text{e}^2a_{\text{i}}^2N\mu_{\text{o}}}{6m}.$$

Avec $Za^2 = \sum_{i=1}^{Z} a_{\text{i}}^2$ il vient $\chi_{\text{m}} = -\dfrac{Z\text{e}^2a^2N\mu_{\text{o}}}{6m}$.

53 **1.** $\vec{m} = g\dfrac{q}{2m}\vec{J}$.

2. L'atome étant placé dans un champ magnétique constant : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ mais $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

3. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = g\dfrac{q}{2m}\vec{m} \wedge \vec{B}$.

a. $\vec{m} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = g\dfrac{q}{2m}\vec{m} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}) = 0$ donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m^2) = 0$: m est indépendant de t.

b. $\vec{B} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = g\dfrac{q}{2m}\vec{B} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}) = 0$ donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}.\vec{m}) = 0$: l'angle entre $\vec{m}$ et $\vec{B}$ est constamment égal à θ.

4. L'extrémité de $\vec{m}$ décrit un cercle de rayon

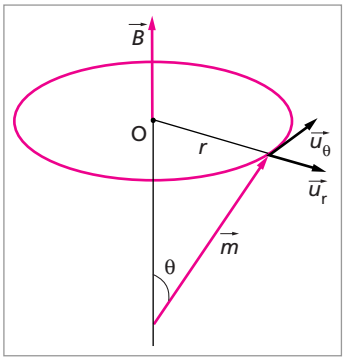
$$r = \|\vec{m}\| \sin\theta$$

autour de $\vec{B}$ à la vitesse

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = g\frac{q}{2m}\vec{m} \wedge \vec{B} = -g\frac{q}{2m}rB\vec{u}_\theta = \overrightarrow{\text{Cte}}.$$

Sa fréquence de rotation vaut donc

$$f_o = \frac{v}{2\pi r} = -\frac{gqB}{4\pi m} = 1{,}4 \text{ GHz}.$$



54 **1.** $U = -\vec{m}.\vec{B}$, $U_+ = -mB$, $U_- = +mB$.

2. $P_+ = A\exp\left(-\dfrac{U_+}{kT}\right) = A\exp\left(\dfrac{mB}{kT}\right)$, $P_- = A\exp\left(-\dfrac{U_-}{kT}\right) = A\exp\left(-\dfrac{mB}{kT}\right)$

avec $P_+ + P_- = 1$ d'où $A = \dfrac{1}{2ch\dfrac{mB}{kT}}$.

3. $\langle\vec{m}\rangle = P_+\vec{m} - P_-\vec{m} = m\vec{u_z}th\left(\dfrac{mB}{kT}\right)$ si $\vec{B}$ est parallèle à $\vec{u_z}$.

4. $\vec{M} = N\langle\vec{m}\rangle$ d'où $\vec{m} = mN\vec{u_z}th\left(\dfrac{mB}{kT}\right)$.

5.a. Quand $\dfrac{mB}{kT} \ll 1$, $th\left(\dfrac{mB}{kT}\right) \approx \dfrac{mB}{kT}$ donc $\vec{M} \approx N\dfrac{m^2B}{kT}\vec{u_z} = \dfrac{Nm^2}{kT}\vec{B}$.

$\vec{M}$ est proportionnel à $\vec{B}$: le matériau se comporte comme un matériau LHI.

b. $\vec{M} = \chi_m\vec{H} \approx \chi_m\dfrac{\vec{B}}{\mu_o}$ d'où $\chi_m = \dfrac{Nm^2\mu_o}{kT}$.

c. $\chi_m > 0$: le matériau est paramagnétique. On retrouve la loi de Curie au facteur 1/3 près car toutes les orientations ne sont pas permises.

Chapitre 3

Électrocinétique

La partie importante de ce chapitre d'électrocinétique concerne la loi d'Ohm algébrique et les lois générales des circuits. Le chapitre traite également l'interaction électrique. Cependant le concours comporte assez peu d'électrostatique : seuls les condensateurs ont vraiment besoin d'être étudiés. En régime sinusoïdal, il est indispensable de maîtriser la notation complexe pour visualiser la représentation de Fresnel et les écrans d'oscilloscope.
En régimes variables, il faut bien connaître la résolution des équations différentielles du 2e ordre (linéaires, à coefficients constants), qui concernent les oscillations libres ou entretenues, mais sont aussi très générales en physique (mécanique, électromagnétisme...). Cette partie prépare à l'électronique (chap. 4). Comme bibliographie, tout livre de 1er cycle convient (DEUG ou Prépas).

1. L'interaction électrique
1.1. Domaines d'étude
1.2. Les interactions en physique
1.3. Le champ électrique
1.4. Le potentiel électrique
1.5. Capacité électrique

2. Les circuits électriques
2.1. Courant électrique
2.2. Loi d'Ohm pour un conducteur
2.3. Dipôle électrocinétique
2.4. Résistance pure (conducteur ohmique)
2.5. Loi d'Ohm généralisée
2.6. Lois des circuits électriques (lois générales)
2.7. Loi de Joule, énergie, puissance

3. Les régimes sinusoïdaux
3.1. Grandeurs sinusoïdales
3.2. Intensité efficace (effet Joule)
3.3. Loi d'Ohm en régime sinusoïdal (circuit RLC série)
3.4. Circuit oscillant « parallèle » (circuit bouchon)
3.5. Puissance en régime sinusoïdal

4. Les régimes variables
4.1. Régime transitoire avec *R*, *L* ou *C*
4.2. Charge et décharge d'un condensateur
4.3. Courant transitoire dans une bobine
4.4. Décharge d'un condensateur dans une bobine (*RLC* série)
5. Mesure de déphasage à l'oscilloscope

1. L'INTERACTION ÉLECTRIQUE

1.1. Domaines d'étude

L'électricité, au sens large, regroupe différents domaines :
- l'électrostatique : étude des interactions entre des charges électriques ;
- l'électrocinétique : étude des circuits électriques ;
- l'électronique : étude des circuits électriques parcourus des courants très faibles ;
- l'électromagnétisme : étude des phénomènes reliant électricité et magnétisme ;
- l'électrodynamique : étude des actions entre courants de charges ;
- l'électrotechnique : étude des appareils transformant l'énergie électrique (moteurs, générateurs).

Ce chapitre ne concerne que l'électrocinétique.

1.2. Les interactions en physique

L'électromagnétisme est une des quatre interactions fondamentales de la nature, avec l'interaction gravitationnelle (attraction entre les masses), l'interaction nucléaire forte (cohésion des noyaux atomiques) et l'interaction nucléaire faible (radioactivité β).
La matière est électriquement **neutre**. C'est la raison pour laquelle, à grande distance, seule intervient l'interaction gravitationnelle, pourtant beaucoup plus faible (10^{-40}) que l'interaction électromagnétique. L'interaction électromagnétique est caractérisée par un champ $f(\overrightarrow{r}, t)$, lequel traduit une propriété de l'espace qui évolue en fonction du temps, la fonction f étant vectorielle ou scalaire.

1.3. Le champ électrique

• **Repères historiques :** en 1733, Charles DUFAY (ou DU FAY) met en évidence l'existence de deux sortes d'électricité. En 1750, Benjamin FRANKLIN introduit la notion de charges électriques. Henry CAVENDISH, en 1771, découvre la loi $F/q =$ Cste à une distance donnée et en 1785, Charles de COULOMB vérifie la loi d'interaction en $1/r^2$:

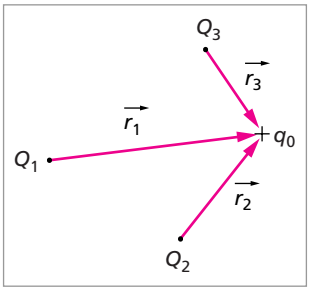
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q'}{r^2}\overrightarrow{u} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (SI)}$$

Définition du champ électrique : des charges Q_k créent un champ $\overrightarrow{E}$ dans tout l'espace. Une des charges (notée ici q_0) subit le champ dû à toutes les autres charges (on néglige le champ dû à q_0). Si la charge q_0 est au point M de l'espace, on définit le **champ électrique** $\overrightarrow{E}$ au point M par :
pour un ensemble de charges discrètes :

$$\vec{E}(\text{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \left(\frac{Q_k}{r_k^2}\vec{u_k}\right)$$

pour un ensemble continu de charges :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{u}$$



La force d'interaction sur q_0 est alors : $\vec{F} = q_0\vec{E}$

1.4. Le potentiel électrique

On déplace une charge q_0 sur un parcours quelconque AB, soumis au champ $\vec{E}$ d'une distribution de charges. Le **travail** W_{AB} de la force électrostatique au cours du déplacement ne dépend que des points A et B, et non de la manière dont s'effectue ce parcours.

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B)$$

Les quantités V_A et V_B sont respectivement appelés **potentiels électriques** des points A et B.

• **Calcul du potentiel**

– Pour un ensemble de charges discrètes Q_k, le potentiel en un point M quelconque s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \left(\frac{Q_k}{r_k}\right) + \text{Cste}$$

– Pour un ensemble continu de charges $\mathrm{d}q(\vec{r})$, le potentiel en un point M quelconque s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

Le potentiel est défini à une constante additive près.

• **Relation différentielle entre *E* et *V***

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \qquad \text{ou} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$$

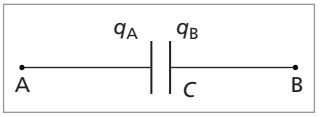
Propriété : Sur un circuit (C) fermé, la circulation de $\vec{E}$ est nulle :

$$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

Remarque : le petit cercle sur le symbole d'intégration signifie « contour fermé ».

1.5. Capacité électrique

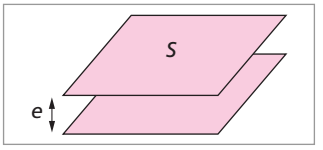
Soit U la différence de potentiel électrique (différence de potentiel ou **ddp**) entre deux conducteurs en influence totale. La charge Q de chaque conducteur est proportionnelle à U. Les deux conducteurs forment un condensateur.



C est une constante appelée **capacité du condensateur**. Sur l'armature du condensateur reliée à A se trouve la charge q_A (et q_B sur l'autre armature). On a $q_A = C\cdot(V_A - V_B)$ et $q_B = C\cdot(V_B - V_A)$. Les charges sont donc opposées :

$$q_B = -q_A$$

• **Condensateur plan** : il est formé de deux armatures planes, distantes de e épaisseur du diélectrique. L'aire des surfaces en regard vaut S. La capacité d'un condensateur plan est :



$$C = \frac{\varepsilon.S}{e}$$

où ε est la **permittivité diélectrique** de l'isolant compris entre les armatures du condensateur. On écrit généralement ε sous la forme $\varepsilon = \varepsilon_r\cdot\varepsilon_0$. Le nombre ε_r, sans dimension, est appelé permittivité relative du diélectrique

Exemple : pour le vide, $\varepsilon_r = 1$, pour l'air $\varepsilon_r = 1{,}0006$ (soit ≈ 1), et pour le verre $\varepsilon_r = 6$.

Entre les armatures d'un condensateur plan, le champ $\overrightarrow{E}$ est uniforme : les lignes de champ sont parallèles entre elles, perpendiculaires aux armatures planes (on néglige les effets de bord) et orientées dans le sens des potentiels décroissants. Les surfaces équipotentielles ($V = \text{Cste}$) sont des plans parallèles aux armatures.

Remarque : on parle d'un champ **uniforme** quand il est le même en tout point de l'espace. On parle de champ **constant** quand il ne varie pas dans le **temps**.

• **Groupement de condensateurs** : considérons N condensateurs associés dont les capacités sont notées C_k.

– En série, les différences de potentiel aux bornes des condensateurs s'ajoutent et les inverses des capacités s'ajoutent ; la capacité totale équivalente C_T est telle que :

$$\frac{1}{C_T} = \sum_k \left(\frac{1}{C_k}\right)$$

Si les N condensateurs sont identiques, la capacité C est divisée par N.

– En dérivation, la différence de potentiel aux bornes des condensateurs est la même pour tous les condensateurs. Les charges s'ajoutent, donc $Q_T = \sum_k Q_k$ à U constante soit :

$$C_T = \sum_k C_k$$

Remarque : bien distinguer l'élément électrique (le condensateur) de sa grandeur électrique caractéristique (la capacité). Ne pas utiliser des expressions telles que « une capa » ou « un condo ».

2. Les circuits électriques

2.1. Courant électrique

Le courant électrique correspond à un mouvement de charges. L'**intensité** du courant électrique se définit comme un **débit de charges** à travers une surface. Il s'exprime en coulomb par seconde (C/s) ou en ampère (A) :

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

On définit le vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}$$

où n est le nombre de charges q par m^3, circulant à la vitesse $\vec{v}$ dans le conducteur. Le flux de $\vec{j}$ à travers la section S du conducteur est alors l'intensité électrique :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Remarques :

– le mot « intensité » est parfois remplacé par le mot « courant » ; c'est incorrect car le courant désigne le déplacement des charges alors que l'intensité est la caractéristique numérique de ce déplacement.

– la vitesse d'**établissement** du champ électrique dans un circuit est très grande : de l'ordre de grandeur de $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s (vitesse de la lumière dans le vide) ;

– la vitesse de **déplacement** des électrons dans un conducteur est beaucoup plus faible : de l'ordre de quelques fractions de millimètres par seconde seulement, éventuellement 1 mm/s.

Ces deux vitesses ne doivent pas être confondues : quand on ferme un circuit (interrupteur), une onde électromagnétique se propage dans tout le circuit (à la vitesse c) pour y établir un champ électrique, puis les électrons se déplacent très lentement sous l'action de ce champ électrique à la vitesse $v \ll c$.

2.2. Loi d'Ohm pour un conducteur

Cette loi a été établie en 1827 par Georg OHM à partir d'un constat expérimental.

Loi : pour un conducteur donné soumis à une différence de potentiel variable U, l'intensité du courant I qui circule est proportionnelle à U. La constante de proportionnalité se nomme la conductance du circuit :

$$\frac{I}{U} = \text{Cste}$$

Le rapport I/U ne dépend ni de I ni de U, mais uniquement du conducteur. La loi d'Ohm **locale** pour un conducteur s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

où $\vec{j}$ est la densité de courant, $\vec{E}$ le champ électrostatique et σ est la **conductivité** électrique du matériau.

Exemple : pour les métaux très conducteurs (Ag, Cu), $\sigma \approx 6 \cdot 10^7$ $(\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$; pour les isolants (quartz, soufre), $\sigma \approx 10^{-15}$ $(\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$.

La conductivité dépend de la température : pour les métaux, elle décroît quand T croît. Elle devient infinie pour certains matériaux **supraconducteurs** (à basse température, la résistance électrique devient nulle).

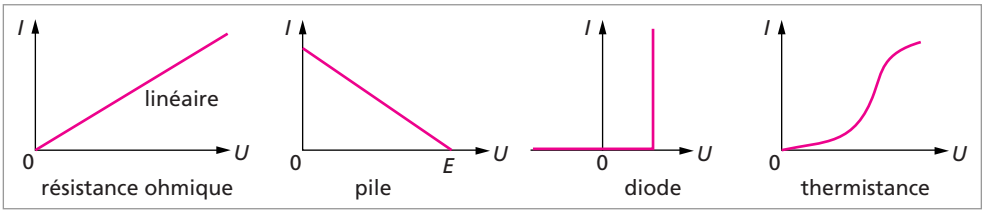
2.3. Dipôle électrocinétique

Définition : un dipôle électrocinétique est un ensemble de un ou plusieurs conducteurs, qui comporte deux bornes.

Son rôle est de transformer l'énergie :

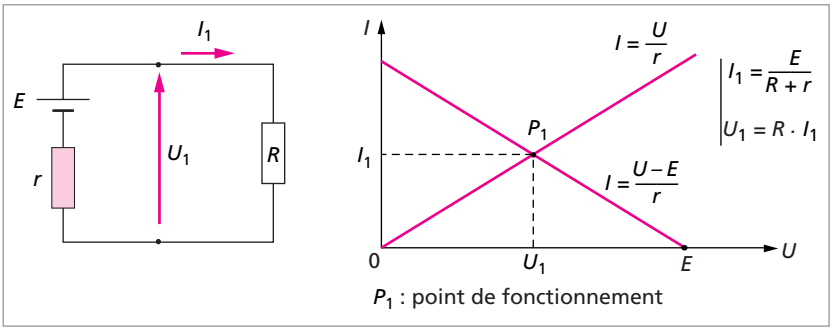
- **dipôle passif** : cas d'une résistance électrique qui transforme l'énergie électrique en énergie thermique et énergie rayonnante ;
- **dipôle actif** :
  - cas du **générateur** qui transforme l'énergie mécanique ou chimique en énergie électrique ;
  - cas du **récepteur** qui transforme l'énergie électrique en énergie mécanique ou chimique.

• **Caractéristique d'un dipôle** : c'est la courbe $I = f(U)$ reliant le courant d'intensité I dans le dipôle (l'effet) à la différence de potentiel U aux bornes du dipôle (la cause). On écrit parfois la relation réciproque $U = g(I)$ reliant la cause (U) à l'effet (I). On parle aussi de la caractéristique « courant-tension » d'un dipôle.
Elle peut prendre différentes formes. Voici quelques exemples ci-après.



• **Point de fonctionnement d'un dipôle** : c'est le couple de valeurs (U_1, I_1) correspondant aux valeurs effectives de fonctionnement du dipôle dans un circuit donné. On l'obtient par le calcul ou bien graphiquement, par l'intersection des caractéristiques des dipôles associés du circuit.

Exemple : point de fonctionnement d'une résistance dans le circuit (pile + résistance)



• **Résistance statique et résistance dynamique** (définitions) : la résistance statique d'un dipôle soumis à une différence de potentiel U_1 et parcouru par un courant d'intensité I_1 est :

$$R_s = \frac{U_1}{I_1}$$

Sa résistance dynamique est :

$$R_d = \left(\frac{dU}{dI}\right)$$

La résistance dynamique est la pente (dU/dI) de la tangente à la caractéristique au point de fonctionnement $(U_1,\ I_1)$.

• **Champ électromoteur** : Le champ $\vec{E}$, responsable du déplacement des charges dans le circuit, est la somme de deux termes : le champ électrostatique $\vec{E_s}$, dû aux charges, et le champ $\vec{E_m}$, champ électromoteur, fournissant l'énergie. Ce champ $\vec{E_m}$ ne dérive pas d'un

potentiel. La circulation de $\overrightarrow{E_m}$ entre les bornes du dipôle A et B vaut :

$$e = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{E_m} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Le signe de e indique s'il s'agit d'un générateur ou d'un récepteur :

- si $e > 0$, c'est un **générateur** de force électromotrice e (f.e.m.)
- si $e < 0$, c'est un **récepteur** de force contre-électromotrice e (f.c.e.m.).

Remarque : le terme « force » est d'usage, mais hélas impropre.

2.4. Résistance pure (conducteur ohmique)

Pour obtenir la valeur de la résistance d'un conducteur ohmique, on calcule, dans le cas général, la différence de potentiel entre A et B, bornes du dipôle :

$$U = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

puis l'intensité dans le conducteur de section S :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{avec} \qquad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

La résistance est égale au rapport U/I :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\displaystyle\iint_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

• **Unité :** la **résistance** se mesure en ohms (Ω). La **conductance** $G = \dfrac{1}{R}$ se mesure en siemens (S).

Dans le cas d'un conducteur cylindrique (de section S constante), et uniquement dans ce cas, en régime permanent, avec un champ $\vec{E}$ uniforme, la relation devient :

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{S}}$$

où ρ est la **résistivité** du matériau $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ (en $\Omega \cdot \mathrm{m}$). Pour les métaux habituels (Ag, Cu), $\rho \approx 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

Remarque : attention, cette relation ($R = \rho \cdot l/S$) n'est utilisable que dans le cas des conducteurs cylindriques.

• **Groupement de résistances** : soient N conducteurs ohmiques associés. Les résistances sont notées R_k.
– En série, l'intensité est la même en tout point du circuit, les différences de potentiel aux bornes des conducteurs s'ajoutent ; la résistance totale R_T de l'association des dipôles est telle que :

$$R_T = \sum_k R_k$$

Si les N résistances en série sont égales, la résistance totale est multipliée par N :

$$R_T = NR_k.$$

– En dérivation, la différence de potentiel totale est la même pour tous les conducteurs ohmiques et les intensités I_k dans chaque branche s'ajoutent, donc :

$$I = \sum_k I_k$$

à U constante, soit :

$$\frac{1}{R_T} = \sum_k \left(\frac{1}{R_k}\right)$$

Si les N résistances en dérivation sont identiques, la résistance totale est divisée par N :

$$R_T = R_k/N$$

Exemple : pour deux résistances R_1 et R_2 en dérivation, on peut écrire directement $R_T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (le rapport du produit des deux et de la somme des deux). Mais attention, s'il y a 3 résistances R_1, R_2 et R_3 en dérivation, il est **faux** d'écrire que la résistance équivalente est $R_T = \dfrac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ (on constate d'ailleurs que le numérateur de cette expression est en R^3 et le numérateur en R, donnant un nombre homogène à R^2). On doit calculer R_T par la relation :

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

2.5. Loi d'Ohm généralisée

C'est une des lois physiques les plus importantes de l'électricité. Pour un conducteur ohmique, la loi d'Ohm s'écrit simplement $U = R \cdot I$. Qu'en est-il pour une portion de circuit comportant un générateur par exemple ?
On a vu que le champ $\vec{E}$ (responsable du déplacement des charges dans le circuit) est la somme de deux termes : le champ électrostatique $\vec{E_s}$, dû aux charges, et le champ $\vec{E_m}$,

champ électromoteur, fournissant l'énergie. On calcule la circulation de $\vec{E} = \overrightarrow{E_s} + \overrightarrow{E_m}$ sur le parcours AB :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \overrightarrow{E_s} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

c'est-à-dire :

$$R \cdot I = (V_A - V_B) + e$$

Pour une portion de circuit AB comportant un dipôle électromoteur de f.e.m. (ou de f.c.e.m.) e, la loi d'Ohm (généralisée) s'écrit donc :

$$\boxed{V_A - V_B = R \cdot I - e}$$

• **Convention de signe pour cette relation :** on choisit **arbitrairement** un sens positif pour le courant I. On se déplace de A vers B. L'intensité est alors comptée **algébriquement** en fonction du sens défini pour I.

Remarque : on écrit parfois la relation ainsi $V_A - V_B = R \cdot I - \varepsilon \cdot e$ où ε est le signe de la borne de « sortie » du dipôle électromoteur de f.e.m. e (au sens du parcours d'écriture de la relation de A vers B). Si on « sort » par le pôle $+$ alors $\varepsilon = +1$ tandis que si on « sort » par le pôle $-$ alors $\varepsilon = -1$.

La circulation de $\overrightarrow{E_m}$ s'écrit $e = \int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Elle est positive si le dipôle électromoteur est générateur quand le courant va de A vers B, et est négative sinon.

Exemple : dans un récepteur polarisé (et dans ce cas seulement), l'intensité I_p ne peut être que positive ou nulle. Si, après le calcul de I_p, on trouve $I_p < 0$, il faut reprendre **tout** le calcul en changeant le sens de ce courant. Soit I'_P la nouvelle valeur calculée dans cette branche.
Si $I'_P > 0$, c'est la bonne valeur de l'intensité dans ce récepteur (et I'_P est différent de $-I_P$). Si $I'_P < 0$, alors c'est qu'il n'y a pas de courant dans ce récepteur (car la différence de potentiel aux bornes n'est pas suffisante pour vaincre la f.c.e.m.) et $I_P = 0$.

• **Tension aux bornes d'un générateur** de f.e.m. E et de résistance interne r :

– en circuit ouvert, $U_0 = E$

– en débitant le courant I, $U = E - r \cdot I$

• **Loi de Pouillet** (de Claude POUILLET, en 1837) : en circuit fermé, les f.e.m. en série s'ajoutent algébriquement (elles se « retranchent » numériquement si elles sont en opposition), tandis que les résistances en série s'ajoutent toujours arithmétiquement (elles sont toutes positives).

La somme de toutes les différences de potentiel de la forme $V_A - V_B$ ($= R \cdot I - e$) sur tout le parcours fermé est nulle. On obtient la loi de Pouillet en **circuit fermé** :

$$I = \frac{\sum e}{\sum R}$$

où R désigne toute résistance (ohmique ou interne de générateur). La somme des e est faite algébriquement, celle des R est faite arithmétiquement.

2.6. Lois des circuits électriques (lois générales)

Ce sont des lois numériques qui permettent de calculer les intensités (et/ou les tensions) dans un circuit quelconque. On se place dans le cas où les f.e.m. sont constantes avec un régime permanent : les courants à déterminer sont donc constants.

• **Lois de KIRCHHOFF** (1845) : on considère un réseau de N nœuds et n brins : il y a donc n inconnues (les I_k pour $k = 1... n$). On choisit arbitrairement un sens positif de chacun des courants. Les deux lois de Kirchhoff traduisent la conservation de la charge électrique (loi des intensités à chaque nœud) et la conservation de l'énergie (loi des tensions pour chaque maille fermée).

– **Loi des nœuds** : en chaque nœud du réseau, on a $\sum I_k = 0$ (somme algébrique).

– **Loi des mailles** : sur chaque maille fermée, la somme algébrique des ddp est nulle ; si la maille ne comporte que des générateurs, et/ou des récepteurs et des résistances, on a :

$$\sum (R_k \cdot I_k - e_k) = 0$$

On doit écrire n équations : on applique la 1re loi à $N - 1$ nœuds seulement et la 2e loi est appliquée $n - N + 1$ fois aux mailles.

• **Théorème de superposition** : le circuit ne comporte que des générateurs de f.e.m. E_k et des résistances R_k dans la k-ième branche. Ce théorème est une conséquence de la linéarité de la loi d'Ohm (e et R ne dépendent pas de I).
En régime permanent, les courants I (dans chaque branche) et les tensions U (aux bornes de chaque branche) sont des fonctions linéaires des f.e.m. E_k. Les coefficients α_k et β_k ne dépendent que des résistances R_k :

$$I = \sum \alpha_k \cdot E_k \qquad \text{et} \qquad U = \sum \beta_k \cdot E_k$$

Si on modifie les E_k sans modifier les résistances R_k, on peut écrire avec les mêmes coefficients α_k et β_k :

$$I' = \sum \alpha_k \cdot E'_k \qquad \text{et} \qquad U' = \sum \beta_k \cdot E'_k$$

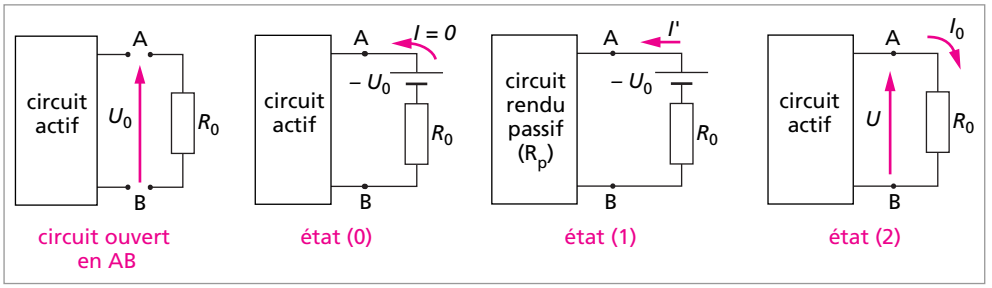
On superpose ces deux états :

$$i = I + I' = \sum \alpha_k \cdot (E_k + E'_k) \qquad \text{et} \qquad u = U + U' = \sum \beta_k \cdot (E_k + E'_k)$$

Ce sont encore des relations linéaires, ce qui montre qu'on a un régime permanent.

Exemple : dans la pratique, on superpose autant d'états qu'il y a de générateurs ; pour chaque état, on « enlève » toutes les f.e.m. sauf une, tout en gardant toutes les résistances (y compris les résistances internes des générateurs « éteints »), et on calcule les intensités des courants « partiels » débités dans tous les brins par le seul générateur restant. Puis on considère un 2e état en choisissant un autre générateur « allumé », etc. L'intensité du courant total est la somme algébrique des intensités partielles ainsi déterminées.

• **Théorème de THÉVENIN** (1883) : ce théorème est une application du théorème de superposition. Dans un circuit actif quelconque, on cherche le courant dans un brin comportant uniquement la résistance pure notée ici R_0 (ce peut être une résistance équivalente). D'abord, on « isole » ce brin en « ouvrant » le circuit aux bornes de R_0. Ensuite, on calcule la tension U_0 aux bornes A et B de ce circuit ouvert (dite tension « à vide »), cette tension est due au reste du circuit actif.



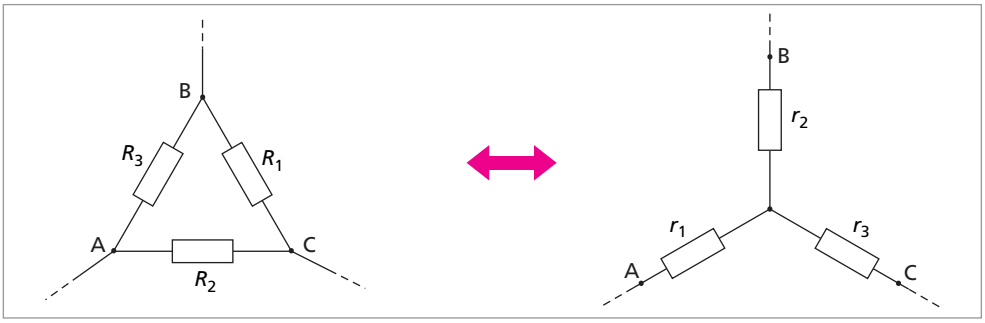
On place alors en série avec R_0 une pile de f.e.m. $-U_0$, **en opposition**, de façon à avoir un courant **nul** dans R_0, le circuit étant de nouveau fermé en A et B (c'est l'état (0))
Ce nouveau circuit peut être considéré comme la superposition de 2 états :
– 1er état : on « éteint » toutes les f.e.m. du circuit initial, de façon à le rendre « passif » (on garde toutes les résistances et toutes les résistances **internes** des générateurs « éteints »). Vu des points A et B, il est équivalent à une seule résistance R_p (résistance du circuit rendu passif). La pile de f.e.m. $-U_0$ débite donc le courant I' dans R_0 avec $I' = \dfrac{-U_0}{R_0 + R_p}$ (loi de Pouillet)
– 2e état : le circuit est de nouveau actif et on enlève la pile de f.e.m. $-U_0$. Il circule alors le courant I_0 (cherché) dans R_0
– la superposition de ces 2 états (1) et (2) donne l'état (0) d'où $I' + I_0 = 0$. On en déduit $I_0 = -I'$.
L'application du théorème de Thévenin s'effectue en 4 étapes :

– 1re étape : on « isole » le brin en « ouvrant » le circuit aux bornes de R_0 ;
– 2e étape : on calcule la tension U_0 aux bornes A et B de ce circuit ouvert ;
– 3e étape : on calcule la résistance R_p du reste du circuit rendu passif (on supprime toutes les f.e.m. mais pas leur résistance interne) ;

– 4e étape : on calcule I_0 par la relation $$I_0 = \frac{U_0}{R_0 + R_p}$$

Remarques : Les quantités U_0 et R_p sont parfois appelées e_T et R_T, respectivement la f.e.m. et la résistance interne du **générateur de Thévenin**.
Le calcul de la résistance R_p n'est pas toujours aisé : le théorème de Kennelly est souvent très utile...

• **Théorème de KENNELLY** (vers 1900) : (ou « transformation triangle-étoile ») Ce théorème permet, entre autres, de calculer R_p (théorème de Thévenin) quand on a des résistances en triangles dans les circuits.

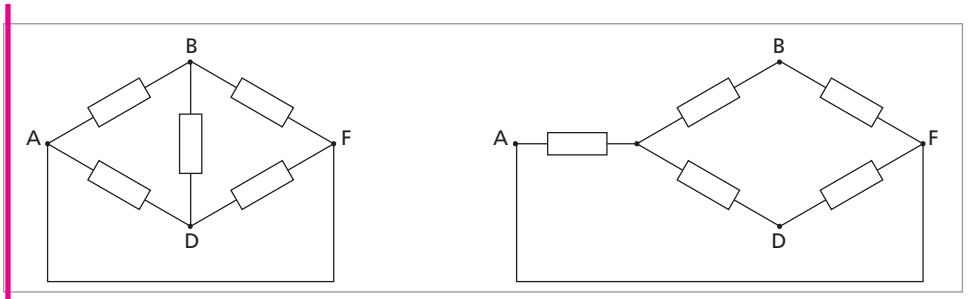


Soient 3 nœuds A, B, C formant un triangle. Chaque brin contient uniquement une résistance (éventuellement équivalente), notées ici R_1, R_2 et R_3.
Ce circuit triangulaire est équivalent au circuit en étoile entre les 3 mêmes nœuds, avec un point « central », relié aux 3 nœuds par les résistances r_1, r_2 et r_3 (remarquer les notations : la résistance R_1 est « opposée » au nœud A relié à r_1).
Le théorème de Kennelly permet de calculer facilement les résistances r_1, r_2, r_3 par les relations :

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

et les deux autres par permutation circulaire (la résistance r_1 est égale au produit des deux résistances « adjacentes » R_2 et R_3, divisé par la somme des 3 résistances R_1, R_2, R_3).

Remarques : la relation inverse (étoile-triangle) n'est quasiment jamais employée.
Attention à bien identifier un triangle dans un circuit et à le remplacer par l'étoile équivalente. Ainsi, à titre de réflexion, vérifier qu'un classique pont de Wheatstone ne comporte qu'un seul triangle (une fois que ce triangle a été transformé en étoile, il n'y a plus de triangle dans le circuit, mais deux branches en dérivation).



• **Application des théorèmes :** il existe encore d'autres théorèmes généraux, mais ceux-là sont généralement suffisants. Pour appliquer tel ou tel théorème, on doit tenir compte de ce qui est demandé, et de la composition du circuit (nombre de générateurs) :

– les lois de Kirchhoff sont faciles à écrire, mais le calcul est long si le circuit comporte beaucoup de brins (système de n équations linéaires à n inconnues) ; cependant, il fournit toutes les intensités dans les différents brins, même s'il est rare qu'on doive toutes les calculer ;

– le théorème de superposition est utile si on a 2 ou 3 générateurs dans le circuit, sur des brins différents ;

– le théorème de Thévenin est utile si on ne calcule qu'un seul courant, car le calcul de R_p et de U_0 n'est pas toujours simple.

2.7. Loi de Joule, énergie, puissance

La puissance consommée P entre deux points d'un circuit soumis à la différence de potentiel U et parcouru par le courant d'intensité I est :

$$P = U \cdot I$$

L'effet Joule (de James JOULE, en 1841) est l'effet thermique de l'électricité. L'énergie dégagée par la résistance R parcourue par le courant I pendant la durée t vaut :

$$W = R \cdot I^2 \cdot t$$

La puissance thermique dissipée par effet Joule vaut donc :

$$P = R \cdot I^2$$

La puissance fournie par un générateur (f.e.m. E, résistance interne r) dans un circuit est $P = EI = UI + rI^2$ (UI est la puissance disponible aux bornes, rI^2 est la puissance thermique perdue dans le générateur).

3. Les régimes sinusoïdaux

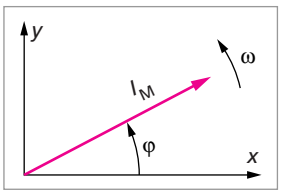
3.1. Grandeurs sinusoïdales

Un courant **alternatif** transporte la même quantité d'électricité à chaque alternance (dans un sens puis dans l'autre). L'intensité moyenne (sur un nombre pair d'alternances) est donc nulle $\langle i \rangle = 0$.
Un courant **périodique** est tel qu'il existe une durée T telle que $i(t + T) = i(t)$. La durée T est la **période** du courant (ou de la tension). La fréquence ν (en Hz) est l'inverse de la période : $\nu = \dfrac{1}{T}$.
Un courant **sinusoïdal** est décrit par la fonction $i(t) = I_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ où I_M est l'intensité maximale, $(\omega \cdot t + \varphi)$ est la **phase**, ω est la **pulsation** $\left(\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu\right)$ et φ la **phase à l'origine** des temps.

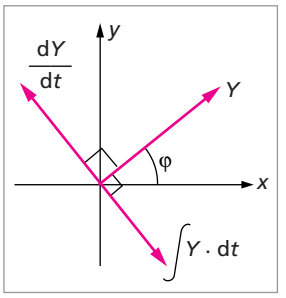
> ***Remarque :*** un courant de la forme $i(t) = I_1 + I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ n'est pas un courant sinusoïdal (sa valeur moyenne sur une période n'est pas nulle) : c'est la somme d'un courant constant (I_1) et d'un courant sinusoïdal $I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. On dit parfois que c'est un courant qui possède une composante continue.

Théorème de Fourier (1830) : toute fonction périodique $f(t)$ est décomposable en une somme infinie de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale de $f(t)$.
Ce théorème permet donc de se ramener au cas des fonctions sinusoïdales pour étudier n'importe quelle fonction périodique.

• **Représentation par un vecteur** (Fresnel, 1819) : on associe un vecteur au scalaire $i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$. Ce vecteur est représenté à l'instant $t = 0$, a pour module I_M et pour phase l'angle φ. Quand le temps t croît, ce vecteur tourne autour de l'origine à la vitesse angulaire ω



Le vecteur associé à la fonction dérivée $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est en **quadrature** avance de $\pi/2$, sur celui de $i(t)$, tandis que le vecteur associé à la primitive $\int i(t) \cdot \mathrm{d}t$ est en quadrature retard de $\pi/2$ sur celui de $i(t)$. Ainsi, $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ et $\int i(t) \cdot \mathrm{d}t$ sont deux grandeurs en opposition de phase.



• **Représentation complexe** (Kennelly, vers 1900) : au scalaire $i(t) = I_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, on associe le nombre complexe $\underline{z}$ tel que $\underline{z} = I_M \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega \cdot t}$ avec $j = \sqrt{-1}$.

> ***Remarque :*** pour indiquer que $\underline{z}$ est un complexe, on trace un trait au-dessous. On utilise la notation j pour éviter toute confusion avec le courant i.

La dérivée $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est associée à $j\omega \cdot \underline{z}$ tandis que l'intégrale est associée à $\dfrac{\underline{z}}{j\omega}$.

L'avantage de la notation complexe réside dans le fait que :

– la dérivation est remplacée par le produit par $j\omega$ (correspond à une rotation de $+\pi/2$)

– l'intégration est remplacée par le quotient par $j\omega$ (correspond à une rotation de $-\pi/2$)

Ces opérateurs sont linéaires, ce qui sera très utile dans les équations différentielles.

3.2. Intensité efficace (effet Joule)

Définition : l'intensité efficace d'un courant variable est égale à l'intensité d'un courant continu qui dégagerait la même énergie thermique que ce courant variable en passant dans le même conducteur pendant la même durée.

L'énergie dégagée sur une période T par ce courant continu dans R vaut $W = R \cdot I_{\text{eff}}^2 \cdot T$. Celle dégagée par le courant variable $i(t)$ est $\displaystyle\int_T R \cdot i(t)^2 \cdot \mathrm{d}t$ l'intégrale étant calculée sur une période T, correspondant à la définition de $i(t)$. D'où l'expression du **carré** de l'intensité efficace :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_T i(t)^2 \cdot \mathrm{d}t$$

Exemple : pour $i(t) = 5t/T$ (périodique, défini entre $-T/2$ et $+T/2$). Alors $I_{\text{eff}} = \dfrac{I_{\text{M}}}{\sqrt{3}}$ avec $I_{\text{M}} = 5/2$ A. Le facteur $\sqrt{3}$ au dénominateur provient de l'intégration de t^2 en $t^3/3$.

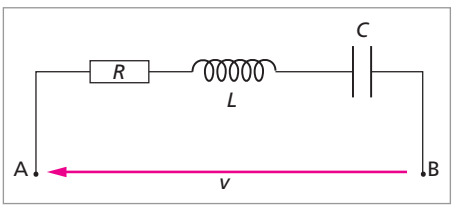
• **Cas particulier d'un courant sinusoïdal** : avec $i(t) = I_{\text{M}}.\sin(\omega t + \varphi)$, on calcule que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T \sin(\omega t)^2 \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. On en déduit le résultat « classique » :

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{M}}}{\sqrt{2}}$$

Cette expression n'est valable que pour un courant sinusoïdal.

3.3. Loi d'Ohm en régime sinusoïdal (circuit RLC série)

Soit une portion AB de circuit composée des éléments suivants placés en série : une résistance R, une bobine d'inductance L, un condensateur de capacité C. On désigne habituellement ce montage par l'expression « circuit *RLC* série » ou « circuit oscillant série ».



Soit $v(t)$ la tension aux bornes (A et B). La loi d'Ohm permet d'écrire l'équation différentielle régissant cette portion de circuit :

$$v = R \cdot i + L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i(t) \cdot \mathrm{d}t$$

En remplaçant par les quantités complexes associées :

$$\underline{v} = R \cdot \underline{i} + j\omega \cdot L \cdot \underline{i} + 1/(j\omega C) \cdot \underline{i}$$

ou encore

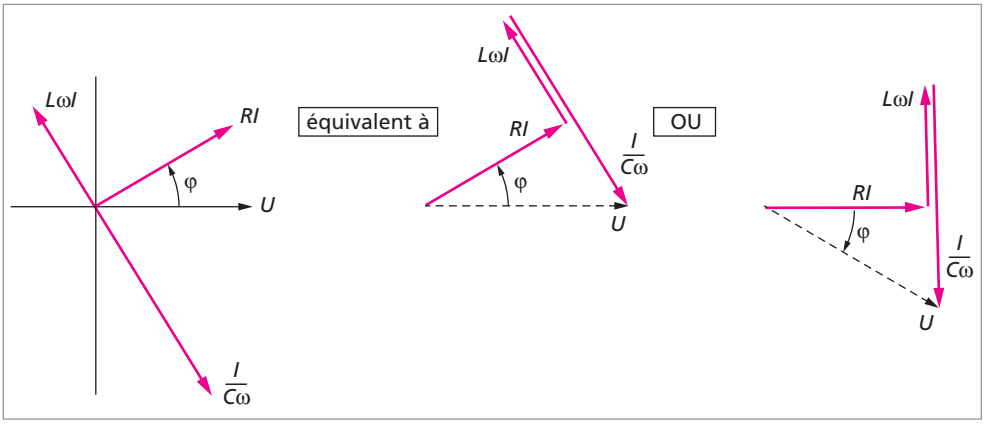
$$\underline{v} = \underline{Z} \cdot \underline{i} \qquad \text{avec} \qquad \underline{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

appelée **impédance complexe** du circuit. L'impédance (réelle) est le module Z de $\underline{Z}$:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

La loi d'Ohm s'écrit $\underline{v} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ en notation complexe, ou encore $V = Z \cdot I$ en valeurs efficaces ou maximales, mais surtout pas $v = Z \cdot i$ (en réels) car cela impliquerait que v et i soient **en phase**.

• **Diagramme de Fresnel associé au circuit *RLC* série** : on représente les trois tensions avec leur phase par rapport à une référence. Cette référence peut être soit v soit i. Ici, l'intensité étant commune à chaque composant, il peut sembler souhaitable de choisir la référence sur le courant. Mais dans le cas général, avec des circuits comportant des dérivations, l'intensité ne sera plus commune à ces éléments et il est alors préférable de choisir la référence sur la cause (la tension) plutôt que sur l'effet (le courant).
Le choix est équivalent, tout dépend de l'expression imposée comme référence des phases, de la forme $v(t) = V_M \sin(\omega.t)$ ou bien $v(t) = V_M \sin(\omega.t + \varphi)$.
Les 3 vecteurs représentant les 3 tensions ont pour module :
$U_R = RI$ pour la tension aux bornes de R ;
$U_L = L\omega I$ pour celle aux bornes de la bobine, en avance de $\pi/2$ sur U_R ;
$U_C = I/(C\omega)$ aux bornes du condensateur, en retard de $\pi/2$ sur U_R.
La somme vectorielle de ces 3 tensions conduit au vecteur « tension totale » de module U, déphasé de l'angle φ par rapport au vecteur « courant ».



Pour calculer la phase φ, on utilise, à partir de la loi d'Ohm $\underline{v} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$, la relation sur les arguments :

$$\arg(\underline{v}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{i})$$

– Si la référence des phases est le courant, alors $\arg(\underline{i}) = 0$ et $\varphi = \arg(\underline{v}) = \arg(\underline{Z})$, c'est-à-dire tel que :

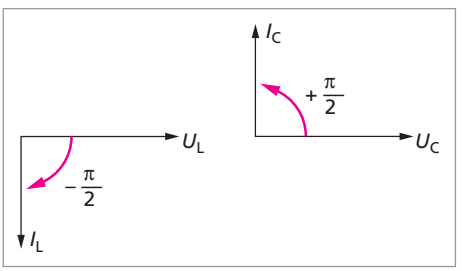
$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

ou encore

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

– Inversement, si la référence des phases est la tension, alors $\arg(\underline{v}) = 0$ et $\varphi = \arg(\underline{i}) = -\arg(\underline{Z})$ c'est-à-dire tel que $\tan\varphi = -\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$ (noter le signe moins). La relation $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ est toujours valable.

• Cas particuliers

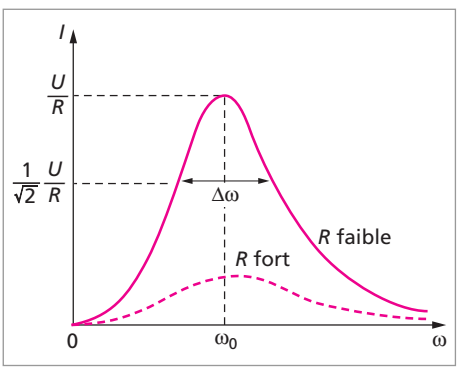


– *Résistance R seule* : dans ce cas, v et i sont **en phase** et on peut écrire la loi d'Ohm de trois façons différentes : $v = R \cdot i$ (en réels) ou $\underline{v} = R \cdot \underline{i}$ (en complexes) ou $V = R \cdot I$ (en valeurs efficaces) ;

– *Bobine seule d'inductance L* : le courant i_L circulant est en retard de $\pi/2$ sur U_L

– *Condensateur seul de capacité C* : le courant i_C circulant est en avance de $\pi/2$ sur U_C .

Résonance : l'impédance Z est **minimale** (et égale à R) quand la pulsation est égale à ω_0 telle que $L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0} = 0$ c'est-à-dire quand on a $LC\omega_0^2 = 1$ (condition de résonance pour la pulsation ω_0). Dans ce cas, v et i sont **en phase** (car $\varphi = 0$). L'intensité est **maximale** et vaut U/R.



L'**acuité** de la résonance traduit la qualité de l'échange d'énergie entre le condensateur et la bobine à chaque alternance (couplage électromagnétique). L'acuité se caractérise par le rapport $\dfrac{\Delta f}{f_0}$ $\left(= \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$, où Δf est la « largeur » (en échelle de fréquence) du pic de résonance

à la hauteur $\frac{U}{R\sqrt{2}}$. De plus,

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q} = \frac{R}{L\omega_0}$$

où Q est le **facteur de qualité** du circuit oscillant :

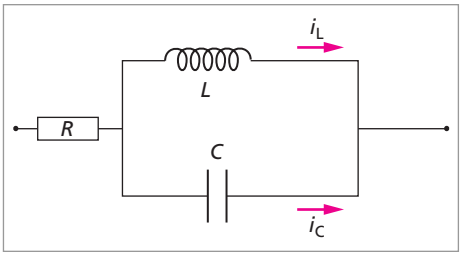
$$Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Si R croît, le pic s'élargit et sa hauteur diminue : la résonance est moins aiguë.

Remarque : on note que les termes $RC\omega$ et $L\omega/R$ sont sans dimension.

• **Surtension à la résonance :** il est facile de voir qu'à la résonance, les tensions aux bornes de la bobine (U_L) et aux bornes du condensateur (U_C) sont égales en module et de plus, sont supérieures à la tension U car on a alors $U_L = U_C = Q.U$ (avec $Q > 1$, facteur de qualité).

3.4. Circuit oscillant « parallèle » (circuit bouchon)



Il est constitué d'une bobine et d'un condensateur en dérivation. Lors de chaque alternance, il y a échange d'énergie entre les deux composants (L et C), les courants i_L et i_C étant en opposition de phase lors de l'**antirésonance** à la pulsation ω_0 définie par $LC{\omega_0}^2 = 1$ (ou $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$). Dans ce cas, l'impédance est maximale et l'intensité du courant circulant dans R est *minimale*, voire nulle : $i(\omega_0) = 0$. Un tel circuit ne laisse donc pas passer le courant de fréquence $\omega_0/2\pi$: c'est un circuit « bouchon » utilisé comme **filtre coupe-bande** autour de cette fréquence.

Remarque : lors de l'antirésonance, on a généralement une forte intensité dans chaque branche. Par exemple 10 A dans la bobine, et 10 A dans le condensateur, mais rien dans le circuit principal, car ces deux courants étant en opposition de phase, on a $10 + (-10) = 0$.

3.5. Puissance en régime sinusoïdal

Par définition, la **puissance instantanée** $p(t)$ vaut :

$$p(t) = u(t).i(t)$$

En notation complexe,

$$\underline{p} = \frac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{i^*}$$

où $\underline{i^*}$ est le complexe conjugué de $\underline{i}$.
La **puissance moyenne** sur une période est :

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi$$

Le terme $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ est appelé **facteur de puissance**. La puissance s'exprime en watts (W) ou en volts-ampères (V.A).
Calcul des énergies mises en jeu :

– dans une résistance (effet Joule) :

$$\mathrm{d}W_R = Ri^2\mathrm{d}t$$

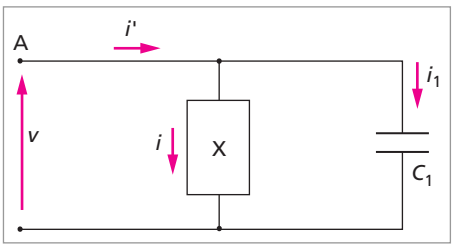
– dans une bobine (énergie électromagnétique) :

$$\mathrm{d}W_L = Li\mathrm{d}i$$

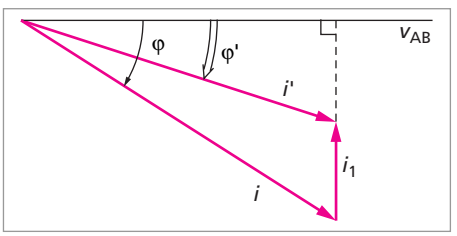
– dans un condensateur (énergie électrostatique) :

$$\mathrm{d}W_C = \frac{1}{C}q\mathrm{d}q$$

• **Relever le facteur de puissance :** les pertes relatives d'énergie (effet Joule) sont inversement proportionnelles à $(U.\cos\varphi)^2$. Afin de les diminuer, on a intérêt soit à augmenter la tension U, soit à diminuer $|\varphi|$ donc à augmenter (ou « relever ») le facteur de puissance. Pour cela, on place un condensateur **en dérivation** sur l'appareil X (récepteur quelconque).



Le courant i_1 dans le condensateur est en quadrature avance sur v et $i' = i + i_1$ d'où $I'.\sin\varphi' = I.\sin\varphi - I_1$ avec $I_1 = U.C_1.\omega$
Si on veut imposer $\varphi' = 0$, il faut placer en dérivation sur le récepteur X un condensateur de capacité $C_0 = \dfrac{I.\sin\varphi}{U.\omega}$.



4. Les régimes variables

Dans cette partie, on néglige le délai de transmission du signal dans l'ensemble du circuit (à la vitesse c). C'est l'approximation dite AEQS (Approximation des États Quasi-Stationnaires) ou ARQP (Approximation des Régimes Quasi-Permanents).
Dans un circuit à une seule maille fermée, l'intensité est la même en tout point du circuit.

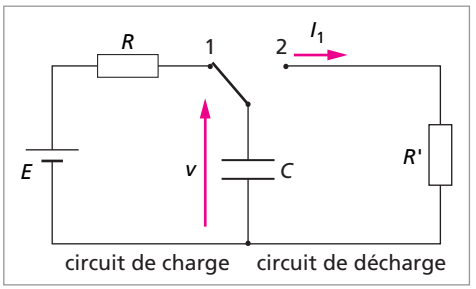
4.1. Régime transitoire avec *R*, *L* ou *C*

La loi d'Ohm s'écrit en **valeur instantanée** (petites lettres i et u et non pas I ou U). La ddp aux bornes d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L ou d'un condensateur de capacité C s'écrivent respectivement :

$$u_R = Ri \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad u_C = \frac{1}{C}\int i.\mathrm{d}t$$

4.2. Charge et décharge d'un condensateur

Soit v la tension aux bornes du condensateur. On le charge à travers une résistance R puis on le décharge à travers la résistance R'. On a ici un interrupteur à 2 positions (1 pour la charge, et 2 pour la décharge).



• **Charge de *C* à travers *R*** : on a

$$E = Ri + v \qquad v = q/C \qquad i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$$

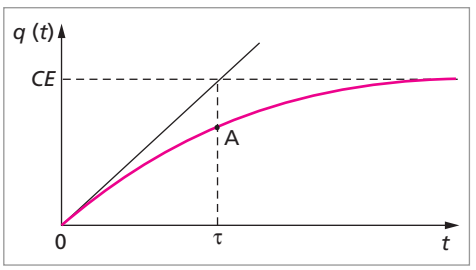
On tire l'équation différentielle du circuit :

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = E$$

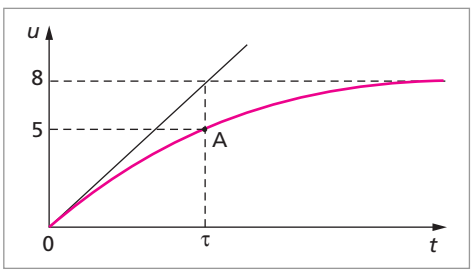
avec la condition initiale $q(0) = 0$. La résolution donne :

$$q(t) = C.E.\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

avec $\tau = RC$ (constante de temps du circuit de charge)



La tangente à l'origine a une pente E/R. Elle coupe l'asymptote (CE) en $t = \tau$.



• **Méthode des 5/8 :** on calcule $q(\tau) = CE.(1 - 1/e) = CE.0{,}6321$ tandis que $5/8 = 0{,}625$. On « confond » ces deux valeurs pour déterminer expérimentalement la constante de temps avec un oscilloscope : on dilate l'amplificateur vertical de

manière à placer la variation de u_C sur 8 « carreaux » de l'écran (entre 0 et CE). Le point A de la courbe situé à 5 carreaux a pour abscisse $t_A = \tau$. La précision de la méthode est de 1,1 % (car $\dfrac{0{,}632 - 0{,}625}{0{,}632} = 0{,}011$).

La charge totale Q_{max} sera atteinte à 1 % près quand l'**écart relatif** sera égal à 1 %, après l'instant t_1 défini par :

$$\frac{Q_{max} - q(t_1)}{Q_{max}} = \frac{1}{100}.$$

De $Q_{max} = CE$, on tire $\exp(-t_1/\tau) = 1/100$ soit $t_1 = \tau.\ell n(100)$ ou $t_1 \approx 4{,}6\tau$.

On peut retenir qu'après 5τ, le condensateur est chargé à 99 % ; après 7τ, c'est à 99, 9 %.

• **Décharge de C dans R'** : on a

$v = q/C = R'i$

$i = -\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ (signe − car décharge)

On en déduit l'équation différentielle du circuit :

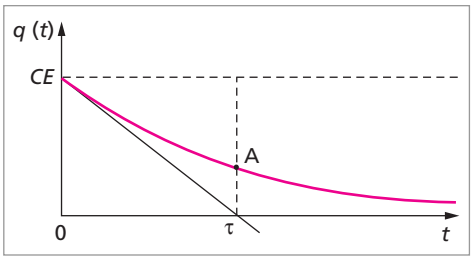
$$R'\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0$$

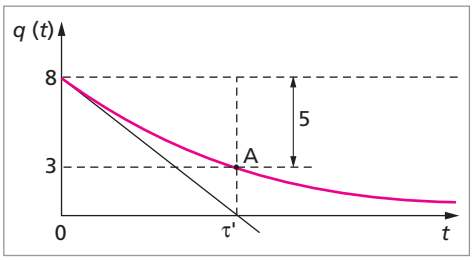
avec la condition initiale $q(0) = C.E$. La résolution donne :

$$q(t) = CE.\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right]$$

avec $\tau' = R'C$ (constante de temps du circuit de décharge).

La méthode des 5/8 devient ici celle des 3/8 (car $3 = 8 - 5$).





4.3. Courant transitoire dans une bobine

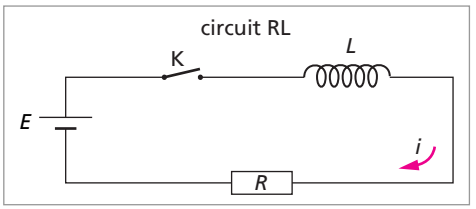
La loi de LENZ (1833) indique que la f.e.m. induite aux bornes de la bobine tend à s'opposer au courant variable qui la crée :

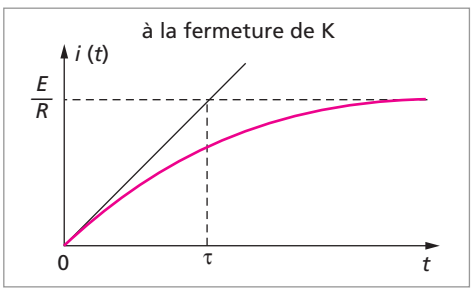
$$e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Lors de la fermeture du circuit (interrupteur K), l'intensité i ne varie pas instantanément de 0 à la valeur constante $I = E/R$ mais croît de façon exponentielle :

$$i(t) = \frac{E}{R}.\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \text{ avec } \tau = R/L$$

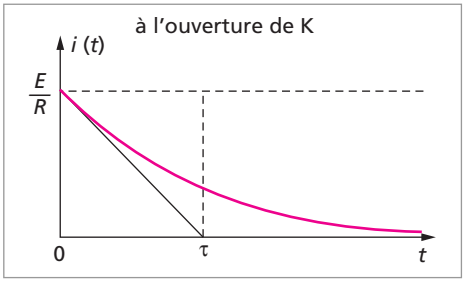
(constante de temps du circuit). Cela peut produire un arc électrique (étincelle).





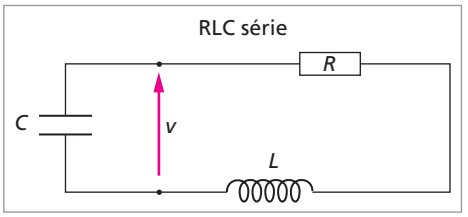
De même lors de l'ouverture, l'intensité ne varie pas instantanément de la valeur constante $I = E/R$ à la valeur 0 mais décroît de façon exponentielle :

$$i(t) = \frac{E}{R}.\left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$



4.4. Décharge d'un condensateur dans une bobine (*RLC* série)

Le condensateur initialement chargé $q(0) = CE$ se décharge dans la bobine inductive. Soit v la tension aux bornes du condensateur.



On a

$$v = Ri - e$$

$$v = q/C$$

avec $e = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = -\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$,

On obtient l'équation différentielle en $q(t)$:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0$$

C'est une équation du 2e ordre, linéaire à coefficients constants. On cherche une solution de la forme $q(t) = A\exp(x.t)$; L'équation caractéristique associée s'écrit :

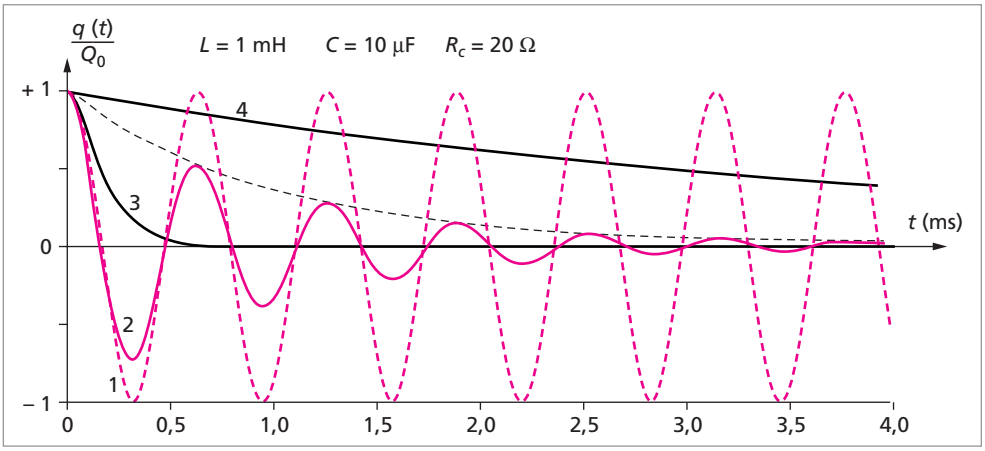
$$Lx^2 + Rx + 1/C = 0$$

C'est une équation du 2e degré en x. Le discriminant vaut :

$$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$$

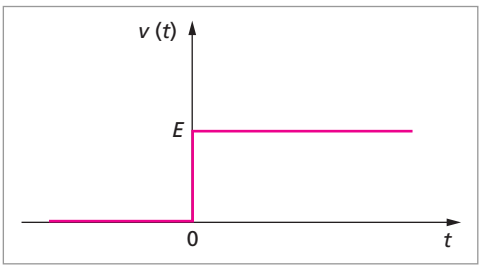
Le régime du circuit dépend du signe de Δ qui varie selon la valeur de R (terme de **dissipation** d'énergie, ou d'**amortissement**).

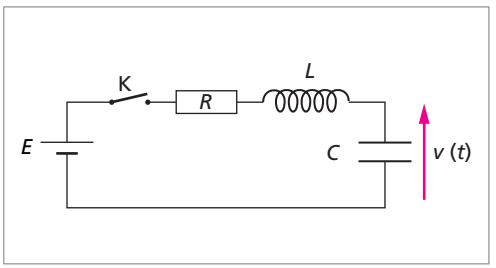
- $R = 0$: c'est le **régime oscillant**, sinusoïdal à la pulsation $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$;
- R « faible » ($< \sqrt{4L/C}$) : alors $\Delta < 0$, c'est le régime **pseudosinusoïdal** (amorti en exponentielle) à la pulsation $\omega < \omega_0$;
- R « critique » ($= \sqrt{4L/C}$) : alors $\Delta = 0$, c'est le régime **critique** ;
- R « grand » ($> \sqrt{4L/C}$) : alors $\Delta > 0$, c'est le régime **apériodique** (fortement amorti).



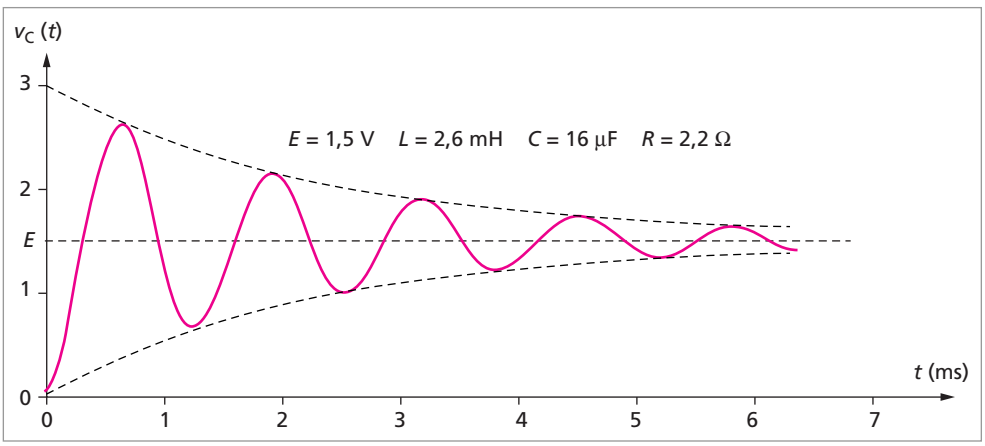
Le graphique ci-dessus représente le rapport $q(t)/Q_0$ en fonction du temps pour les 4 cas précédents, selon la valeur de la résistance du circuit.

Remarque : la charge à partir d'une tension échelon ($v(t) = 0$ si $t < 0$; $v(t) = E$ si $t \geqslant 0$) se traite de la même manière.





L'équation différentielle est alors : $L.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R.i + \dfrac{1}{C}.\int i.\mathrm{d}t = E$

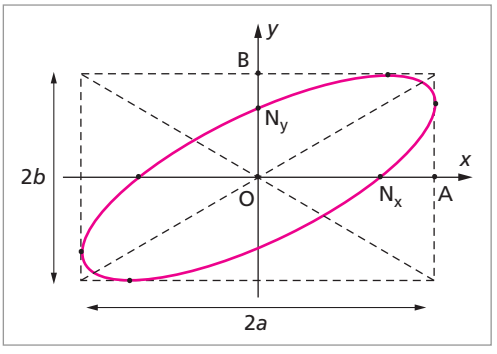


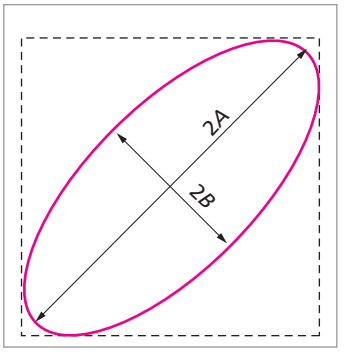
5. Mesure de déphasage à l'oscilloscope

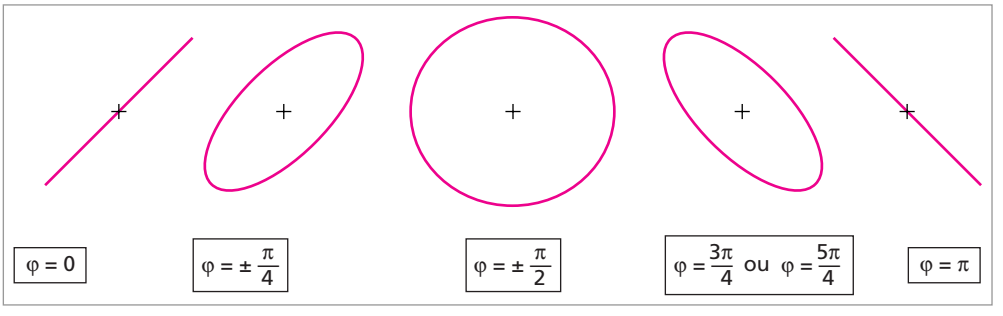
Soient deux signaux (tensions ou intensités) de **même** fréquence sur les voies X et Y de l'oscilloscope (ne pas dire « oscillo ») : $x = a.\cos(\omega.t)$ et $y = b.\cos(\omega.t - \varphi)$ avec φ compris entre 0 et π. On choisit (ici) la référence des phases sur le signal $x(t)$.
Sur l'écran, la composition des signaux donne une **ellipse** inscrite dans un rectangle de côtés $2a$ et $2b$ (les axes de cette ellipse ne sont pas perpendiculaires). Le déphasage φ est déterminé par les rapports des longueurs des segments sur l'écran :

$$\sin\varphi = \frac{ON_x}{OA} = \frac{ON_y}{OB}$$

(remarquer que c'est sin φ dans les deux cas).







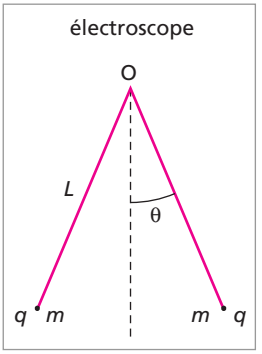
En décalibrant les amplificateurs, on peut inscrire l'ellipse dans un **carré** : les 2 axes de l'ellipse sont alors perpendiculaires et mesurent $2A$ et $2B$ d'où : $\tan(\varphi/2) = \frac{B}{A}$ (ici, on a $\varphi/2$).

ÉNONCÉS

Charges électriques, condensateurs

Exercice 1 Électroscope

Un électroscope est constitué de deux petites billes de liège de masse $m = 1$ g chacune, suspendues à un point fixe par des fils de longueur $L = 10$ cm. Elles portent chacune la même charge q.
Déterminer l'angle θ que font les deux fils avec la verticale quand l'équilibre est atteint.
A.N. $q = 2.10^{-8}$ C ; $q = 100.10^{-8}$ C ;
$q = -30.10^{-8}$ C.



Calculs de résistances

Exercice 2 Vitesse de déplacement des électrons

1. Un conducteur en cuivre est parcouru par un courant électrique de densité constante $j = 1$ A/mm^2. En supposant que chaque atome de cuivre (Cu = 64) possède en moyenne 1,4 électron mobile, calculer la vitesse de déplacement des électrons dans ce conducteur. Quelle doit être la densité de courant pour que cette vitesse soit de 1 mm/s ?
Quelques valeurs utiles : $\rho = 9$ g/cm^3, $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ atomes/mol, $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $\sigma = 6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

2. Le cuivre étant un milieu linéaire et isotrope, établir la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma.\vec{E}$

3. En régime non permanent, établir l'équation différentielle du mouvement d'un électron.

4. On coupe brusquement le champ électrique à l'instant t_o. Étudier la loi $v(t)$ pour $t > t_o$. Après quelle durée la vitesse est-elle divisée par e = 2,718... puis par e^2 ?

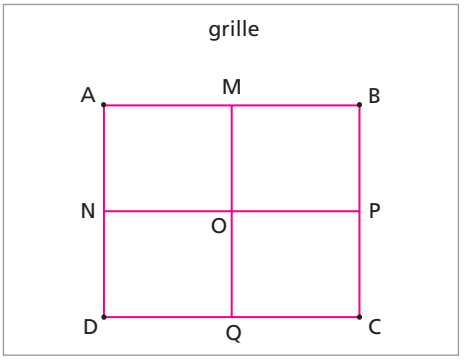
Exercice 3 Calculs de résistances

1. Calculer la résistance électrique d'un *conducteur tronconique* de longueur $L = 1$ km, de rayons de bases circulaires $r_1 = 0{,}9$ mm et $r_2 = 1$ mm, et de résistivité $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$.m.

2. Un *anneau plat* d'épaisseur $e = 1$ cm est fabriqué dans un matériau de résistivité ρ. On maintient une différence de potentiel U entre les surfaces cylindriques (intérieure et extérieure) de l'anneau, de rayons respectifs a et b. Calculer sa résistance électrique R.
A.N. $\rho = 1\ \Omega$.m et $b/a = 10$.

Exercice 4 Résistances équivalentes

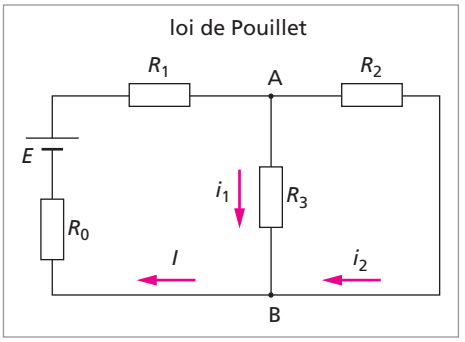
On considère une *grille* formée de 4 carrés, dont les côtés ont chacun pour résistance électrique r. En utilisant judicieusement les symétries physiques, calculer (en fonction de r) la résistance R de la grille quand on réalise les branchements électriques entre A et C. De même pour AO, puis MQ.



Lois d'Ohm et de Pouillet

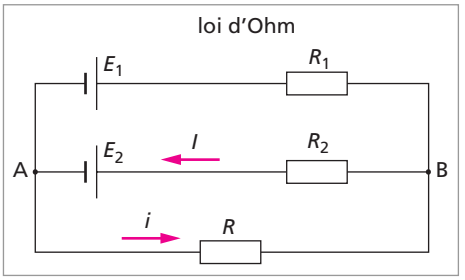
Exercice 5 Loi de Pouillet

Dans le circuit de la figure ci-contre, calculer les courants I, i_1, i_2 dans chacune des branches avec les valeurs suivantes : $E = 5$ V, $r_0 = 0{,}1\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.



Exercice 6 Loi d'Ohm

Calculer les courants dans les brins du circuit de la figure ci-contre contenant des générateurs de résistance interne négligeable, avec les valeurs suivantes : $E_1 = 1{,}5$ V, $E_2 = 3{,}7$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ et $R = 5\ \Omega$. Trouver une condition sur E_1, E_2, R_1 et R_2 pour que le courant passant dans R soit nul.



Loi de Joule

Exercice 7 Ligne de transport

Une ligne de transport d'énergie électrique est constituée de deux câbles cylindriques. Pour éviter un échauffement important, on limite la densité de courant à la valeur J_o.

1. Soit U la tension du générateur (supposé idéal) qui alimente la ligne en fournissant la puissance P ; soit P' la puissance reçue par l'utilisateur. Calculer les pertes par effet Joule

lors du transport d'énergie en fonction de U, de J_o, de la longueur L de la ligne et de la résistivité ρ du matériau de section s.

2. En déduire le rendement du transport. Conclure.
A.N. $\rho = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ω.m, $J_o = 1$ A/mm^2, $U = 540$ kV, $L = 100$ km, $P = 500$ MW.

Exercice 8 Fil non thermiquement isolé

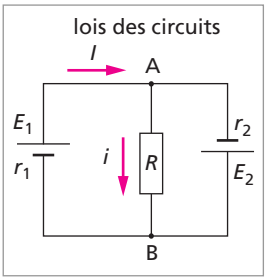
Un fil non thermiquement isolé est parcouru par un courant d'intensité I constante. Il dissipe de l'énergie thermique par sa surface latérale suivant la loi de Newton : « la puissance perdue P est proportionnelle à l'écart de température $(\theta - \theta_o)$ avec le milieu ambiant, et à la surface latérale S du matériau », ou encore $P = k.S.(\theta - \theta_o)$. On suppose que la résistivité ρ du matériau reste constante quand la température varie.

1. En écrivant le bilan thermique, établir l'équation différentielle reliant la température θ du fil et le temps t.

2. En déduire la température d'équilibre θ_m du fil.
A.N. Le fil mesure 1 m de long, a un diamètre de 0,1 mm, sa résistivité vaut $\rho = 10 \cdot 10^{-8}$ Ω.m, sa masse volumique est $\mu = 9$ g/cm^3, la chaleur massique est $c = 420$ J/kg.K ; $\theta_o = 20$ °C, la constante k vaut $1/400$ (W/K · cm^2) et on soumet le fil à une différence de potentiel $U = 1$ V.

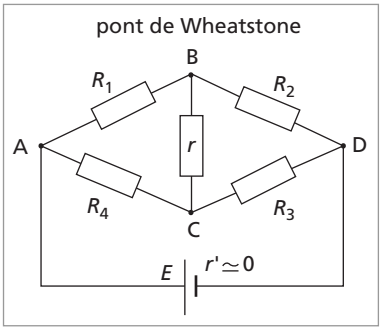
Lois des circuits

Exercice 9 Lois des circuits



Les éléments du circuit de la figure ci-contre ont pour caractéristiques $E_1 = 8$ V, $E_2 = 3$ V, $r_1 = 2$ Ω, $r_2 = 3{,}5$ Ω et $R = 10$ Ω.
Calculer les intensités circulant dans les différentes branches en utilisant d'abord les lois de Kirchhoff, puis le théorème de superposition, et enfin le théorème de Thévenin.

Exercice 10 Pont de Wheatstone



Le circuit de la figure ci-contre est alimenté par un générateur de résistance interne $r' \approx 0$ et de f.e.m. E.
Calculer le courant i circulant dans le brin central BC, de résistance r, en utilisant le théorème de Thévenin. Établir la condition d'équilibre du pont, c'est-à-dire la condition portant sur les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 pour que ce courant i soit nul.

Exercice 11 Galvanomètre

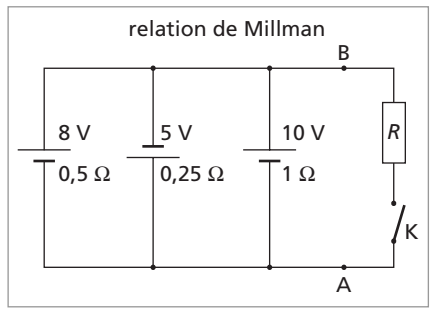
On dispose d'un galvanomètre de résistance interne $g = 24\ \Omega$ pouvant mesurer des intensités j inférieures à 20 µA. Avec cet appareil, on veut fabriquer un ampèremètre capable de mesurer des courants d'intensité 10 mA et un voltmètre utilisable jusqu'à 100 mV. Comment peut-on s'y prendre ? Calculer les résistances nécessaires et indiquer un schéma de montage possible.

Exercice 12 Circuit tétraédrique

Dans un circuit tétraédrique régulier, chaque face est un triangle équilatéral et chacun des 6 brins possède une résistance électrique r. Calculer la résistance équivalente R entre deux sommets.

Exercice 13 Relation de Millman

Entre deux bornes A et B, on branche N dipôles électrocinétiques en parallèle et le dipôle n°k (entier de 1 à N) est caractérisé par sa f.e.m. e_k (pouvant être nulle) et sa résistance interne $r_k = 1/g_k$.



1. Établir la relation de Millman :

$$V_A - V_B = U_{AB} = -\frac{\sum_k (g_k.e_k)}{\sum_k g_k}$$

2. Application au circuit de la figure ci-dessus : calculer $V_A - V_B$ quand l'interrupteur K est ouvert, puis le courant I circulant dans $R = 2\ \Omega$ quand K est fermé.

3. Retrouver ce résultat (calcul de I) par le théorème de Thévenin.

Régimes transitoires et régimes sinusoïdaux.

Exercice 14 Puissance électrique

Un circuit, alimenté par une source de tension continue E, contient *en série* une résistance R et un condensateur de capacité C. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. Calculer la tension v_C aux bornes du condensateur en fonction du temps t.

2. Calculer le courant $i(t)$ et la tension v_R aux bornes de la résistance.

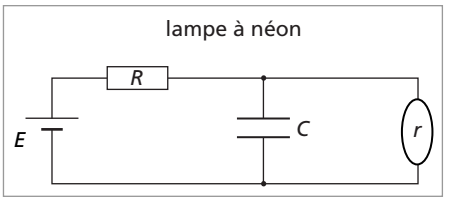
3. En déduire la puissance stockée dans le condensateur $P_c(t)$. Montrer qu'elle passe par un maximum à un certain instant à déterminer. Tracer sa courbe d'évolution.

Exercice 15 Lampe à néon

Une source de tension continue (de f.e.m. E constante) alimente un circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R en série. On place une lampe à néon en dérivation sur le condensateur. La lampe à néon possède les caractéristiques suivantes :
– quand la lampe est éteinte, sa résistance est supposée infinie et quand elle est allumée, sa résistance r est faible, mais non nulle,
– quand la tension V croît entre ses bornes, la lampe ne s'allume que pour une tension supérieure (ou égale) à la valeur caractéristique V_a, et quand la tension V décroît, la lampe ne s'éteint que pour une tension inférieure (ou égale) à la valeur V_e (et $V_e < V_a < E$).

1. Montrer que la lampe s'allume et s'éteint périodiquement.

2. Si r est négligeable devant R, calculer la période T de ce phénomène (oscillations de relaxation).
A.N. $E = 110$ V, $R = 20 \cdot 10^6$ Ω, $C = 0{,}35$ μF, $V_e = 70$ V et $V_a = 80$ V.



Exercice 16 Intensité efficace

1. Calculer l'intensité efficace du courant de période T représenté par $i(t) = (2a/T).t$ sur l'intervalle $(-T/2, +T/2)$ où a est une constante positive (courant en « dents de scie »). En déduire l'énergie moyenne (sur un nombre entier de périodes) dépensée dans une résistance R.

2. On considère le courant *variable* défini (en ampères) par $i\,(t) = 3 + 2\cos(\omega t - \pi/4)$. Dessiner le vecteur de Fresnel associé et donner son expression mathématique complexe (avec $j^2 = -1$). Représenter graphiquement ce courant. En déduire son intensité efficace.

Exercice 17 Circuit RLC série

On dispose d'une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 100$ V et de fréquence 50 Hz, ainsi que d'une résistance inductive ($R = 10$ Ω, $L = 0{,}3$ H) et d'un condensateur ($C = 20$ μF).

1. Calculer l'intensité efficace et l'avance de phase du courant quand on applique la tension dans les 4 cas suivants : aux bornes du condensateur, aux bornes de la bobine, aux bornes du condensateur et de la bobine placés en série, aux bornes du condensateur et de la bobine placés en dérivation.

2. Mêmes calculs pour la fréquence 65 Hz. Dans le quatrième montage, calculer la fréquence pour laquelle l'intensité et la tension sont en phase.

Exercice 18 Pont de Wheatstone en sinusoïdal

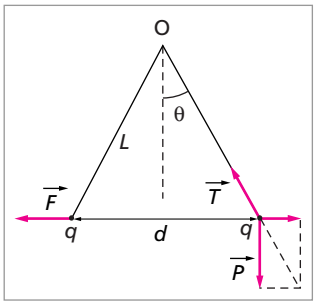
Un pont de Wheatstone, alimenté par une tension sinusoïdale U, contient deux résistances R et R' sur deux branches opposées, un condensateur de capacité C sur une troisième branche, et, sur la quatrième, une bobine inductive de résistance x et de coefficient de self-induction L.

1. Montrer que l'équilibre du pont n'est réalisable que si $x = 0$. Quelle relation existe alors entre L, C, R et R' ?

2. Montrer que si x n'est pas nul, on peut toutefois obtenir l'équilibre du pont en shuntant le condensateur avec une résistance r que l'on calculera.

SOLUTIONS

1 Les charges sont de même signe : il y a répulsion (loi de Coulomb). Les masses sont soumises à 3 forces : le poids ($P = mg$), la tension des fils (T) et la force électrostatique ($F = k.q^2/d^2$) avec $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. À l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$, ce qui s'écrit :



$$F/P = \tan(\theta) \quad \text{avec } d = 2L.\sin(\theta).$$

D'où l'équation en θ :

$$\sin^2\theta.\tan\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q^2}{4L^2mg}$$

C'est une équation non algébrique de la forme $\sin^2\theta.\tan\theta = A$ que l'on résout graphiquement ou numériquement (par approximations successives). La fonction $y(\theta) = \sin^2\theta.\tan\theta$ est une fonction croissante de θ (car produit de 2 fonctions croissantes).
Si $A \ll 1$, on a aussi $y(\theta) \ll 1$ or $y(\theta) \approx \theta^3$, d'où $\theta \approx \sqrt[3]{A}$.
Si $A \gg 1$, alors $\theta \approx \pi/2$, car $\sin(\theta)$ est limité par 1.
Sinon, on résout numériquement par approximations successives.

1. $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C, d'où $A = 9{,}2 \cdot 10^{-3} \ll 1$ et $\theta \approx \sqrt[3]{A} \approx 0{,}21$ rad $\approx 12°$

2. $q = 100 \cdot 10^{-8}$ C, d'où $A = 22{,}9$. C'est « presque grand » devant 1, et $\theta \approx \pi/2$. On peut affiner ce résultat : on part de θ_1 tel que $\tan(\theta_1) = A/1$ d'où $\theta_1 = 87{,}5°$; puis θ_2 tel que $\tan(\theta_2) = A/\sin^2(\theta_1)$ d'où $\theta_2 = 87{,}51°$, la convergence est rapide.

3. $q = -30 \cdot 10^{-8}$ C : les charges se repoussent avec $A = 2{,}06$. Comme A est supérieur à 1, on peut supposer $\theta > 45°$. On part de θ_1 tel que $\tan(\theta_1) = A/1$ d'où $\theta_1 = 64{,}1°$; puis θ_2 tel que $\tan(\theta_2) = A/\sin^2(\theta_1)$ d'où $\theta_2 = 68{,}8°$; puis θ_3 tel que $\tan(\theta_3) = A/\sin^2(\theta_2)$ d'où $\theta_3 = 67{,}1°$. Le processus converge rapidement vers $\theta = 67{,}5°$.
En fait, si la charge q est faible, θ l'est aussi ; l'appareil sert à déterminer q par la mesure de θ avec $q \approx \theta^{\frac{3}{2}}$.

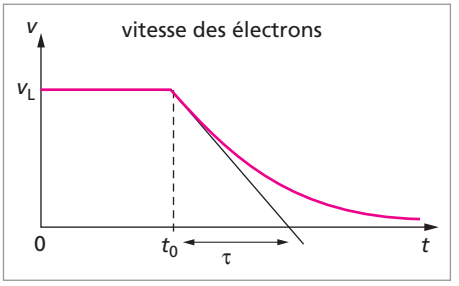
2 **1.** La densité de courant est $j = nqv$ avec $n = 1{,}4.\rho.N_A/M$ (en C/m^3) et $j = 10^6$ A/m^2 ; d'où $v = j/nq = 0{,}05$ mm/s. On a bien $v \ll c$.
Puisque j et v sont proportionnels, la densité de courant doit être de 20 A/mm^2 pour entraîner les électrons à la vitesse de 1 mm/s.

2. Loi d'Ohm : si un électron n'était soumis qu'à la force électrique $\vec{F} = q.\vec{E}$, sa vitesse croîtrait indéfiniment (accélération constante). Il y a donc une force antagoniste de freinage, proportionnelle à la vitesse, telle que $\sum \vec{F} = \vec{0}$ soit $q.\vec{E} - k.\vec{v} = \vec{0}$. Or $\vec{j} = nq.\vec{v}$ d'où $\vec{j} = \frac{nq^2}{k}.\vec{E} = \sigma.\vec{E}$. C'est la loi d'Ohm locale.

3. Régime transitoire :

$$m.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + k.\vec{v} = q.\vec{E}$$

d'où la vitesse limite $v_L = q.E/k$



4. On coupe le circuit à t_0, l'équation devient :

$$m.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + k.\vec{v} = \vec{0}$$

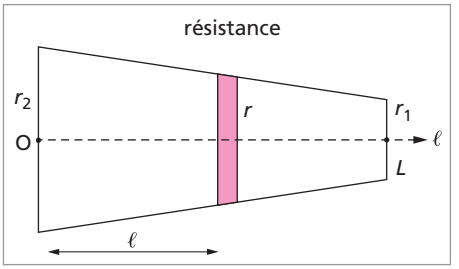
dont la solution est :

$$\text{pour } t > t_o, \quad v(t) = v_L.\exp(-t/\tau)$$

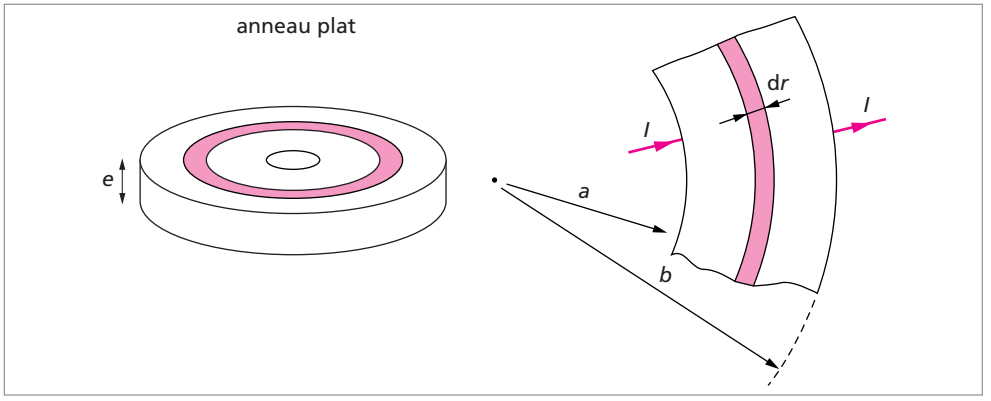
avec $\tau = m/k = 2 \cdot 10^{-14}$ s. Soit $v(\tau) = v_L/e$ et $v(2\tau) = v_L/e^2$. L'électron s'arrête quasi instantanément.

3 Les conducteurs envisagés n'ont pas une forme cylindrique. On ne peut donc pas appliquer la relation $R = \rho L/S$.

1. On calcule la résistance du tronc de cône en le « découpant » en rondelles (comme un saucisson) d'épaisseur infinitésimale dL placées « en série ». Considérons la tranche de rayon r, située à la distance ℓ de l'extrémité de rayon r_2 : elle a une forme cylindrique et sa résistance élémentaire vaut $\mathrm{d}R = \rho.\mathrm{d}L/S$ avec la relation $\mathrm{d}L/\mathrm{d}r = L/(r_2 - r_1)$ (théorème de Thalès). Ces rondelles étant en série, la résistance totale vaut la somme :



$$R = \int \mathrm{d}R = \frac{\rho L}{\pi r_1.r_2} = 6\ \Omega.$$

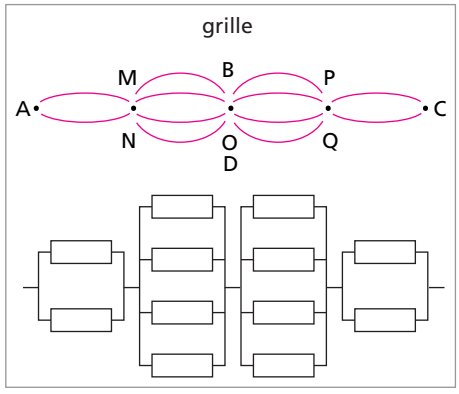


2. On décompose l'anneau plat en couches cylindriques de rayon r d'épaisseur infinitésimale, placées en série de façon radiale : la longueur traversée par le courant est dr, la section traversée est $S = 2\pi r.e$. La résistance élémentaire vaut $\mathrm{d}R = \rho.\mathrm{d}r/S$. Ces éléments étant en série :

$$R = \int_a^b \mathrm{d}R = \frac{\rho}{2\pi.e}.\ell\mathrm{n}\left(\frac{b}{a}\right) = 37\ \Omega.$$

4 En utilisant les symétries géométriques, donc physiques, on cherche les points qui sont au même potentiel.

1. Pour le branchement AC : M et N sont au même potentiel, ainsi que B, O, D puis en 3e lieu, P et Q. Le circuit se redessine donc ainsi :



$$R_{AC} = r/2 + r/4 + r/4 + r/2$$

soit

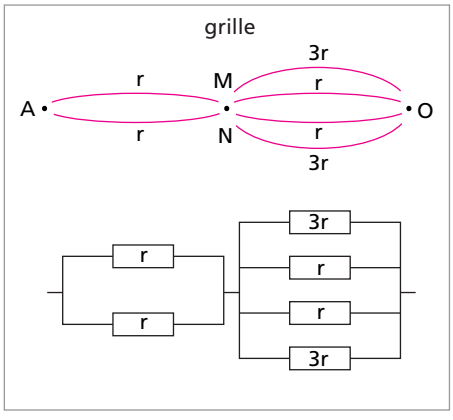
$$R_{AC} = 3r/2$$

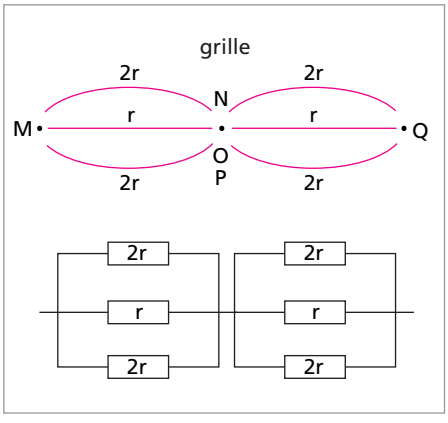
2. Pour le branchement AO : M et N sont au même potentiel, ainsi que P et Q. Il ne passe donc aucun courant dans la branche PCQ. Entre M (ou N) et O, on a en dérivation : r, $3r$, $3r$ et r ce qui donne :

$$1/R_{MO} = 1/r + 1/3r + 1/3r + 1/r$$

d'où $R_{MO} = 3r/8$ et $R_{AO} = 7r/8$.

3. Pour le branchement MQ : les points O, P et N sont au même potentiel ; $R_{MQ} = r$.





5 Il faut calculer d'abord le courant principal :

$$I = \frac{E}{\sum R} \quad \text{avec} \quad \sum R = r_0 + R_1 + R_{23}$$

où R_{23} est la résistance équivalente à R_2 et R_3 en dérivation :

$$R_{23} = \frac{R_2.R_3}{R_2 + R_3}$$

Puis la différence de potentiel entre A et B s'écrit :

$$R_2.i_2 = R_3.i_1 \quad \text{avec} \quad I = i_1 + i_2$$

D'où $I = 5/2{,}3 \approx 2{,}2$ A ; $i_1 = 2/2{,}3 \approx 0{,}9$ A ; $i_2 = 3/2{,}3 \approx 1{,}3$ A.

6 On écrit 3 fois la loi d'Ohm entre les points A et B en passant par chaque branche. Le courant $I - i$ circule dans la résistance R_1 donc : $V_A - V_B = R_1.(I - i) - E_1$; puis $V_A - V_B = R_2.(-I) - (-E_2)$; et enfin $V_A - V_B = R.i$.
On remplace par les valeurs numériques et le système de 2 équations à 2 inconnues conduit à $I = 0{,}18$ A et $i = 0{,}02$ A.
Le courant i est nul si A et B sont au même potentiel, ce qui a lieu si $E_1/R_1 = E_2/R_2$.

7 **1.** Les pertes thermiques sont $p = R.I^2$ avec $R = \rho.2L/s$ et $I = J_o.s = P/U$ d'où

$$p = 2\rho L J_o^2 s$$

Pour $P = 500$ MW, on trouve $p = 3{,}3$ MW. Il faut se rappeler que $1\ \text{A/mm}^2 = 10^6\ \text{A/m}^2$.

2. Le rendement se définit par le rapport de ce qui arrive en bout de ligne ($P' = P - p$) à ce qui est produit au départ (P) :

$$\eta = P'/P = (P - rI^2)/P$$

avec $P = U.I$ d'où

$$\eta = 1 - 2\rho L J_o/U = 0{,}993$$

On peut augmenter le rendement en augmentant la tension de transport (très haute tension à 400 kV). On ne dépasse pas 800 kV à cause du champ disruptif de l'air (tension de claquage de l'air isolant entre les câbles et le sol).

8 **1.** Le bilan d'énergie pendant la durée élémentaire dt conduit à écrire que l'apport électrique ($RI^2.dt$) permet de chauffer le fil ($m.c.d\theta$) puis se dissipe par la paroi latérale ($k.S.(\theta - \theta_o).dt$) soit :

$$RI^2.dt = m.c.d\theta + k.S.(\theta - \theta_o).dt$$

ou, en divisant par dt :

$$m.c.d\theta/dt = (RI^2 - k.S.(\theta - \theta_o))$$

2. À l'équilibre thermique, la température n'évolue plus :

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$$

d'où

$$\theta_m - \theta_o = RI^2/(kS)$$

Si r est le rayon du fil, la section est $s = \pi r^2$. La résistance vaut $R = \rho L/s$. La masse est $m = \mu.s.L$ et S est la surface latérale $S = 2\pi r.L$. On trouve successivement : $R = 12{,}7\ \Omega$; $I = 79$ mA puis enfin $\theta_m - \theta_o = 10$ K (ou 10 °C).

9 **CONSEIL : cet exercice important à bien connaître présente les méthodes à utiliser dans l'étude des circuits. Ici, la méthode des lois de Kirchhoff semble plus simple à appliquer mais cela est dû à la simplicité du circuit. Généralement, la méthode de Thévenin est la plus rapide à appliquer car on n'a souvent qu'un seul courant à calculer.**

La f.e.m. E_1 étant supérieure à E_2, on peut penser que le générateur (1) impose son courant au circuit. Le schéma donne les sens « convenus » des courants : i dans R est ici compté positivement de A vers B. Le courant dans le générateur (2) est donc $I - i$.

1. Lois de Kirchhoff. Il faut écrire 2 équations de maille ($\sum(R.i - E) = 0$) dans chaque maille fermée :

$$Ri + r_1 I - E_1 = 0$$

puis

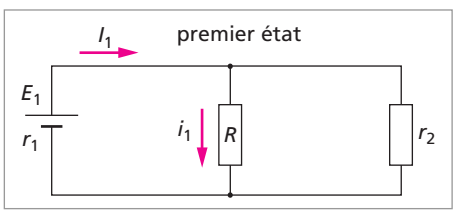
$$r_2(I - i) - Ri - E_2 = 0$$

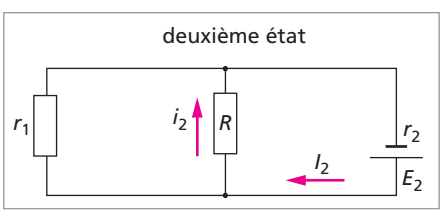
Ensuite on résout numériquement le système de 2 équations.
A.N. On obtient $I = 69/31 \approx 2{,}2$ A et $i = 11/31 \approx 0{,}35$ A.

2. Superposition. Il faut isoler les effets de chaque générateur seul, avec les résistances équivalentes (R et r_2 en dérivation dans le 1er état, de même que R et r_1 pour le 2e état) et calculer les courants partiels I_1, I_2 par la loi de Pouillet puis i_1 et i_2 par la différence de potentiel entre A et B (de la forme $R.i_1 = E_1 - r_1.I_1$). On trouve successivement $I_1 = 54/31$ A, $i_1 = 14/31$ A, $I_2 = 18/31$ A et $i_2 = 3/31$ A. Compte tenu des sens choisis pour ces courants, on tire :

$$i = i_1 - i_2 \quad \text{et} \quad I = I_1 + (I_2 - i_2)$$

soit les mêmes résultats qu'en **1.**.





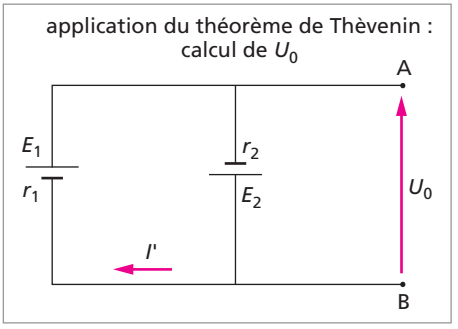
3. Théorème de Thévenin. On calcule le courant i circulant dans R. Après « coupure » entre A et B, le courant I' circulant dans la maille formée par les deux générateurs placés en série dans le même sens vaut :

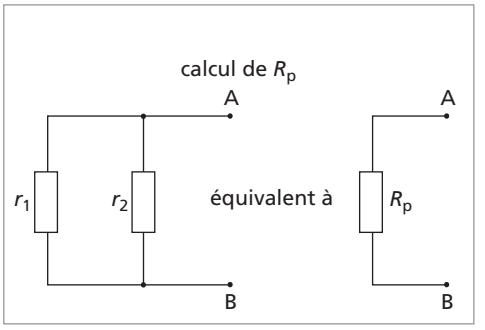
$$I' = (E_1 + E_2)/(r_1 + r_2) = 2 \text{ A}$$

La tension à vide est :

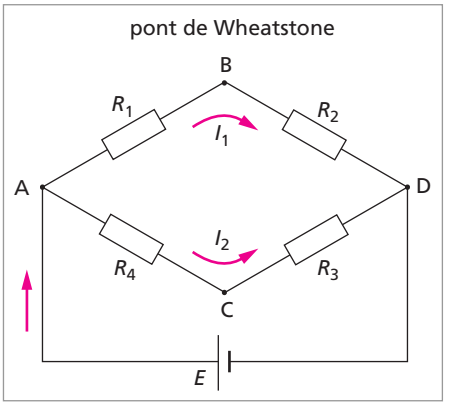
$$U_0 = V_A - V_B = r_2.I' - E_2 = 4 \text{ V}$$

On « annule » ensuite toutes les f.e.m. (tout en conservant les résistances internes des générateurs). La résistance R_p du circuit rendu passif est formé de r_1 et r_2 en dérivation (car vues depuis A et B). On tire alors $i = U_0/(R + R_p) = 11/31 \approx 0{,}35$ A.





10 **CONSEIL : Il s'agit ici d'un résultat classique à bien connaître.**



Puisqu'il n'y a qu'un seul courant à calculer, on applique le théorème de Thévenin en ouvrant le circuit entre B et C. Les résistances R_1 et R_2 ainsi que R_3 et R_4 sont en série deux à deux. Soient I_1 et I_2 les courants circulant alors dans $(R_1 + R_2)$ et $(R_3 + R_4)$ respectivement. La différence de potentiel entre A et D s'écrit :

$$E = (R_1 + R_2).I_1 = (R_3 + R_4).I_2$$

ce qui donne les courants I_1 et I_2.

La tension à vide $U_0 = V_B - V_C$ se calcule algébriquement en passant par le point A :

$$V_B - V_C = (V_B - V_A) + (V_A - V_C)$$
$$= -R_1.I_1 + R_4.I_2$$

d'où

$$U_0 = E.\frac{R_2.R_4 - R_1.R_3}{(R_1 + R_2).(R_3 + R_4)}$$

On « enlève » le générateur (de résistance interne nulle ici). Les points A et D sont au même potentiel. Entre B et C, on a donc la résistance R_p (du réseau rendu passif) formée

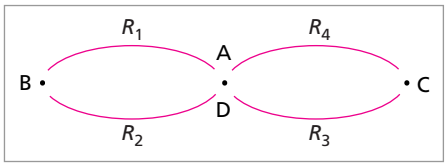
par « R_1 et R_2 en dérivation », en série avec « R_4 et R_3 en dérivation » également d'où

$$R_p = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3.R_4}{R_3 + R_4}$$

On calcule enfin le courant i dans r :

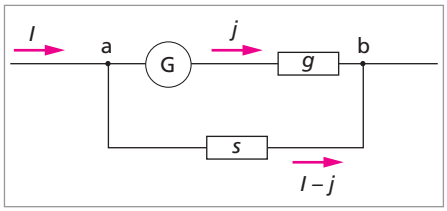
$$i = U_0/(r + R_p)$$

Ce courant est nul si $U_0 = 0$ c'est-à-dire si la « condition d'équilibre du pont » $\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$ est remplie.

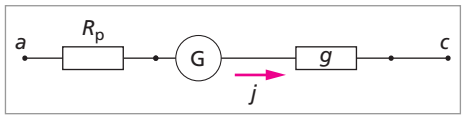


11 Pour obtenir un ampèremètre, il faut mettre une résistance en dérivation sur le galvanomètre (shunt) ; pour avoir un voltmètre, on place une résistance de protection en série.

Le shunt s dérive la majeure partie du courant I, ne laissant passer que l'intensité j dans le galvanomètre. L'égalité des tensions entre a et b donne $s.(I - j) = g.j$ d'où $s = g.j/I$ (car $j \ll I$) avec $j < 20$ µA. La valeur de s dépendant de celle de I, on utilisera différentes bornes de branchement, correspondant à différents « calibres » de l'appareil.



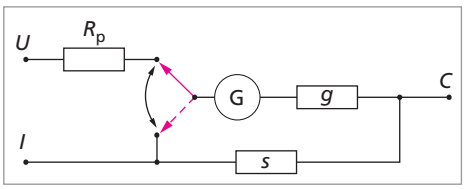
La résistance de protection R_p à placer en série est telle que sous la tension maximale U_{max} ($= U_{ac}$), il ne passe que le courant j_{max} dans le galvanomètre :



$$U_{max} = (g + R_p).j_{max}$$

d'où $R_p \approx 5$ kΩ.

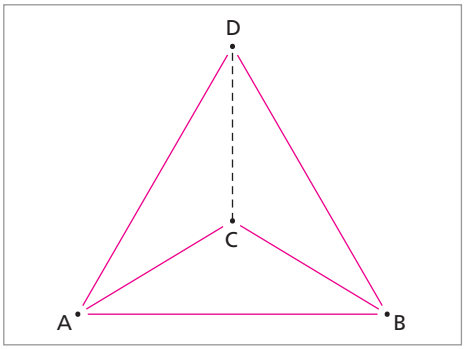
Le montage utilise un interrupteur à 2 positions (au moins) avec les bornes d'entrées U et I et la borne commune C.



12 Pour des raisons de symétrie, les points C et D sont au même potentiel. Il ne passe aucun courant entre C et D et on peut supprimer la branche CD. Le circuit se ramène alors à 3 branches en dérivation entre A et B, avec les résistance $2r$, r et $2r$. De :

$$1/R_{AB} = 1/(2r) + 1/r + 1/(2r)$$

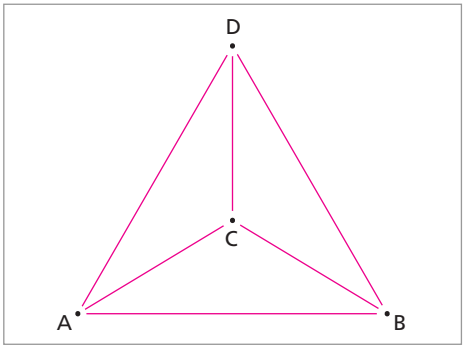
on déduit $R_{AB} = r/2$.

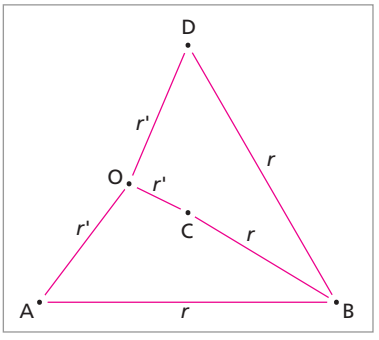


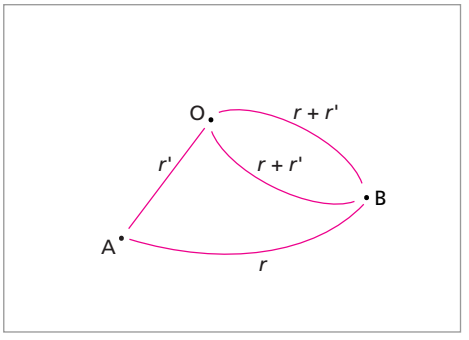
On peut aussi appliquer la transformation « triangle-étoile » (Kennelly) au triangle ADC, chaque branche de l'étoile possède la résistance :

$$r' = r.r/(r + r + r) = r/3$$

Il reste à réduire les résistances en série et/ou en dérivation. On obtient bien sûr $R_{AB} = r/2$.







13 **1.** Dans chaque branche AB circule le courant I_k tel que :

$$V_A - V_B = U_{AB} = r_k.I_k - e_k$$

d'où $I_k = g_k.(U_{AB} + e_k)$. En B, la loi des nœuds impose $\sum I_k = 0$; alors

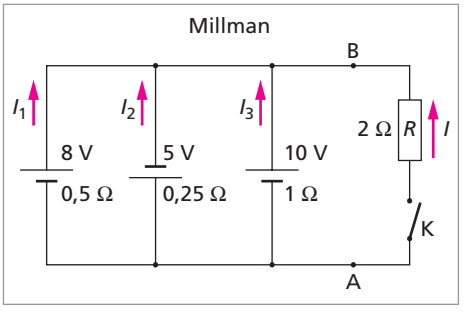
$$\sum(g_k.U_{AB}) + \sum(g_k.e_k) = 0$$

qui constitue la relation de Millman.

2. Quand l'interrupteur K est ouvert, on applique la relation au circuit à 3 branches en dérivation, avec $g_1 = 1/r_1 = 2\ \Omega^{-1}$, $g_2 = 4\ \Omega^{-1}$ et $g_3 = 1\ \Omega^{-1}$:

$$(U_{AB})_0 = -\frac{g_1(8) + g_2(-5) + g_3(10)}{g_1 + g_2 + g_3}$$

$$= -\frac{6}{7}\ \text{V}$$



Quand l'interrupteur K est fermé, on fait intervenir la 4e branche avec $g_4 = 0{,}5\ \Omega^{-1}$ et $e_4 = 0$, ce qui ne modifie que le dénominateur précédent : $U'_{AB} = -6/7{,}5$ V. D'où $I = U'_{AB}/R = -0{,}4$ A. Ce courant I est négatif, il circule donc de B vers A.

3. Pour appliquer le théorème de Thévenin, il faut d'abord calculer les 3 courants (on suppose qu'ils circulent de A vers B dans chaque branche). La loi d'Ohm généralisée donne :

$$U_0 = \left(V_A - V_B\right)_0 = 0{,}5.i_1 - 8 = 0{,}25.i_2 - (-5) = 1.i_3 - 10$$

La condition

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

conduit à $U_0 = -6/7$ V.

Le réseau rendu passif possède la résistance :

$$R_p = \frac{1}{\sum g_k} = 1/7\ \Omega$$

Le courant circulant dans R est alors $I = U_0/(R+R_p) = -0{,}4$ A, même résultat qu'au **2.**.

Remarque : la relation de Millman est intéressante si toutes les branches sont en dérivation.

14 **1.** La source de tension est continue mais le condensateur impose un régime transitoire. Intensité et tension sont donc écrits en lettres minuscules (fonctions du temps). La loi d'Ohm donne :

$$E = Ri + v_C$$

avec $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ et $q = Cv_C$

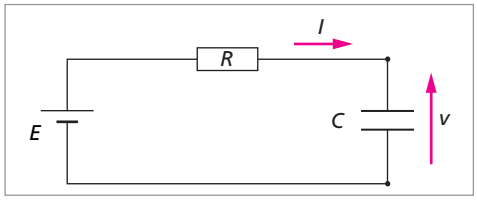
d'où l'équation différentielle du 1er ordre en v_C :

$$RC.\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C = E$$

dont la solution est :

$$v_C(t) = E.\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

avec $\tau = RC$ et la condition initiale $q(0) = 0$.



2. Le courant est

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau) \qquad \text{et} \qquad v_R(t) = Ri(t) = E\exp(-t/\tau)$$

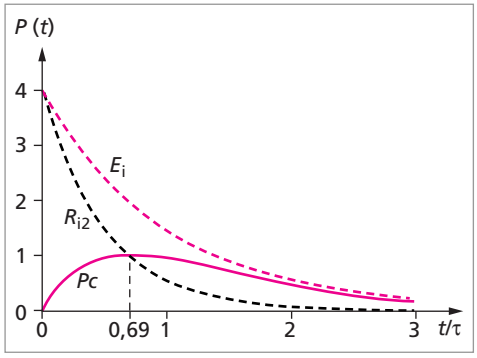
3. La puissance fournie $(E.i)$ est en partie perdue par effet Joule $(R.i^2)$ et le reste est stocké dans C ; le bilan de puissance donne :

$$E.i = R.i^2 + P_C$$

d'où

$$P_C(t) = E^2/R.\exp(-t/\tau).[1-\exp(-t/\tau)]$$

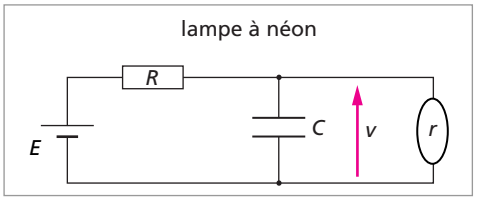
qui est de la forme $K.(x - x^2)$ avec $x = \exp(-t/\tau)$. Cette fonction passe par un maximum en $x = 1/2$, c'est-à-dire à



l'instant $t_1 = \tau.\ell n(2) \approx 0{,}69.\tau$ et $P_C(t_1) = E^2/(4R)$. D'autre part, la courbe présente une inflexion en $x_2 = 1/4$, c'est-à-dire à l'instant $t_2 = \tau.\ell n(4) = 2t_1$.

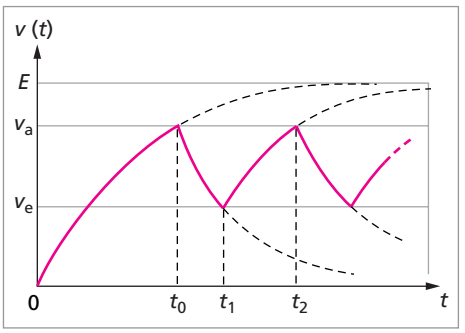
15 Il s'agit d'un phénomène périodique créé par une source de tension continue.

1. Deux étapes se succèdent :



- charge de C à travers R : la tension $v_C(t)$ croît de façon exponentielle en tendant vers E. Quand v_C atteint la valeur V_a, la lampe s'allume, sa résistance r étant faible, le condensateur se décharge ;
- décharge de C dans r : la tension $v_C(t)$ diminue jusqu'à atteindre la valeur V_e, la lampe s'éteint ; sa résistance devenant infinie, la décharge cesse. Puis le cycle recommence. La lampe s'allume et s'éteint périodiquement (elle brille pendant la décharge).

2. Si $r \ll R$, la décharge est quasi instantanée (flash). La période T du phénomène correspond à la durée pendant laquelle la tension croît de V_e à V_a c'est-à-dire entre les instants t_1 et t_2. Or

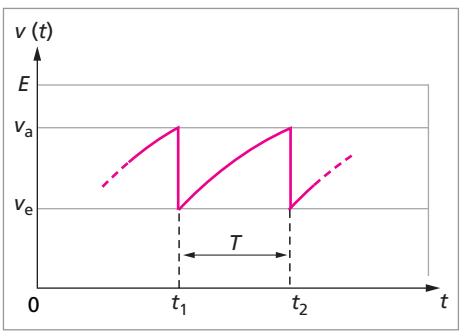


$$v_C(t) = E.\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \text{où } \tau = RC.$$

Alors $v_C(t_1) = V_e$ et $v_C(t_2) = V_a$
d'où $\exp\left[-(t_2 - t_1)/\tau\right] = \dfrac{E - V_a}{E - V_e}$ et :

$$T = RC.\ell n\left(\frac{E - V_e}{E - V_a}\right)$$
$$= 7.\ell n(4/3) = 2{,}0 \text{ s}$$

La lampe émet un bref éclair toutes les 2 secondes.



Remarque : c'est un phénomène d'oscillations de relaxation, analogue à la vidange par un siphon d'un bassin alimenté en permanence ; le bassin se vide et se remplit périodiquement.

16 Par définition, l'intensité efficace fournit le même effet Joule que le courant périodique :

$$R.I_{\text{eff}}^2.T = \int_{(T)} R.i(t)^2.\mathrm{d}t$$

(l'intégration se fait sur l'intervalle périodique de définition du courant, et non systématiquement de 0 à T).

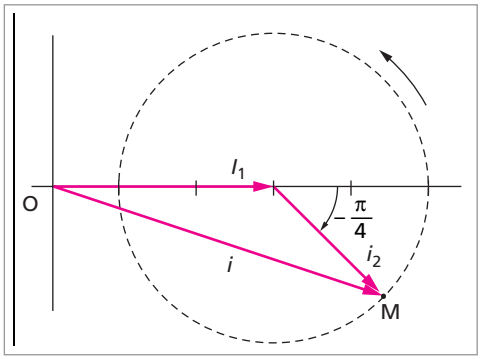
1. Avec $i(t) = (2a/T).t$, on obtient après intégration :

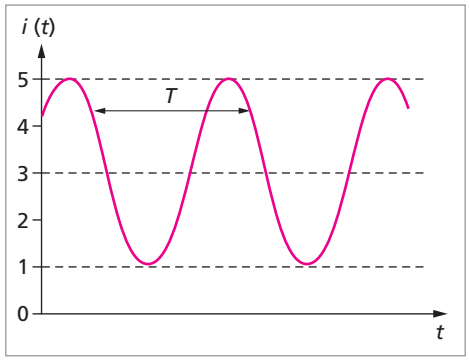
$$R.I_{\text{eff}}^2.T = 4a^2.\frac{R}{T^2}.\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T/2}^{+T/2}$$

d'où $I_{\text{eff}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Le résultat « classique » $\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ n'est valable que pour un courant sinusoïdal (ici, $I_{\max} = a$).

2. Ce courant n'est pas sinusoïdal : c'est la superposition d'un courant continu ($I_1 = 3$ A) et d'un courant sinusoïdal $i_2(t) = 2.\cos(\omega t - \pi/4)$. Son amplitude varie entre 1 A ($= 3 - 2$) et 5 A ($= 3 + 2$). Le vecteur de Fresnel associé au courant continu est porté par l'axe Ox, de longueur 3. Celui associé à i_2 fait l'angle $-\pi/4$ avec Ox et mesure 2 unités. La somme vectorielle donne le vecteur résultant OM. Au cours du temps, le point M décrit le cercle de rayon 2 A.





En complexes,

$$\underline{i} = 3 + 2.\exp\left[j(\omega.t - \pi/4)\right]$$

Or $\exp(-j.\pi/4) = (1-j)/\sqrt{2}$ d'où $\underline{i} = 3 + \sqrt{2}.(1-j).\mathrm{e}^{j\omega.t}$.
L'intensité efficace se calcule par le carré de l'intensité :

$$I^2 = [3 + 2.cos(\omega t - \pi/4)]^2 = 9 + 12.cos(\omega t - \pi/4) + 4.cos^2(\omega t - \pi/4)$$

d'où, en prenant la valeur moyenne sur une période, $I_{\text{eff}}^2 = 9 + 0 + 4/2 = 11$ A^2 et $I_{\text{eff}} = \sqrt{11} \approx 3{,}3$ A.
Il est faux d'écrire ici $I_{\text{eff}} = \dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec $I_{\max} = 5$ A (et $5/\sqrt{2} \approx 3{,}5$).

Remarque : chacune des 2 composantes de ce courant donne un effet Joule Ri^2 :

- composante continue : $R.I_1^2 = 3^2.R = 9$ R
- composante sinusoïdale : $R.i_2^2 = R.I_{max}^2/2 = 2R$ (car $I_{max} = 2$ A pour cette composante),

soit 11 R au total. Enfin, $R.I_{eff}^2 = 11.R$ d'où le résultat.

17 **CONSEIL : C'est l'exercice type sur l'impédance complexe ; il faut bien en connaître la méthode de résolution.**

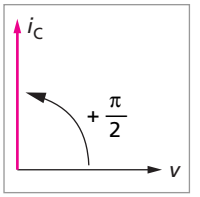
Les relations utiles ici concernent la loi d'Ohm en notation complexe : $\underline{v} = \underline{Z}.\underline{i}$ avec $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$ et $\arg(\underline{v}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{i})$. On prendra la référence sur la tension : $\arg(\underline{v}) = 0$ et la phase de $\underline{i}$ vaut donc $\varphi = -\arg(\underline{Z})$

1. À 50 Hz, la pulsation $\omega = 2\pi.f$ vaut 100π rad/s

– Condensateur seul. L'impédance du condensateur est :

$$\underline{Z}_C = -j/(C\omega)$$

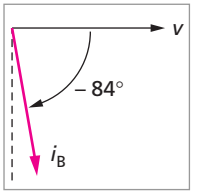
d'où $\underline{i}_C = jC\omega.\underline{v}$; le courant est en avance de $+\pi/2$ sur la tension v. Sa valeur efficace est $I_C = U/Z_C = C\omega.U = 0{,}63$ A



– Bobine seule. L'impédance complexe vaut :

$$\underline{Z} = R + jL\omega$$

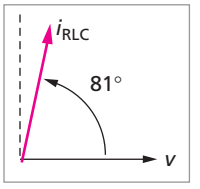
et son module $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \approx 95\ \Omega$. La phase est donnée par $\tan(\varphi) = -\dfrac{L\omega}{R}$ car $\tan(\arg(\underline{Z})) = L\omega/R$; d'où $\tan(\varphi) = -3\pi$ et $\varphi \approx -84°$ (le courant i retarde sur v). De plus, $I_B = U/Z = 1{,}05$ A.



– RLC série. On a alors :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

et $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} \approx 66\ \Omega$.



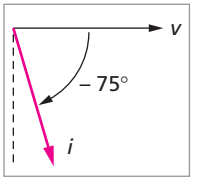
En valeur efficace, $I = U/Z = 1{,}52$ A. La phase est donnée par :

$$\tan(\varphi) = -\frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = 6{,}49$$

d'où $\varphi \approx +81°$ (i avance sur v).

– Bobine et condensateur en dérivation. L'impédance équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega$$



que l'on transforme, avec l'expression conjuguée du dénominateur $(R - jL\omega)$ après quelques calculs simples en :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R + j\omega.\left[R^2C - L.(1 - LC\omega^2)\right]}{R^2 + L^2\omega^2}$$

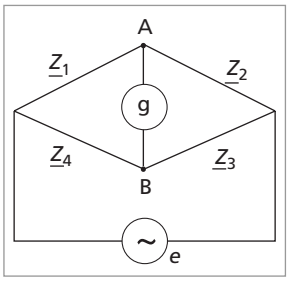
puis numériquement en $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{10 + j.(37{,}81)}{8\,983}$. On obtient le module de l'impédance $Z \approx 230\ \Omega$ et l'intensité efficace $I = U/Z = 0{,}44$ A. On tire la phase de $\underline{i} = \underline{v}.(1/\underline{Z})$ soit $\varphi = 0 + \arg(1/\underline{Z})$; on a donc :

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega.\left[R^2C - L.(1 - LC\omega^2)\right]}{R} = -3{,}78$$

d'où $\varphi \approx -75°$ (i retarde sur v).

2. À 65 Hz, la pulsation $\omega = 2\pi.f$ vaut 130π rad/s. Les calculs sont analogues aux précédents. On trouve les résultats ci-après :
– condensateur seul : $I_C = 0{,}82$ A en avance de $+\pi/2$ sur v ;
– bobine : $Z = 123\ \Omega$; $I_b = U/Z = 0{,}81$ A ; $\tan(\varphi) = -12{,}3$ et $\varphi \approx -85°$ (le courant i retarde sur v) ;
– RLC série : le terme $L\omega - 1/C\omega$ vaut alors 0,1 Ω, négligeable devant R. L'impédance se réduit donc à $Z = R = 10\ \Omega$, et $\tan(\varphi) = -0{,}01$ d'où $\varphi \approx -0{,}5°$ (le courant i est presque en phase avec v, en léger retard). L'intensité efficace vaut $I = U/Z = 10$ A ;
– bobine et condensateur en dérivation : le terme $\omega.[R^2C - L.(1 - LC\omega^2)]$ vaut ici 0,91 Ω, d'où $Z \approx 1\,500\ \Omega$ et l'intensité efficace $I = U/Z = 0{,}066$ A. Puis $\tan(\varphi) = 0{,}091$ et $\varphi \approx +5°$ (i avance sur v).
Dans ce montage, i et v sont en phase si le terme $R^2C - L.(1 - LC\omega^2)$ est nul. Cela a lieu à la pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{L - R^2C}{L^2C}} \approx 406{,}9$ rad/s soit à la fréquence 64,8 Hz, valeur proche de 65 Hz.

18 De même qu'en régime continu, le pont est « équilibré » s'il ne passe pas de courant dans le détecteur central (galvanomètre g), c'est-à-dire si les extrémités A et B de cette branche sont au même potentiel. La condition s'écrit en nombres complexes comme en valeurs continues : $\underline{Z_1}.\underline{Z_3} = \underline{Z_2}.\underline{Z_4}$; cette équation en complexes en représente en réalité deux : égalité des parties réelles et égalité des parties imaginaires.



1. Ici, dans le pont proposé, les impédances Z_1 et Z_3 sont réelles (égales à R et R' respectivement). De plus,

$$\underline{Z_2} = x + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z_4} = -j/(C\omega) = 1/(jC\omega)$$

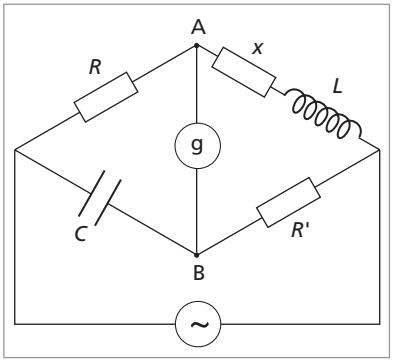
La condition d'équilibre du pont se traduit par :

$$R.R' = (x + jL\omega)/(jC\omega)$$

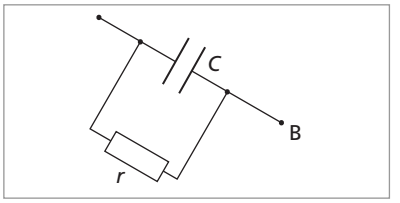
ou encore par :

$$R.R' = L/C - j.x/(C\omega)$$

Le terme imaginaire s'annule pour $x = 0$. L'équilibre du pont n'est réalisable que si la bobine a une résistance nulle (voire très faible devant $L\omega$). On a alors la relation $R.R' = L/C$ entre les caractéristiques des composants.



2. On suppose $x \neq 0$ et on shunte le condensateur avec une résistance de « fuite » r placée en dérivation.



L'impédance $\underline{Z'_C}$ est telle que $\dfrac{1}{\underline{Z'_C}} = \dfrac{1}{r} + jC\omega$. Le produit $\underline{Z_2}.\underline{Z'_C}$ vaut alors :

$$\underline{Z_2}.\underline{Z'_C} = \frac{(x + j.L\omega).r}{1 + j.rC\omega}$$

qui se transforme en :

$$\underline{Z_2}.\underline{Z'_C} = \frac{r.\left[(x + r.LC\omega^2) + j.(L\omega - x.rC\omega)\right]}{1 + (rC\omega)^2}$$

Avant de poursuivre, il faut vérifier que cette expression un peu « complexe » est bien homogène : x et r sont des résistances, le terme $LC\omega^2$ est sans dimension, $L\omega$ s'exprime en ohms, comme x (le terme $rC\omega$ est sans dimension).

La condition d'équilibre du pont impose que le produit $\underline{Z_2}.\underline{Z'_C}$ soit réel, ce qui implique que le terme $L\omega - x.rC\omega$ soit nul, d'où

$$x.r = L/C = R.R'$$

soit $r = R.R'/x$, valeur grande devant 1 Ω si la résistance x de la bobine est faible.

Chapitre 4

Électronique

Ce chapitre est essentiellement envisagé par ses applications pratiques actuelles traitées dans l'enseignement secondaire, comme lors des épreuves écrites du CAPES. À l'ère du numérique et de la communication, les convertisseurs analogiques – numériques et les différents types de modulation seront donc étudiés. Les cours et exercices partiront d'applications pratiques, réalisables en montage ou en TP des lycées et collèges. Pour comprendre les principes de fonctionnement des différents composants de ces montages, il faut cependant posséder des connaissances fondamentales sur les diodes semi-conductrices, les transistors et les amplificateurs opérationnels. Ce sera l'objet des quatre premières parties.
On s'attachera, dans ce chapitre, à isoler les différents composants d'un montage à but pratique et à en déterminer leur fonction individuelle. On essaiera ensuite de choisir le théorème de l'électrocinétique le plus adapté pour résoudre simplement le problème posé.

1. Réseaux linéaires en régime permanent
1.1. Lois de Kirchhoff
1.2. Théorème de superposition
1.3. Théorème de Thévenin
1.4. Théorème de Norton
1.5. Théorème de Millman
1.6. Conseils d'utilisation

2. Diodes
2.1. Semi-conducteurs
2.2. Jonction p-n d'une diode semi-conductrice
2.3. Caractéristiques d'une diode
2.4. Applications

3. Transistors
3.1. Description du transistor bipolaire npn
3.2. Le transistor amplificateur

4. Amplificateur opérationnel ou amplificateur de différence intègre
4.1. L'amplificateur opérationnel
4.2. Fonctionnement de l'A.O. en régime linéaire
4.3. Fonctionnement en régime de saturation
4.4. L'amplificateur opérationnel réel
4.5. Écarts à la perfection des A.O. réels

5. Modulations
5.1. Principe de la modulation
5.2. Modulation d'amplitude
5.3. Modulation de fréquence

6. Conversions numérique-analogique et analogique-numérique
6.1. Généralités sur la conversion
6.2. Conversion numérique-analogique (CNA)
6.3. Conversion analogique numérique (CAN)

1. Réseaux linéaires en régime permanent

Nous rappelons ici les lois et théorèmes fondamentaux de l'électrocinétique, vus dans le chapitre précédent. Ils s'appliquent également pour tout circuit électronique. Nous insisterons sur leurs méthodes d'application ainsi que sur le choix d'utilisation d'un théorème plutôt qu'un autre.

1.1. Lois de Kirchhoff

Soit un réseau formé de n nœuds et b branches :

– à chaque nœud, la somme des intensités des courants s'écrit :

$$\sum_k i_k = 0$$

C'est la **loi des nœuds.** On obtient ainsi $(n-1)$ équations.

– dans chaque maille, la somme des tensions s'écrit :

$$\sum_k u_k = 0$$

C'est la **loi des mailles.** On obtient ainsi $b-(n-1)$ équations.

1.2. Théorème de superposition

Le courant (ou la tension) dans une branche d'un circuit comprenant des générateurs indépendants, peut être considéré(e) comme la superposition des courants (ou des tensions) dans cette branche créés **individuellement** par **chaque** source, les autres ayant été éteintes et leur résistance interne ayant été maintenue.

> ***Remarque :*** « Éteindre une source de tension » revient à la court-circuiter ($e = 0$). « Éteindre une source de courant » revient à ouvrir la branche dans laquelle elle se trouve ($i_{CC} = 0$).

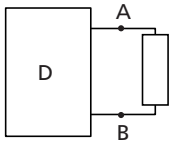
1.3. Théorème de Thévenin

Un réseau dipolaire et linéaire D, ne contenant que des générateurs indépendants, vu de deux points A et B, est équivalent, de l'extérieur, à un générateur unique de f.e.m. e_T et de résistance r_T telles que :

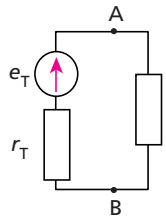
– e_T est la tension à vide entre A et B ($i_{ext} = 0$) quand le reste du réseau est débranché ;

– r_T est la résistance équivalente entre A et B quand tous les générateurs du réseau considéré sont éteints.

Méthode : le but est de remplacer



par



Pour cela, il faut :

- isoler le dipôle D ;
- calculer de e_T :
  – annuler I_{ext} sortant de D ;
  – calculer le(s) courant(s) intérieur(s) à D ;
  – calculer $u_{AB} \Rightarrow e_T = u_{AB}$;
- calculer de r_T :
  – éteindre les sources de courant ou de tension ;
  – calculer $r_{AB} \Rightarrow r_T = r_{AB}$;
- remplacer D par la source de tension (e_T, r_T).

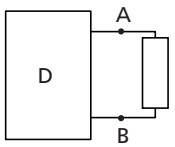
1.4. Théorème de Norton

Un réseau dipolaire et linéaire D, ne contenant que des générateurs indépendants, vu de deux points A et B, est équivalent, de l'extérieur, à un générateur unique de courant de court-circuit i_N et de résistance interne r_N telles que :

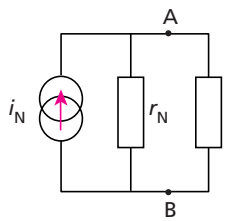
– i_N est le courant externe qui circulerait entre A et B court-circuitées ;

– r_N est la résistance équivalente entre A et B quand tous les générateurs du réseau considéré sont éteints.

Méthode : le but est de remplacer



par



Pour cela, il faut :

- isoler le dipôle D ;
- calculer i_N :
  – court-circuiter AB ;
  – calculer $i_{ext} = i_{AB} \Rightarrow i_N = i_{AB}$;
- calculer r_N :
  $r_N = r_T$ (*cf.* théorème de Thévenin) ;
- remplacer D par la source de courant (i_N, r_N).

1.5. Théorème de Millman

Soit n branches, montées en parallèle entre deux nœuds A et B. Chaque branche est constituée d'un dipôle (e_k, r_k) où k est le numéro de chaque branche. La tension entre

deux nœuds A et B s'écrit :

$$u_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^{n} g_k e_k}{\sum_{k} g_k} \quad \text{où} \quad g_k = \frac{1}{r_k}$$

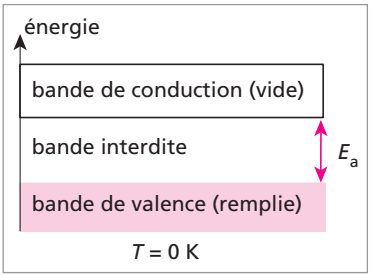
1.6. Conseils d'utilisation

Tous ces théorèmes sont applicables aux régimes lentement variables, en substituant l'impédance à la résistance, l'admittance à la conductance. S'il existe un dipôle non linéaire, il faut l'isoler et appliquer l'un des théorèmes ci-dessus au reste du circuit.
Ces théorèmes (surtout ceux de Thévenin et de Norton) évitent l'analyse complète du réseau si on a seulement besoin de renseignements relatifs à une branche déterminée.
On choisira de préférence le théorème de Norton pour des associations en parallèle et le théorème de Thévenin pour des associations en série.

2. Diodes

2.1. Semi-conducteurs

• Semi-conducteur pur ou intrinsèque
Il est constitué d'atomes qui possèdent 4 électrons de valence. Les plus couramment utilisés sont le silicium et le germanium : $^{28}_{14}$Si ou $^{64}_{32}$Ge.
À $T = 0$ K, aucun électron n'occupe la bande de conduction. Le semi-conducteur se comporte donc comme un isolant parfait.

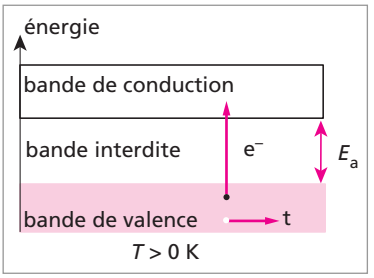


Exemple : l'énergie d'activation E_a vaut 0,75 eV pour Ge et 1,12 eV pour Si (à comparer avec $E_a \approx 7$ eV pour un isolant).

Lorsque $T > 0$ K, les électrons acquièrent une énergie cinétique E_c. Si celle-ci devient supérieure à E_a :

- les e^- sautent dans la bande de conduction et deviennent des e^- libres ;
- ils laissent des trous qui peuvent se mouvoir dans la bande de valence.

Il y a double conduction (e^- et trou).



Soit n est le nombre d'e^- libres par unité de volume, égal au nombre de trous par unité de volume ; la conductivité γ du semi-conducteur s'écrit :

$$\gamma = e.n(\mu_e + \mu_t)$$

où μ_t et μ_e sont respectivement la mobilité des trous et des e^- (remarque : $\mu_t < \mu_e$)
Un semi-conducteur et un isolant se distinguent par l'ordre de grandeur de leur énergie d'activation : E_a (semi-conducteur) $\approx E_a$ (isolant)/10.
Un semi-conducteur et un métal se distinguent par le comportement de leur résistance électrique en fonction de la température :

– $R_{\text{métal}} = R_o(1 + aT)$. Si T augmente, R augmente ;

– $R_{\text{semicond}} = R_o e^{-\alpha T}$. Si T augmente, R diminue.

• Semi-conducteur dopé ou extrinsèque

Dans ce type de semi-conducteur, le nombre de porteurs de charges est augmenté par l'ajout d'impuretés.

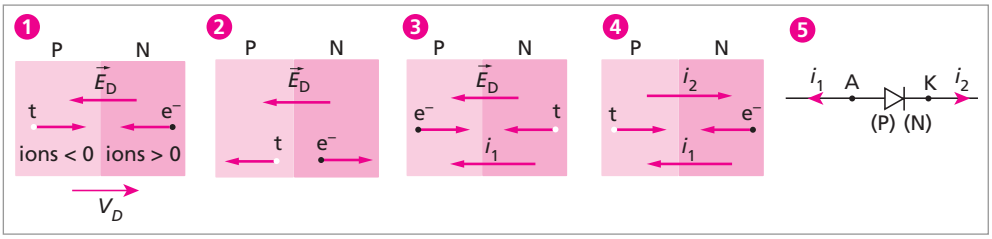
Type de dopage	n	p
Nature de l'impureté	contient 5 e^- de valence donneur d'électrons	contient 3 e^- de valence accepteur d'électrons
Espèce majoritaire	électron	trou
Espèce minoritaire	trou	électron
Conduction	par électron	par trou
Exemple d'impureté	As (arsenic)	B (bore)

2.2. Jonction p-n d'une diode semi-conductrice

Une diode semi-conductrice est formée d'un semi-conducteur dopé p (anode) et d'un semi-conducteur dopé n (cathode). Lorsque ces deux éléments sont mis en contact, un régime électrique transitoire s'établit de part et d'autre de la jonction, suivi d'un régime permanent. Une succession de phénomènes se produit ainsi, décrits ci-dessous, qui aboutit à l'expression des intensités des courants circulant dans la jonction.

Jonction non reliée à une alimentation

Il y a diffusion des porteurs majoritaires.



❶ Établissement d'un champ électrique de diffusion $\vec{E}_D$ et donc création d'une barrière de potentiel $V_D = V_N - V_P \approx 0{,}7$ V de part et d'autre de la jonction.

❷ La diffusion des porteurs majoritaires est arrêtée.

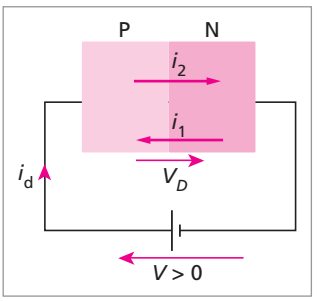
❸ Il y a déplacement des porteurs minoritaires et donc apparition d'un courant i_1.

❹ Or la jonction p-n n'est pas reliée au circuit. Donc $\exists i_2$ tel que $i_2 = -i_1$. Ce courant i_2 ne peut être dû qu'aux porteurs majoritaires qui ont réussi à franchir la barrière de potentiel, grâce à la température et donc à leur énergie cinétique.

❺ $|i_1| = |i_2| = I_o \mathrm{e}^{\frac{eV_D}{kT}}$

Jonction reliée à une alimentation dans le sens passant

Le sens « passant » d'une diode est défini par le sens des courants dus aux porteurs majoritaires dans la jonction. Les e^- majoritaires de la zone N auront tendance à se diriger vers l'anode, les trous majoritaires de la zone P auront tendance à se diriger vers la cathode. Le sens passant sera donc défini par un courant dirigé de l'anode vers la cathode.
Ce régime forcé sera obtenu avec le montage suivant :
On a alors $V = V_P - V_N > 0$. L'intensité du courant dû aux porteurs minoritaires s'écrit :



$$|i_1| = I_s = I_o e^{\frac{-eV_D}{kT}}$$

Celle due aux porteurs majoritaires s'écrit :

$$|i_2| = I_o e^{\frac{-e(V_D - V)}{kT}} = I_S e^{\frac{eV}{kT}} \gg |i_1|$$

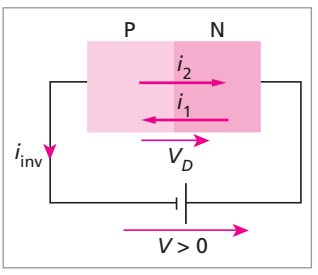
Le courant direct s'écrit donc :

$$i_d = |i_2| - |i_1| = I_s(e^{eV/kT} - 1) \approx I_s e^{eV/kT} \gg |i_1|$$

Le courant direct i_d est dû au déplacement des porteurs majoritaires.

Jonction reliée à une alimentation dans le sens bloqué

Il suffit d'inverser les bornes de l'alimentation pour l'obtenir.
Dans ce cas, on a $V = V_N - V_P > 0$.
La hauteur de la barrière de potentiel croît. L'intensité du courant dû aux porteurs minoritaires s'écrit :



$$|i_1| = I_s = I_o e^{\frac{-eV_D}{kT}}$$

Celle due aux porteurs majoritaires s'écrit :

$$|i_2| = I_O e^{\frac{-e(V_D + V)}{kT}} \approx I_s e^{\frac{-eV}{kT}} \ll |i_1|$$

d'où le courant inverse :

$$|i_{inv}| = |i_1| - |i_2| = I_s(1 - e^{\frac{-eV}{kT}}) \approx I_s$$

Le courant inverse i_{inv} est dû au déplacement des porteurs minoritaires.

Remarque : il peut y avoir phénomène d'avalanche quand $eV > E_a \Rightarrow$ réactions en chaîne du phénomène de diffusion des porteurs majoritaires sous l'effet du champ extérieur :

- dans le cas d'une diode normale, ce phénomène peut entraîner la destruction du cristal $\Rightarrow$ il faut donc limiter la tension V dans le sens bloqué ;
- dans le cas d'une diode Zener, ce phénomène est mis à profit pour obtenir des alimentations stabilisées.

2.3. Caractéristiques d'une diode (convention récepteur)

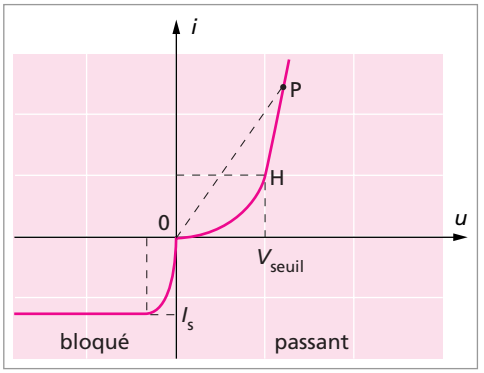
• Diode réelle

On retrouve la loi exponentielle décrite précédemment dans le sens passant et un courant constant et très faible dans le sens bloqué. On définit la résistance statique :

$$R = \frac{1}{\text{pente de } OP}$$

et la résistance dynamique :

$$R_d = \frac{1}{\text{pente de } HP}$$

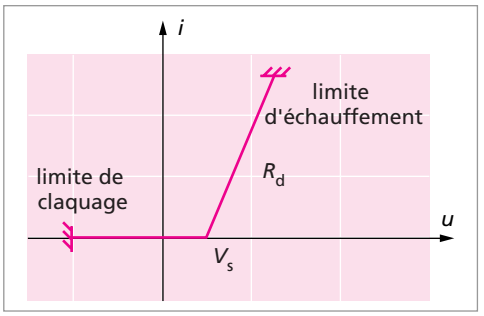


La résistance dans le sens passant R_d est de quelques Ω ; la résistance dans le sens bloqué tend vers infinie ; le courant inverse I_s est constant et vaut quelques μA et la tension seuil $V_{seuil} = V_D = 0,2$ V pour Ge et 0,6 V pour Si.

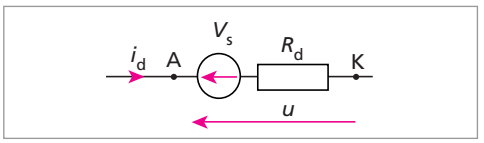
• Modélisation

À partir de ces caractéristiques, une diode est modélisée par l'équation de la caractéristique pour $u > V_s$ qui s'écrit :

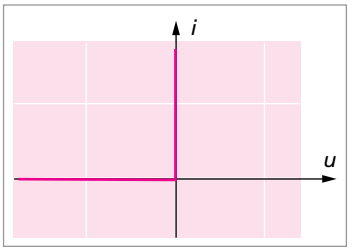
$$u = V_s + R_d i$$



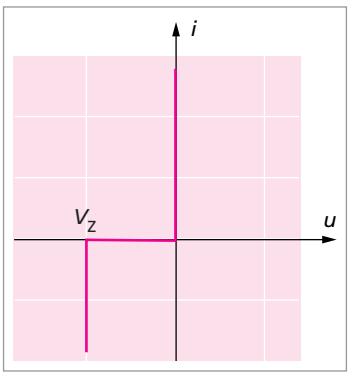
La diode peut dans ce cas être représentée par le schéma équivalent ci-contre.



Diode idéale : Pour une diode idéale, $R_d = 0$ et $Vs = 0$. Sa caractéristique est représentée ci-contre.



• **Diode Zener idéale**
La caractéristique d'une diode Zener idéale est représentée ci-contre. V_Z se situe entre -10 V et -50 V selon la diode.



2.4. Applications

Redressement simple et double alternance d'un courant alternatif : pour un courant alternatif $i(t)$ quelconque, on définit une intensité moyenne I_{moy} et une intensité efficace I_{eff} par :

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt \quad \text{et} \quad I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t$$

I_{moy} se mesure avec un ampèremètre magnétoélectrique en position DC.
I_{eff} se mesure avec un ampèremètre RMS pour un signal de forme quelconque.
On définit également le facteur de forme F par :

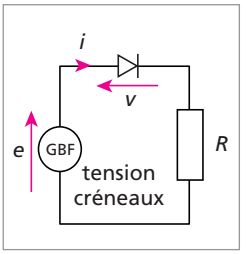
$$F = I_{eff}/I_{moy}$$

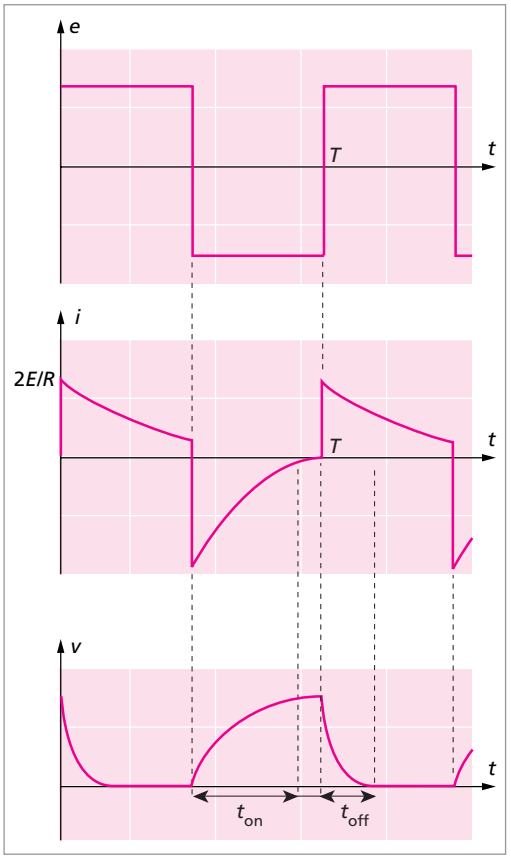
et le taux d'ondulation :

$$\tau = I_{ond,max}/I_{moy}$$

À partir de la loi de Joule, on peut montrer que $F^2 = 1 + \tau^2$.

Commutation : lorsque qu'une diode est soumise à une tension créneaux, sa réponse n'est pas instantanée. Les temps de commutation t_{on} et t_{off} sont dûs au mouvement des charges stockées dans la zone de transition. Ils sont de l'ordre de la μs. On les appelle « temps de recouvrement direct ou inverse ». De plus $t_{on} < t_{off} \ll T$ (la première condition n'est pas respectée sur les diagrammes ci-dessous pour mettre en évidence le phénomène).





➜ **Voir exercices 1 à 5**

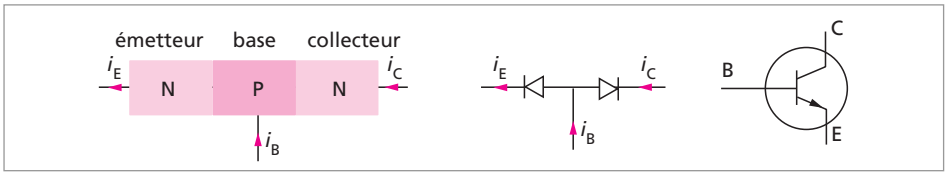
3. Transistors

Il existe deux types de transistors :

- le transistor bipolaire (bijonction) NPN ou PNP ;
- le transistor unipolaire (à effet de champ) JFET ou MOSFET (non traité ici).

3.1. Description du transistor bipolaire npn

Constitution : c'est une puce de semi-conducteur (Si en général) contenant deux jonctions PN ayant des sens passants opposés.



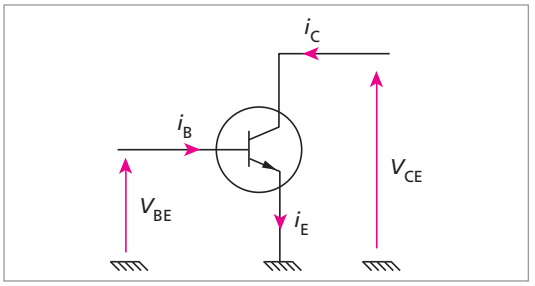
La flèche sur le schéma du transistor indique :

– le sens passant de la jonction B/E ;

– le sens réel de i_E.

Polarisation du transistor : en émetteur commun (montage le plus classique). L'émetteur est relié à la masse du montage. Le transistor présente les caractéristiques suivantes :

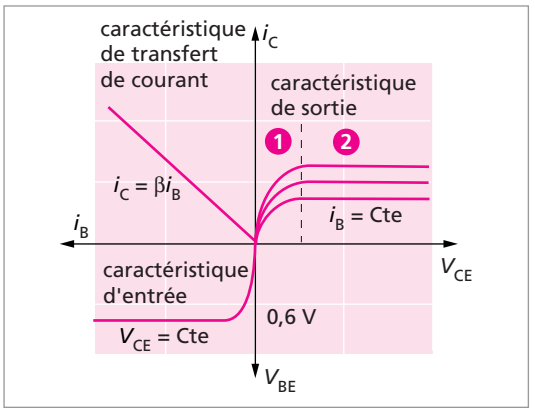
$$i_E = i_B + i_C \quad \text{et} \quad i_B \ll i_C.$$



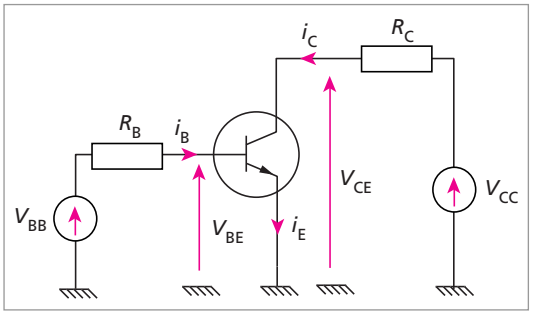
La jonction B/E est passante donc la résistance d'entrée $R_{B/E}$ est faible.
La jonction B/C est bloquée donc la résistance de sortie $R_{B/C}$ grande.
L'amplification statique est définie par $\beta = i_C/i_B$: $50 < \beta < 400$.

Remarque : le nom ce dipôle électrique provient de ses propriétés : $R_{entrée}$ faible $\rightarrow$ R_{sortie} grande, il y a TRANSfert de résISTORs, d'où le nom de transistor.

Caractéristiques statiques : elles sont représentées graphiquement sur la figure ci-contre.
Les ordres de grandeur des intensités de courants mises en jeu sont pour I_B de quelques µA, pour I_C de quelques mA, de plus $V_{CE} < 10$ V et $V_{BE} < 0,6$ V.



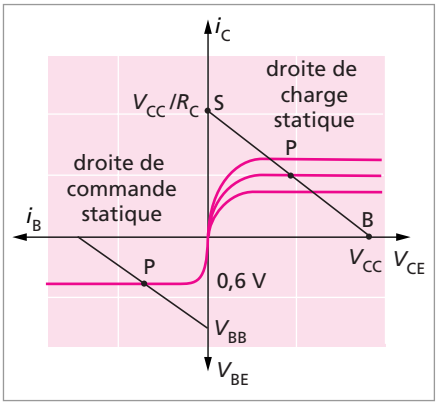
Point de fonctionnement : lorsque le transistor est polarisé à l'aide de deux alimentations V_{BB} et V_{CC} (fig. ci-contre).



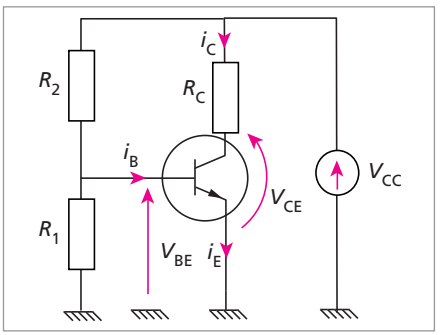
– Rôle de R_B : on veut que $I_B = \text{Cste}$ donc que (V_{BB}, R_B) soit équivalent à un générateur de courant. Il faut donc que R_B soit importante : $R_B \approx 10\ \text{k}\Omega$. Dans la maille 1 : $V_{BE} = V_{BB} - R_B I_B$

– Rôle de R_C : elle limite I_C (P_{max} vaut quelques 0,1 mW) : $200\ \Omega < R_C < 1\ \text{k}\Omega$. Dans la maille 2 : $V_{CE} = V_{CC} - R_C I_C$.

Le point de fonctionnement P est représenté sur la figure ci-contre. On distingue alors deux modes de fonctionnement du transistor.



- En commutation :
  - $V_{BE} < 0,6\ V$; I_B très faible ; $I_B \approx I_C \approx 0$ donc $V_{CE} = V_{CC}$: le transitor est **bloqué** (point B) ;
  - I_B est maximum ; $V_{BE} \approx 0,6$ V ; $V_{CE} \approx 0$ V et $I_C \approx V_{CC}/R_C$ le transistor est **saturé** (point S).
- En amplification : entre les points B et S, sur la droite de charge statique : $I_C = \beta I_B$.

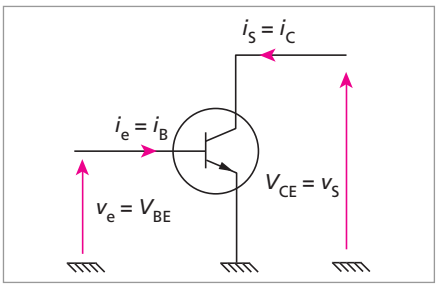


Le transistor peut être polarisé par une seule alimentation V_{CC} et un pont diviseur :

$$V_{BE} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC}$$
$$V_{CE} = V_{CC} - R_C I_c$$

3.2. Le transistor amplificateur

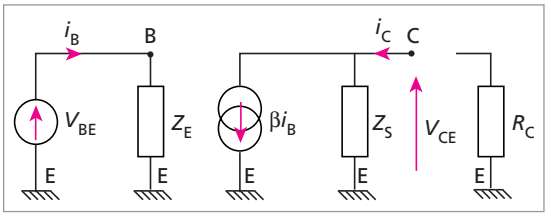
Une fois le transistor polarisé, si possible au milieu de sa droite de charge statique, on le soumet à une tension alternative sinusoïdale $v_{BE} = v_e$. Celle-ci est amplifiée, puis recueillie entre le collecteur et l'émetteur : $v_s = v_{CE}$. Les tensions de polarisation (grandes lettres) ne sont plus représentées sur les schémas suivants.



$$v_e = Z_e i_e \quad \text{et} \quad v_s = e - Z_s i_s$$

(on rappelle que Z_e est faible et que Z_s est importante).

• Modèle équivalent du transistor en régime alternatif sinusoïdal



• Performances

On définit :

– la fonction de transfert, ou amplification en tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \underline{A_v}$$

– l'amplification en courant :

$$\underline{A_i} = \frac{\underline{I_s}}{\underline{I_e}}$$

– l'amplification en puissance :

$$\underline{A_p} = \underline{A_i}.\underline{A_v}$$

– le gain en puissance :

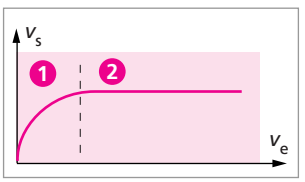
$$G_p = \log|\underline{A_p}| = \log|\underline{P_s}/\underline{P_e}| \text{ (en Bel)}$$

$$= 10\log|\underline{P_s}/\underline{P_e}| \text{ (en dB) (1dB = 0,1 B)}$$

$$= 20\log|\underline{H}| \text{ (en dB)}$$

• Représentation graphique

La courbe de transfert est représentée ci-contre. La région **1** correspond à la fonction en amplification, la région **2** à la saturation. La réponse en fréquence est donnée par le diagramme de Bode, constitué en fait de deux courbes :



$$G_p = f(\log\omega) \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{H}) = g((\log\omega)$$

où G_p est exprimé en dB et φ en rad. Sur ces courbes, on définit deux intervalles de pulsation $\omega_2 - \omega_1$ (ou de fréquence $f_2 - f_1$) caractéristiques : l'octave telle que $\omega_2 = 2\omega_1$ et la décade telle que $\omega_2 = 10\omega_1$.

Les pentes de $G_p = f(\log\omega)$ sont exprimées en dB/octave ou plus rarement en dB/décade.

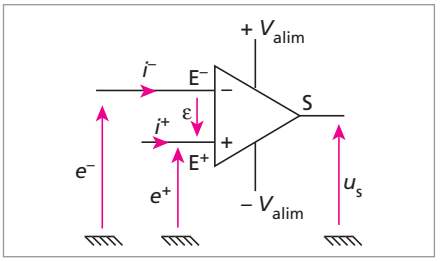
➜ **Voir exercices 6 à 8.**

4. Amplificateur opérationnel ou amplificateur de différence intègre

4.1. L'amplificateur opérationnel

Composition : il est constitué d'un substrat (un seul cristal) de silicium, appelé couramment « puce », sur lequel sont additionnés des transistors, diodes, résistances, condensateurs et connexions. Ces apports sont réalisés simultanément sur la surface du cristal par microphotographie et masques photochimiques, d'où le nom de **circuit intégré**.
Les avantages des amplificateurs opérationnels par rapport aux circuits comprenant des bobinages sont qu'ils présentent une taille très faible et un prix de revient très bas.

Description : l'amplificateur opérationnel le plus courant (l'A.O. « 741 ») comprend :

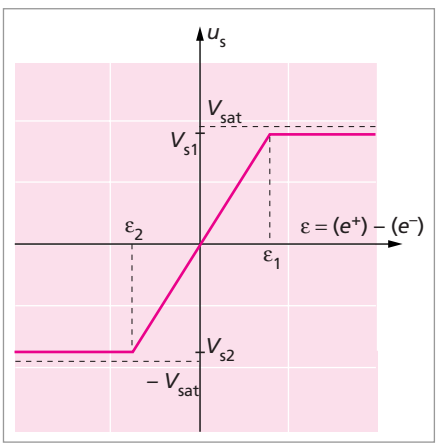


- 2 bornes d'entrée E^+ et E^- (respectivement non inverseuse et inverseuse) ;
- 1 borne de sortie S ;
- 2 bornes de polarisation $+V_{alim}$ et $-V_{alim}$ pour polariser les composants actifs (en général $V_{alim} = 15$ V) ;
- 1 borne de réglage de la tension d'offset ;
- 1 borne de masse, à relier à la masse de l'alimentation.

Remarque : on ne représente pas les bornes d'alimentation sur le symbole de l'A.O..

Caractéristique : elle est représenté ci-contre par la courbe $u_s = f(\varepsilon)$ (caractéristique statique de transfert). Les valeurs sont :

$$V_{sat} = 15 \text{ V},\ V_{s1} = 12 \text{ V} < V_{sat},$$
$$V_{s2} = -12{,}5 \text{ V},\ \varepsilon_1 = 1{,}12 \text{ mV},$$
$$\varepsilon_2 = -0{,}125 \text{ mV}.$$



Lorsque la tension d'offset est mal réglée, la caractéristique ne passe pas par l'origine : $\exists \varepsilon = U_{offset} \neq 0$ lorsque $u_s = 0$. Il faut alors jouer sur la borne de réglage de cette tension d'offset pour l'annuler.
On distingue deux régimes de fonctionnement.

Régime linéaire

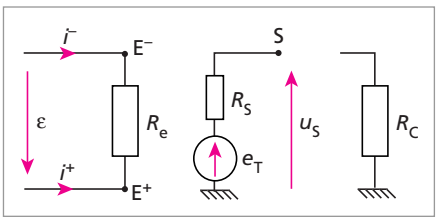
$$\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_1 \Rightarrow V_{s2} < u_s < V_{s1} \Rightarrow u_s = A_d \varepsilon$$

- L'A.O. amplifie la différence $\varepsilon = (e^+) - (e^-)$, d'où son nom d'**amplificateur de différence**.
  u_s est une fonction linéaire de ε, d'où son nom de **circuit intégré linéaire**.
- $A_d \approx 10^5$, c'est l'amplification différentielle, donc $G = 20 \log A_d = 100$ dB, mais on n'utilise pas directement cette amplification car on observe une grande dispersion de A_d d'un A.O. à l'autre ainsi que des dérives importantes de A_d avec la température ou lorsque V_{alim} fluctue. Enfin à la moindre variation de ε, on passe en régime de saturation.
- Si $e^+ = 0$, $u_s = A_d(e^+ - e^-) = -A_d(e^-)$: u_s et e^- sont en opposition de phase, d'où le nom de borne inverseuse pour E^-.
- Si $e^- = 0$, $u_s = A_d(e^+)$: u_s et e^+ sont en phase, d'où le nom de borne non inverseuse pour E^+.

Régime de saturation

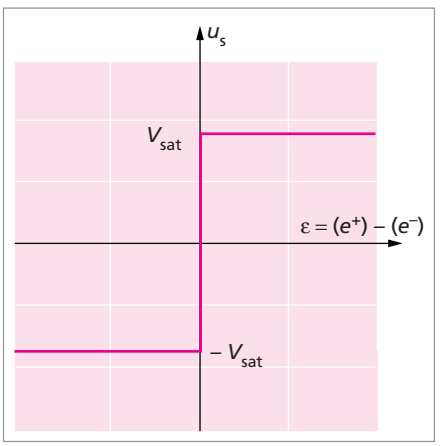
$\forall \varepsilon$ tel que : $\varepsilon > \varepsilon_1$: $u_s = V_{s1} \approx V_{sat}$
$\forall \varepsilon$ tel que : $\varepsilon < \varepsilon_2$: $u_s = V_{s2} \approx -V_{sat}$
Ce régime correspond à une perte du pouvoir de commande de l'A.O..

Modélisation de l'A.O. (amplification de petits signaux)
R_e est très grand (quelques 100 kΩ), c'est l'inverse du transistor. R_s est très petit (quelques Ω) : u_s est donc équivalent à un générateur de tension. On peut donc schématiser l'A.O. par le schéma ci-contre.



Avec $e_T = A_d \varepsilon$:

- Si R_c n'existe pas, $u_s = e_T = A_d \varepsilon$
- Si R_c existe, $u_s = \dfrac{R_c}{R_c + R_s} e_T$
- Si $R_s \ll R_c$, $u_s \approx e_T$.



Amplificateur opérationnel idéal
$R_s = 0 \Rightarrow u_s = e_T = A_d \varepsilon = A_d(e^+ - e^-)$, $\forall R_c$
$R_e \to \infty$, or $\varepsilon = R_e(i+) \neq \infty \Rightarrow i^+ = i^- = 0$
$A_d \to \infty$ en régime linéaire, or
$u_s = A_d \varepsilon \neq \infty \Rightarrow \varepsilon = 0$.
D'où la caractéristique de l'A.O. idéal ci-contre.

4.2. Fonctionnement de l'A.O. en régime linéaire

Dans ce cas, la présence d'une boucle fermée reliant S à E^- (contre-réaction) est obligatoire. Pour trouver la relation $u_s = f(u_e)$, il est conseillé d'appliquer la méthode de résolution suivante :

- choisir des mailles ne contenant que u_s ou que u_e ;
- appliquer les loi des mailles (et des nœuds) ;
- écrire que l'A.O. est idéal : $i^+ = i^- = 0$, $\varepsilon = 0$ si $|u_s| < V_{sat}$;
- simplifier les lois des mailles (et des nœuds) ;
- préciser les limites de fonctionnement en régime linéaire : $|u_s| < V_{sat}$.

À partir d'un A.O. en régime linéaire, les montages les plus courants sont les suivants :

- un suiveur ;
- un amplificateur inverseur ou non inverseur ;
- un additionneur ou un soustracteur ;
- un dérivateur ou un intégrateur ;
- un filtre passe-bande ;
- un générateur de tension proportionnelle au courant débité (résistance négative).

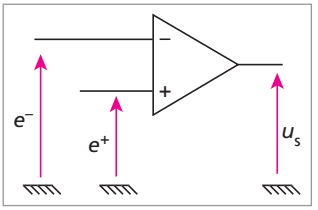
Ces différentes opérations justifient le nom d'**amplificateur opérationnel**.

4.3. Fonctionnement en régime de saturation

Dans ce cas, la présence d'une boucle ouverte entre S et E^- est obligatoire.

Montage comparateur

$\varepsilon = (e^+) - (e^-) > 0 \Rightarrow e^+ > e^- : u_s = V_{sat}$
$\varepsilon = (e^+) - (e^-) < 0 \Rightarrow e^+ < e^- : u_s = -V_{sat}$



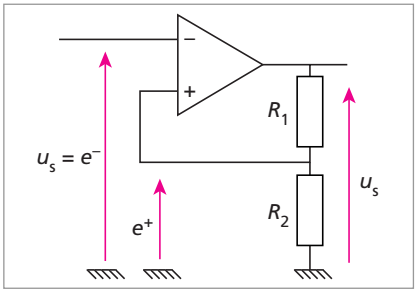
Inconvénients du montage :

- il faut que e^+ et $|e^-| < 15$ V sinon l'A.O. est détérioré ;
- comme $A_d \neq \infty$, la caractéristique de transfert est inclinée et la commutation entre les deux tensions extrêmes n'est pas instantanée en H.F. : il existe une fréquence maximum liée à $A_d \neq \infty$. C'est le « slew rate » S_r.

Exemple : $S_r = 0,5$ V/µs pour l'A.O.741. Pour passer de -15 V à $+15$ V, il faut donc 60 µs.

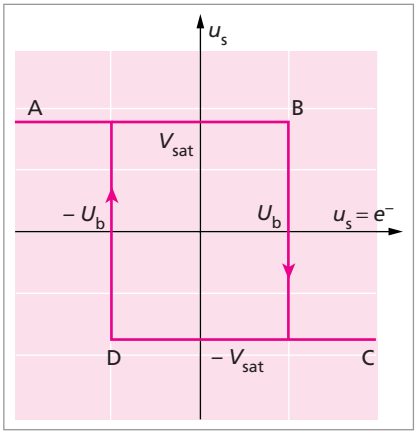
Comparateur à hystérésis ou déclencheur de Schmidt

$e^+ = u_s \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ avec $u_s = \pm V_{sat}$



– si $u_s = +V_{sat}, e^+ = V_{sat}\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$. Ceci est vérifié si $e^+ - e^- > 0$. Donc si $e^- < \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_{sat}$ (partie AB de la caractéristique)

– si $u_s = -V_{sat}, e^+ = -V_{sat}\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$. Ceci est vérifié si $e^+ - e^- < 0$. Donc si $e^- > -\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_{sat}$ (partie CD de la caractéristique). Ce qui conduit à la caractéristique ci-contre, avec $U_b = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_{sat}$.

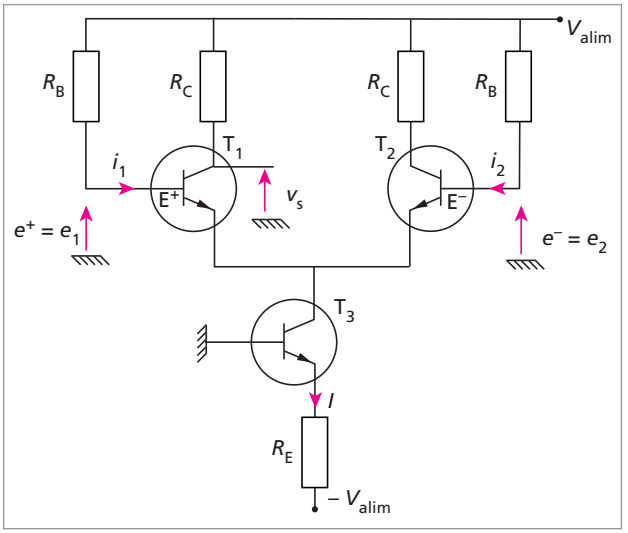


Il existe deux valeurs de u_s pour une valeur de u_e, ce qui correspond bien à une hystérésis.
La largeur du cycle est modifiable, en faisant varier R_1 et R_2.

Applications : comparateur de signe ; comparateur de tension (déclenchement de la base de temps des oscilloscopes) ; transformation d'un signal sinusoïdal en créneaux.

4.4. L'amplificateur opérationnel réel

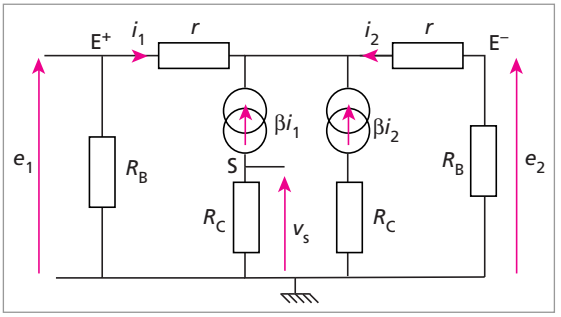
Il s'agit d'un amplificateur différentiel à transistors. Un exemple simple est schématisé ci-dessous.



L'ensemble $\{T_3, R_E\}$ est équivalent à une source de courant débitant un courant d'intensité $I \approx V_{alim}/R_E$, indépendante de T_1, T_2, R_C et R_B. On peut montrer que :

$$v_s = -\frac{R_c\beta}{2r}(e_1 - e_2) = A_D(e_1 - e_2)$$

où r est la résistance d'entrée des transistors T_1 et T_2 et β leur coefficient d'amplification statique. Le schéma équivalent de cet amplificateur, en régime sinusoïdal petits signaux, est représenté ci-contre.



4.5. Écarts à la perfection des A.O. réels

Taux de réjection en mode commun : en général, $v_s = A_D(e_1 - e_2) + A_C\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)$. Le premier terme correspond au signal de différence cherché. Le second terme correspond au signal en mode commun. On définit le « common mode rejection ratio » ou taux de réjection en mode commun par $CMRR = 20\log\frac{A_D}{A_C}$. Ce taux se mesure. Ce défaut ne peut pas être compensé.

Tension d'« offset » ou de décalage d'entrée : la tension $\varepsilon = e^+ - e^- \neq 0$ quand $v_s = 0$. Ce défaut se mesure et se compense à l'aide d'un potentiomètre.

Courant de décalage d'entrée (« input offset current ») : $I = |i^+ - i^-| \neq 0$. Ce défaut se mesure et se compense par un montage approprié.

Vitesse maximale de variation du signal de sortie (« slew rate ») : $\left(\frac{dv_s}{dt}\right)_{max} \approx 0{,}5\ V/\mu s$ pour l'A.O. 741. Ce défaut n'est pas compensable. Il entraîne une limite en fréquence pour les signaux de forte amplitude : pour $(\Delta v_s)_{max} \approx 30$ V, on a $\Delta t \approx 60\ \mu s$. La période et la fréquence des signaux à amplifier sont donc limitées : $T > 60\ \mu s$ et $f < 17$ kHz.

Bande passante : pour les signaux de faible amplitude, la fréquence de coupure vaut 10 Hz et la fréquence pour laquelle le gain s'annule vaut 1 MHz.

➜ **Voir exercices 9 à 25.**

5. Modulations

5.1. Principe de la modulation

Plusieurs stations (émetteurs) veulent communiquer avec un auditeur (récepteur).
Le **signal modulant B.F.**, de fréquence f, contient l'information :

$$100\ Hz < f_{voix} < 7{,}5\ kHz \qquad 30\ Hz < f_{orchestre} < 20\ kHz$$

La **porteuse H.F.**, de fréquence F, transporte cette information.

$$100 \text{ kHz} < F_{\text{porteuse}} < 1 \text{ GHz}$$

Elle peut être sinusoïdale ou numérique : PAM, PWM, PPM, PCM ou FSK.
Le **signal modulé** (ou transmis) contient le signal modulant et la porteuse.

Le récepteur sélectionne un émetteur (porteuse H.F. modulée par la B.F.), puis il le démodule pour ne garder que le signal modulant. La modulation permet ainsi de transmettre un grand nombre d'informations.

Tout signal modulé peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = S(t)\cos[\theta(t)] = S(t)\cos[\Omega t + \varphi(t)]$$

où $S(t)$ est l'amplitude du signal modulé, $\theta(t)$ est la phase instantanée du signal modulé, $\dfrac{d\theta}{dt} = \Omega + \dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ est la pulsation.
Deux cas se présentent :

- $S(t)$ est une fonction du temps et $\varphi(t)$ est une constante : c'est la modulation d'amplitude
- $S(t)$ est une constante et $\varphi(t)$ est une fonction du temps : c'est la modulation de fréquence ou de phase.

5.2. Modulation d'amplitude

• Modulation d'amplitude à porteuse supprimée
La tension associée à porteuse H.F. s'écrit :

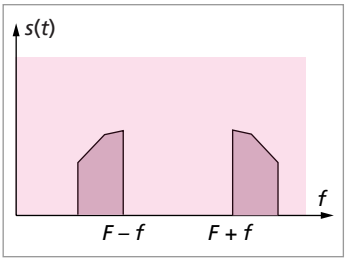
$$v(t) = V_m \cos \Omega t$$

Le signal modulant B.F. s'écrit :

$$u(t) = U_m \cos \omega t \quad \text{avec} \quad \omega \ll \Omega.$$

La modulation s'effectue à l'aide d'un multiplieur analogique :

$$s(t) = ku(t)v(t) = kV_m U_m \cos \omega t \cos \Omega t$$
$$= \frac{kU_m V_m}{2}[\cos(\Omega - \omega)t + \cos(\Omega + \omega)]$$



Le spectre en fréquence est représenté ci-contre.
La démodulation est réalisée par multiplication du signal modulé $s(t)$ par la porteuse $v(t)$:

$$s(t)v(t) \propto [\cos(2\Omega t - \omega) + \cos \omega t]$$

Le premier terme est éliminé par un filtre passe-bas ; le second est proportionnel au signal modulant $u(t)$ recherché.
L'inconvénient de ce montage réside dans la nécessité de posséder la porteuse lors de la réception pour assurer la démodulation. Il a cependant l'avantage de ne consacrer la puissance fournie par l'émetteur qu'au signal utile.

• Modulation d'amplitude avec porteuse

La tension associée à la porteuse H.F. s'écrit :

$$v(t) = V_m \cos \Omega t$$

Le signal modulant B.F. :

$$u(t) = U_o + U_m \cos \omega t$$

avec $\omega \ll \Omega$ et où U_o est une composante continue ajoutée.

La modulation dite « équilibrée » est obtenue à l'aide d'un multiplieur analogique :

$$s(t) = ku(t)v(t) = k(U_o + U_m \cos \omega t)(V_m \cos \Omega t) = kU_o \left(1 + \frac{U_m}{U_o} \cos \omega t\right)(V_m \cos \Omega t)$$
$$= A(1 + m \cos \omega t) \cos(\Omega t)$$

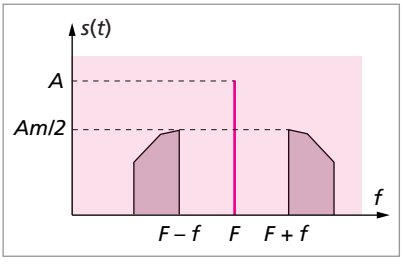
avec $A = kU_oV_m$ et $m = \dfrac{U_m}{U_o}$ le **taux de modulation**.

L'amplitude du signal modulé est :

$$S(t) = A(1 + m \cos \omega t)$$

C'est bien une fonction du temps.

$$A(1 - m) \leqslant S(t) \leqslant A(1 + m)$$

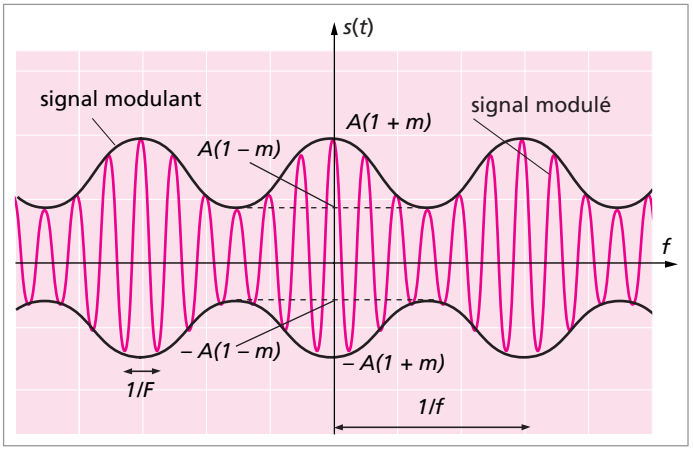


En développant $s(t)$, on obtient :

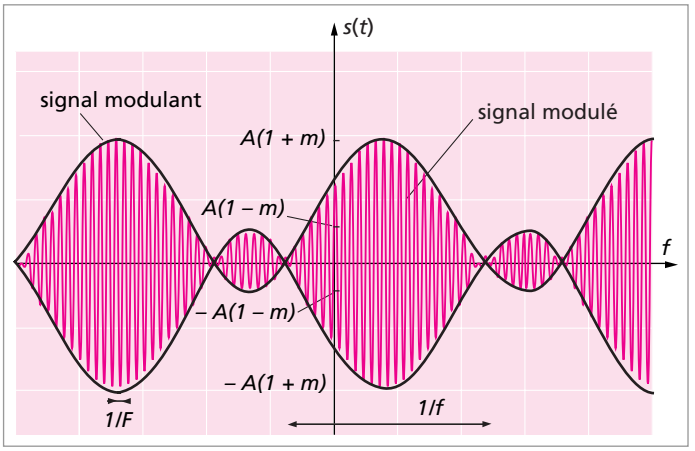
$$s(t) = A \cos \Omega t + (Am/2) \cos(\Omega + \omega)t + (Am/2) \cos(\Omega - \omega)t$$

Le spectre en fréquence est représenté ci-contre.

Si $m < 1$, on obtient une modulation « positive » :



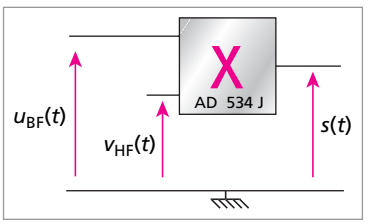
Si $m > 1$, on obtient une modulation « négative » :



L'inconvénient de ce type de modulation est que la puissance $P = \dfrac{(V_m U_m)^2}{2R}\left(1 + \dfrac{m^2}{2}\right)$ sert surtout à transmettre la porteuse. Son avantage est qu'il est inutile de disposer de la porteuse lors de la réception.

• Mise en évidence expérimentale

Pour obtenir une modulation d'amplitude, le montage ci-contre est utilisé.



Avec

$u(t) = U_o + U_m \cos \omega t$, $\quad U_m = 4$ V, $\quad U_o = 5$ V et $f = 100$ Hz,

$v(t) = V_m \cos \Omega t$, $\quad V_m = 7$ V, $\quad F = 100$ kHz,

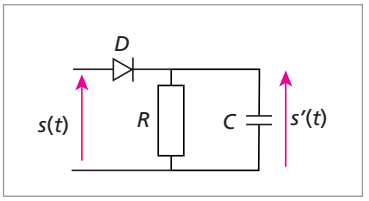
Le module AD 534 J est un multiplieur. $s(t)$ est visualisé sur l'oscilloscope et synchronisé sur la B.F. (gain 2V/div, balayage 2 ms/div).

On peut montrer que si U_m est trop importante, on obtient une modulation négative.

On peut faire varier U_o, U_m et V_m pour montrer la modulation avec ou sans porteuse puis f et F pour montrer les conditions d'une bonne modulation.

• Démodulation à diode ou montage « détecteur de crête »

Ce type de démodulation n'est utilisable que pour la modulation positive avec porteuse ($m < 1$).

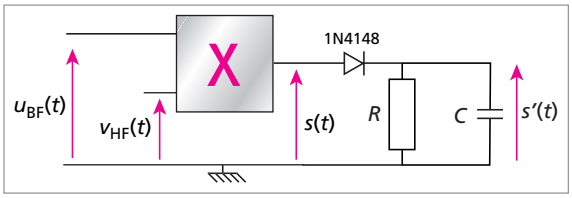


Les conditions d'une bonne démodulation sont :

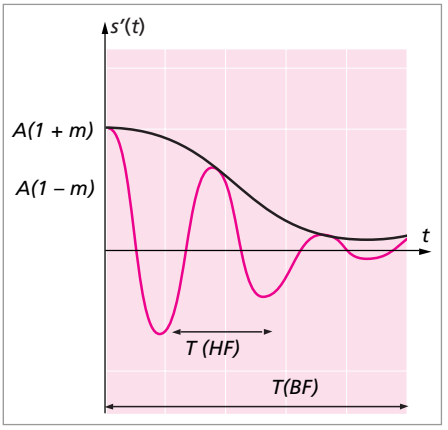
$$T(\text{HF}) \ll RC \ll T(\text{BF})$$

De plus la diode doit être une diode rapide : t_{on} et $t_{off} \ll T(\text{HF})$. Enfin sa tension seuil V_s doit être telle que $Vs < A(1 - m)$.

Exemple : le montage complet de modulation-démodulation est ci-dessous :



La diode 1N4148 est une diode rapide. Quand $s(t) > 0$ et que $ds/dt > 0$, la diode est passante, le condensateur se charge, $s'_{max}(t)$ vaut amplitude de $s(t)$: $s'_{max}(t) = A(1 + m\cos\omega t)$. Quand $s(t) > 0$ et que $ds/dt < 0$, le condensateur ne peut pas se décharger dans R puisque $RC \gg T(\text{HF})$. Il n'a pas le temps de se décharger dans R avant le début de la décharge suivante.
D'où l'allure de $s'(t)$ ci-contre.



• Démodulation par détection synchrone
On multiplie $s(t)$ par la porteuse et on ajoute un filtre passe-bas. Cette méthode est idéale lorsque les signaux reçus sont faibles et elle fonctionne également dans le cas d'une modulation négative avec porteuse ou bien sans porteuse.

• Démodulation BLU
On supprime une bande latérale par filtrage.

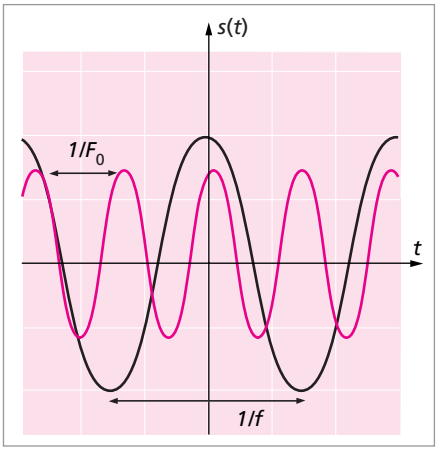
5.3. Modulation de fréquence

• Principe
Le signal modulant BF est : $s_m(t)$. La porteuse HF possède la pulsation Ω_o. Le signal modulé s'écrit :

$$s(t) = A_o \cos[\Omega_o t + \varphi(t)] = A_o \cos[\theta(t)]$$

La pulsation instantanée du signal modulé est définie par :

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \Omega_o + \frac{d\varphi}{dt}$$



Deux cas sont à envisager :

– $\varphi(t) = k s_m(t)$: $\varphi(t)$ est proportionnel au signal modulant BF : c'est la modulation de phase (non traitée ici),

– $\varphi(t) = 2\pi k \int_0^t s_m(t)\mathrm{d}t$: c'est la **modulation de fréquence**, on en déduit : $\Omega = \Omega_o + 2\pi k s_m(t)$, ce qui justifie le nom de cette modulation.

Le signal modulé s'écrit alors :

$$s(t) = A_o \cos[\Omega_o t + 2\pi k \int_0^t s_m(t)\mathrm{d}t]$$

Si le signal modulant est sinusoïdal, $s_m(t) = A_m \cos \omega t$, le signal modulé s'écrit :

$$s(t) = A_o \cos[\Omega_o t + \frac{2\pi k A_m}{\omega} \sin \omega t]$$

On définit :

– l' excursion crête de pulsation $\Delta\Omega = 2\pi k A_m$ telle que $\Omega_o - \Delta\Omega < \Omega(t) < \Omega_o + \Delta\Omega$,

– l' excursion crête de fréquence $\Delta F = k A_m$ telle que $F_o - \Delta F < F(t) < F_o + \Delta F$

$$\Omega(t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \Omega_o + 2\pi f A_m \cos \omega t = \Omega_o + \Delta\Omega \cos \omega t$$

$$F(t) = F_o + \Delta F \cos \omega t$$

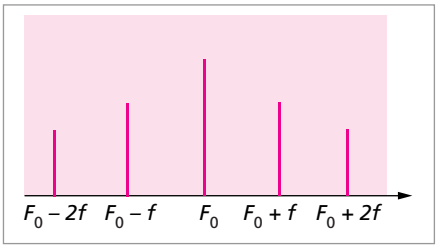
On appelle « **indice de modulation** » le coefficient $\beta = \frac{2\pi k A_m}{\omega} = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f}$, d'où $\Delta F = \beta f$

Finalement : $s(t) = A_o \cos[\Omega_o t + \beta \sin \omega t]$.

• Analyse spectrale

D'après la règle de Carson, 98 % de la puissance du signal est transmise dans la bande de fréquence $F(t)$:

$$F_o - (\beta + 1)f \leqslant F(t) \leqslant F_o + (\beta + 1)f$$



La bande passante est donc définie par $B = 2(\beta + 1)f$.

En pratique, une station FM dispose d'une bande de largeur $\Delta F = 75$ kHz, donc $\beta = \frac{\Delta F}{f} \approx \frac{75}{f}$ et $B \approx 200$ kHz.

La fréquence F_o de la porteuse doit donc être très élevée : $F_o \approx 100$ MHz.

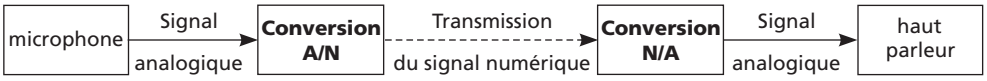
Le facteur de qualité vaut alors $Q = \frac{F_o}{\Delta F} = \frac{10^8}{2.10^5} = 500$.

➜ **Voir exercices 26 à 27.**

6. Conversions numérique-analogique et analogique-numérique

6.1. Généralités sur la conversion

• Principe



• Avantages du signal numérique

– Le rapport signal/bruit est meilleur car il n'y a que deux valeurs possibles.

– Le stockage est possible (*cf.* oscilloscopes à mémoire qui sont tous numériques).

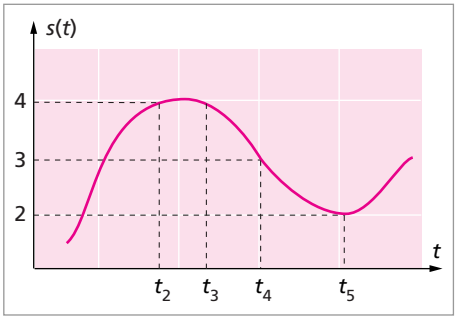
– La mise au point (adaptation d'impédance) est plus facile car il prend deux valeurs seulement.

• Étapes d'une conversion A/N

– Échantillonnage périodique du signal analogique aux dates t_o, t_1, t_2, t_3, t_4,. . ., t_i.

– Quantification : lecture arrondie de la tension analogique aux dates précédentes : $s(t_i)$.

– Codage : passage du système décimal au système binaire, par exemple, pour $s(t_i)$.



Exemple :
$s(t_2) = 4 \rightarrow [1, 0, 0]$ (en binaire)
$s(t_3) = 4 \rightarrow [1, 0, 0]$
$s(t_4) = 3 \rightarrow [0, 1, 1]$
$s(t_5) = 2 \rightarrow [0, 1, 0]$

• Les différents codes : le système de numérotation est fixé par une base B qui contient donc B caractères distincts.
Le système décimal : B = 10 donc 10 caractères : 0, 1, . . ., 8, 9. Un nombre N s'exprime en fonction des puissances de 10.

Exemple : $852 = 8.10^2 + 5.10^1 + 2.10^0$. Ici les chiffres 8, 5 et 2 ont un poids différent. Chaque puissance de 10 constitue un **digit** : ici 852 nécessite 3 digits.

Le système binaire : B = 2 donc 2 caractères : 0, 1. Un nombre N s'exprime en fonction des puissances de 2.

Exemple : $852 = 1.2^9 + 1.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^6 + 0.2^0$
$852 \rightarrow [1101010100]$ nécessite 10 **bits** (le bit est ici équivalent au digit en base 10)

Le premier bit (à gauche) représente le « most significant bit » ou encore le MSB. Le dernier bit (à droite) représente le « less significant bit » ou encore le LSB.
Si un nombre N nécessite n_{10} digits en base 10 et n_2 bits en base 2 : $n_{10} = n_2 \log 2$.
Le code DCB ou « décimal codé binaire » pour lequel le nombre de bits est réduit. Chaque caractère décimal (0 à 9) est codé en binaire séparément. L'encombrement de chaque bit est plus grand, mais la lecture est plus facile.

Exemple : $N = 852 \rightarrow [1000, 0101, 0010]$.

Codage du signe : on ajoute à gauche un bit de signe, qui devient le MSB. On choisit, par convention : 0 pour +, 1 pour −.

Exemple : $+852 \rightarrow [0, 1000, 0101, 0010]$ ou bien $-852 \rightarrow [1, 1000, 0101, 0010]$ en DCB.

Autres codes dérivés du binaire : les codes pondérés (qui minimisent le nombre de bits), le code de Gray (utilisé comme détecteur d'erreur),...

6.2. Conversion numérique-analogique (CNA)

Soit N un nombre décimal représenté en binaire par $(n+1)$ bits. N s'écrira en binaire : $[A_n, A_{n-1}, \ldots, A_k, \ldots, A_1, A_0]$ avec $A_k = 0$ ou 1.

Donc $N = A_n 2^n + A_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + A_k 2^k + \cdots + A_1 2^1 + A_0 2^0 = \sum_0^n A_k \, 2^k$

Le but de la conversion est de passer des $(n+1)$ poids A_k, qui valent « 0 » ou « 1 », à une grandeur électrique proportionnelle à N.
Le principe est toujours le même, quelle que soit la méthode : générer des courants d'intensités proportionnelles aux poids des bits à convertir. Puis, après sommation de ces courants, faire une conversion courant → tension pour obtenir la valeur analogique de sortie.
Deux méthodes principales sont utilisées et étudiées classiquement :

- le convertisseur à sommation de courant, appelé encore à réseau de résistances pondérées ou plus simplement à résistances pondérées ;
- le convertisseur à réseau en échelle, appelé encore à réseau R − 2R (éventuellement inversées).

Ces méthodes sont traitées dans les exercices de ce chapitre.

Application : création d'un signal en dents de scies ; amplification dont le gain est commandé numériquement ; modulation d'amplitude numérique ; réglage numérique de l'amplitude d'un signal audio.

Évolution des CNA : Les structures des CNA mentionnés ci-dessus comportent toutes des résistances montées en parallèle. Il existe également des architectures qui se prêtent mieux à une intégration sur silicium en technologie CMOS : elles comportent des résistances ou des condensateurs en série : leur surface est plus petite mais le temps de réponse plus important.

6.3. Conversion analogique numérique (CAN)

Deux méthodes principales sont utilisées et étudiées classiquement :

- le convertisseur à rampe numérique (simple ou double rampe) ;
- le convertisseur à approximations successives.

Elles sont traitées dans les exercices de ce chapitre. Les diverses techniques utilisées permettent d'atteindre des caractéristiques différentes :

- la meilleure précision est obtenue avec un CAN contenant un intégrateur (rampe numérique) ;
- le plus économique et le plus rapide est obtenu avec des CAN utilisant des CNA ;
- le plus rapide est obtenu avec un CAN flash (parallèle).

Applications : traitement numérique : FFT, filtrage ; transmission numérique (modulation) ; voltmètre numérique, ...

➜ **Voir exercices 28 à 30.**

ÉNONCÉS

Diodes

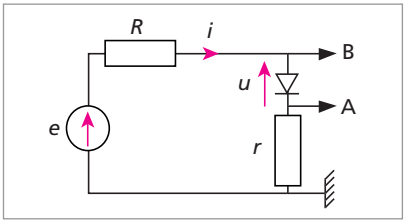
Exercice 1 Caractéristique d'une diode

Pour observer simultanément le courant dans une diode et la tension à ses bornes, à l'aide d'un oscilloscope, on utilise le montage suivant dans lequel :

- la résistance $R = 100\ \Omega$ sert à protéger la diode ;
- la résistance $r = 1\ \Omega$ sert à la visualisation du courant.

On observe ainsi :

- sur la voie A, la tension $u_A = ri$, image du courant dans la diode ;
- sur la voie B, la tension $u_B = ri + u \approx u$, car $ri \ll u$, image de la tension aux bornes de la diode.



Le générateur délivre un signal alternatif, triangulaire, de tension crête à crête égale à 10 V et de période 1 ms.

1. Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants : voie A : 50 mV/cm, voie B : 2 V/cm. La diode est supposée idéale ($V_s = 0$ V, $r_d = 0\ \Omega$).

1.a. Calculer les valeurs extrêmes des intensités du courant.

b. Représenter en vraie grandeur les oscillogrammes $u_A(t)$ et $u_B(t)$.

c. Mêmes questions si la diode est réelle mais linéarisée ($V_s = 0{,}6$ V, $r_d = 10\ \Omega$).

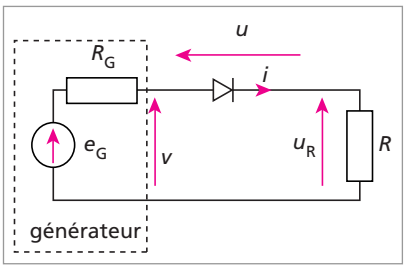
2. On remplace la tension de balayage interne par la tension $u_B(t)$ (fonctionnement en XY). Représenter la nouvelle courbe observée dans le cas où :

- la diode est idéale ;
- la diode est réelle mais linéarisée ($V_s = 0,6$ V, $r_d = 10\ \Omega$).

Exercice 2 Redressement simple alternance

Dans le circuit ci-contre $R = 70\ \Omega$, la diode est supposée parfaite et le générateur, de résistance $R_G = 10\ \Omega$, délivre une f.e.m. $e_G(t)$ périodique, de fréquence 1 kHz, dont on peut choisir la forme et l'amplitude.

Dans un premier temps, on choisit une f.e.m. sinusoïdale de valeur efficace $E = 50$ V.



1. Calculer la période T et la valeur maximale E_{max} de la f.e.m. $e_G(t)$. Tracer l'allure de $i(t)$.

2. Tracer, en fonction du temps, l'allure des courbes $e_G(t)$, $u(t)$ et $v(t)$. Pourquoi cette dernière tension n'est-elle pas sinusoïdale ? Comment doit-on modifier la valeur de R pour que $v(t)$ soit sinusoïdale ?

3. Quelles sont les limites en courant I_{max} et en tension $u_{inv,\,max}$ que doit pouvoir supporter la diode pour ne pas être détruite ?

4. Déterminer l'expression du courant moyen I_{moy} et de la puissance moyenne P dissipée dans R, en fonction de E, R_G et R. Calculer numériquement I_{moy} et P. Exprimer et calculer l'intensité efficace I_{eff}, le facteur de forme F et le taux d'ondulation τ.

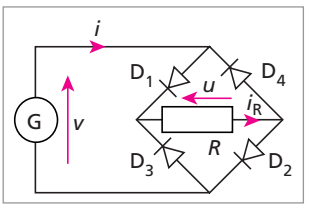
5. Le générateur délivre maintenant une tension en créneaux symétriques variant de v_{max} à $-v_{max}$ avec $v_{max} = 40$ V.

a. Tracer les courbes représentant $u_R(t)$, $u(t)$ et $v(t)$.

b. Calculer le courant moyen I_{moy}, le courant efficace I_{eff}, le facteur de forme, le taux d'ondulation et la puissance moyenne P dissipée dans R.

Exercice 3 Redressement double alternance (pont de Graetz)

Dans le circuit ci-contre, les diodes sont supposées idéales. Le générateur G fournit la tension sinusoïdale d'amplitude $E_G = 50$ V, de résistance interne $R_G = 0\ \Omega$ et de fréquence $f = 50$ Hz. De plus $R = 100\ \Omega$.



1. Montrer que, lorsque $v(t) > 0$, deux des diodes sont bloquées et deux des diodes sont passantes. Préciser lesquelles, ainsi que le sens des courants i et i_R.

2. Mêmes questions lorsque $v(t) < 0$.

3. Tracer les courbes représentant $i(t)$, l'intensité du courant traversant les diodes $i_d(t)$, $i_R(t)$ et $u(t)$. Comment seraient modifiées ces courbes si les diodes étaient toutes identiques mais réelles (v_s, r_d) ? Le cas des diodes idéales sera conservé par la suite.

4. Pourquoi ne peut-on pas, sur un oscilloscope, visualiser simultanément $v(t)$ et $u(t)$? Que faudrait-il ajouter au montage pour le faire ?

5. Calculer $I_{R\,moy}$, $I_{R\,eff}$, le facteur de forme et le taux d'ondulation. Les comparer au cas du redressement simple alternance.

6. La protection des diodes est-elle assurée si l'une d'entre elles est mal branchée ?

Exercice 4 Lissage après redressement double alternance

Dans le montage précédent, on ajoute un condensateur de capacité C en parallèle sur la résistance R.

1. Comment est modifiée l'allure de la courbe $u(t)$? On distinguera deux régions : celle où $u(t)$ croît, soit entre t et t_1, et celle où $u(t)$ décroît, soit entre t_1 et t_2.

2. Entre t et t_1, donner l'expression de $u(t)$ en fonction de R, C, t, t_1 et E_{max}.

3. Comment doit-on choisir C pour obtenir un bon lissage ? Entre t_1 et t_2, quelle est approximativement la durée du phénomène observé en fonction de la période T du générateur ?

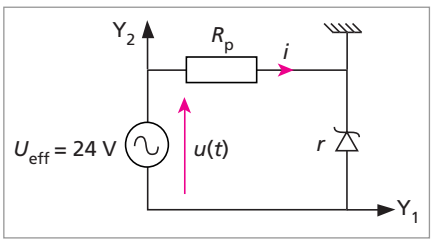
4. En déduire l'amplitude d'oscillation de $u(t)$ puis son taux d'ondulation.

5. Proposez une valeur de C correcte. Peut-on choisir un condensateur électrochimique ?

6. Proposez une méthode de mesure de ce taux d'ondulation à l'aide d'un oscilloscope seulement et en utilisant ses touches AC et DC.

Exercice 5 Étude dynamique d'une diode Zener

La diode Zener du circuit ci-contre possède une tension seuil (sens direct) $V_s = 0{,}6$ V, une tension Zener (sens inverse) qui vaut $V_Z = 24$ V et une résistance dynamique $r = 2{,}6\ \Omega$ en inverse et en direct. La diode peut supporter une puissance maximale $P = 50$ W.



1. Calculer l'intensité maximale, en direct et en inverse, que peut supporter la diode. En déduire la valeur de R_p.

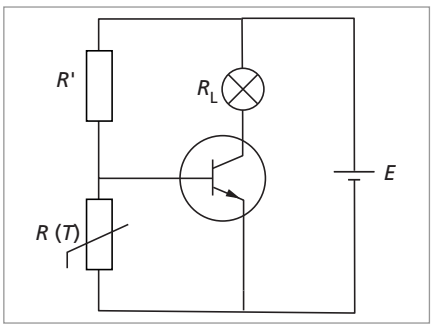
2. Représenter $u(t)$ ainsi que les oscillogrammes obtenus sur les voies Y_1 et Y_2.

Transistors

Exercice 6 Transistor et thermistance

Le transistor est un NPN dont le coefficient d'amplification en courant β vaut 100.

1. $R(T)$ est une thermistance PTC dont la résistance augmente avec la température. On désire qu'à 20 °C, le transistor soit bloqué ($V_{BE} < V_s < 0{,}6$ V) et donc que la lampe de résistance R_L soit éteinte. Puis, en élevant la température de $R(T)$, on désire que le transistor se sature et que la lampe R_L s'allume. On utilise une lampe 3,7 V - 0,3 A et un générateur parfait de f.e.m. $E = 3{,}7$ V.



a. Calculer la résistance R_L de la lampe

b. Exprimer la condition de blocage du transistor pour $T = T_a = 20$ °C. Sachant que $R(T_a) = 30\ \Omega$, calculer la valeur minimum qu'il faut donner à R'. Par la suite, on prendra $R' = 200\ \Omega$.

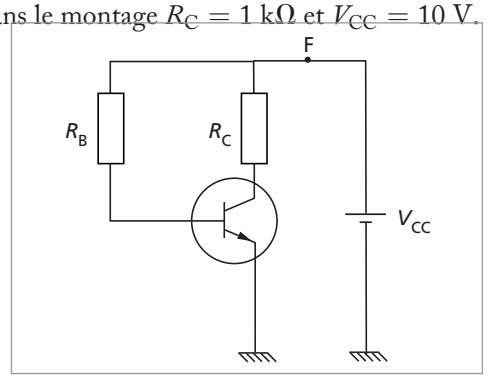
c. Exprimer la condition de saturation du transistor pour $T = T_b > T_a$ pour laquelle $R(T) = R(T_b)$. En déduire la valeur minimale de $R(T_b)$ à partir de laquelle la lampe s'allume.

2. Refaire le raisonnement en prenant une thermistance NTC dont la résistance diminue quand la température augmente et qui vaut $R(T_a) = 1\ \text{k}\Omega$ à 20 °C. On désire inversement qu'à 20 °C la lampe soit allumée puis qu'elle s'éteigne lorsque la température s'élève. On calculera R' et la valeur de $R(T_b)$ à partir de laquelle lampe s'éteint.

Exercice 7 Transistor amplificateur : montage émetteur commun

Montage de base

1. Polarisation du transistor : le transistor NPN est caractérisé par sa résistance d'entrée $r = 500\ \Omega$, sa résistance de sortie $\rho = 10\ \text{k}\Omega$, son coefficient d'amplification en courant $\beta = 100$ et sa tension seuil $V_{BE} = 0{,}6$ V. Dans le montage $R_C = 1\ \text{k}\Omega$ et $V_{CC} = 10$ V. On désire que le point de fonctionnement se trouve au milieu de la droite de charge. Pourquoi ?



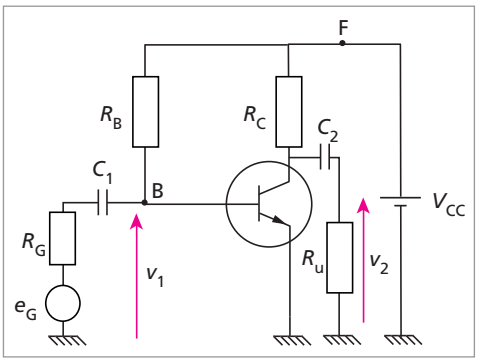
a. Calculer V_{CEo}, I_{co} et I_{Bo}.

b. Quelle valeur doit-on donner à R_B ? Dans la suite, on considèrera R_B comme infiniment grande devant les autres résistances.

2. Régime dynamique

Un générateur sinusoïdal G (e_G, R_G) fournit une tension $v_1 = v_{BE}$ entre la base et l'émetteur.

La tension de sortie v_2 est recueillie aux bornes d'une résistance de charge $R_u = 1\ \text{k}\Omega$. Les condensateurs de découplage C_1 et C_2 ont des impédances négligeables devant les résistances du montage. Leur présence est indispensable pour ne pas modifier le point de fonctionnement préalablement choisi, lorsque G et R_u sont ajoutés au montage.



a. Pour l'alternatif, à quel potentiel se trouve le point F du montage ? En déduire un schéma équivalent en alternatif (avec R_B infinie). Y représenter les courants d'entrée et de sortie i_1 et i_2.

b. Écrire les cinq équations de fonctionnement du montage en notation complexe. Deux de ces équations sont caractéristiques du transistor, l'une est liée au circuit d'entrée et les deux dernières sont liées au circuit de sortie.

c. Exprimer les impédances d'entrée et de sortie $\underline{Z_e}$ et $\underline{Z_s}$ du montage. Les calculer.

d. Exprimer le coefficient d'amplification en courant $\underline{A_i}$ en notation complexe. Le calculer. On appellera R_o la résistance équivalente au circuit de sortie ($R_o = R_u // R_C // \rho$).

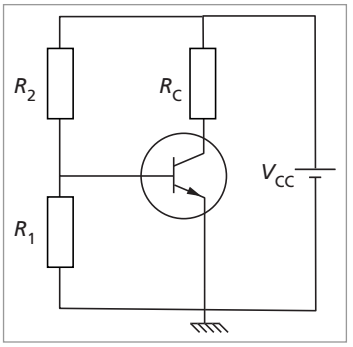
e. Même question pour l'amplification en tension $\underline{A_v}$.

f. Même question pour l'amplification en puissance $\underline{A_p}$. Pour quelle valeur de R_u cette amplification est-elle maximum ?

g. Comment seraient modifiées les réponses précédentes si on ne considérait plus R_B comme infiniment grande ?

Montage avec pont de base

On choisit $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ et on rappelle que $V_{BE} = 0{,}6\,\text{V}$.



3. Polarisation du transistor : on désire toujours que le point de fonctionnement se trouve au milieu de la droite de charge.

a. Calculer les intensités des courants dans les différentes branches.

b. En déduire la valeur de R_2.

4. Régime dynamique : le générateur d'attaque $G(e_G,\ R_G)$ et la résistance de charge R_u sont branchés respectivement sur la base et le collecteur, ainsi que les deux condensateurs de découplage C_1 et C_2.

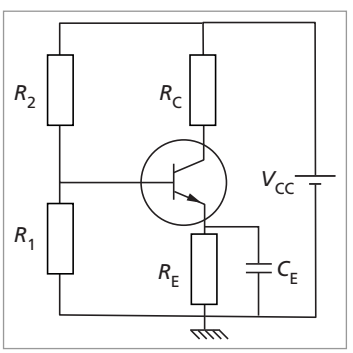
a. Schématiser le montage.

b. Donner son schéma équivalent pour l'alternatif.

c. En déduire les expressions de $\underline{Z_e}$, $\underline{Z_s}$, $\underline{A_i}$, $\underline{A_v}$ et $\underline{A_p}$. Il est inutile de refaire les calculs si l'on remarque qu'il suffit de remplacer R_B par $R_1/(R_1 + R_2)$ dans les expressions obtenues à la question 2.g.

Montage avec pont de base et résistance d'émetteur découplée

La présence de R_E permet de stabiliser plus aisément le montage précédent. La présence de C_E permet de rester en montage émetteur commun. $V_{CC} = 10$ V, $R_C = 1\,\text{k}\Omega$, $R_E = 100\ \Omega$, $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$.



5. Polarisation du transistor

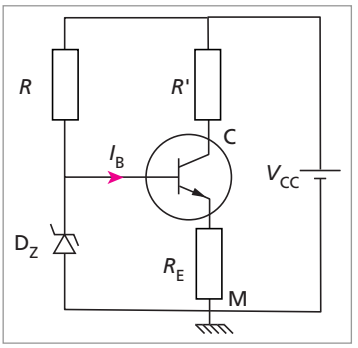
On désire toujours que $V_{CE} = V_{CC}/2$ et $V_{BE} = 0,6\,\text{V}$. Calculer les intensités dans les différentes branches. En déduire la valeur de R_2.

6. Régime dynamique

On ajoute les dipôles G(e_G, R_G), R_u, C_1 et C_2. À quel potentiel est porté l'émetteur pour l'alternatif ? Qu'en conclure pour les différents coefficients d'amplification ?

Exercice 8 Générateur de courant

Dans ce montage $V_{CC} = 15$ V et $R = 2{,}2$ kΩ. Le transistor est un 2N2222 (NPN supportant 0,5 W au maximum) et la diode Zener est caractérisée par $V_Z = 3{,}6$ V.
On suppose que $V_{BE} = 0{,}6$ V et que $I_B \ll I_Z$.



1. Déterminer l'intensité du courant I_Z et les puissances dissipées dans la diode et dans la résistance R.

2. R_E peut varier de 1 kΩ à 101 kΩ.

a. Si $I_B \ll I_E$, exprimer I_C (en mA) en fonction de R_E (en kΩ).

b. Expliquer pourquoi ce dispositif est un générateur de courant.

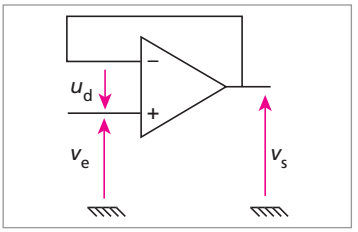
c. On adopte $R_E = 1$ kΩ. Sachant que la valeur minimale de V_{CE} est de 0,4 V, dans quel intervalle peut varier la résistance R' pour assurer un bon fonctionnement du dispositif ?

Amplificateur opérationnel en régime linéaire

Dans tous les exercices suivants, l'A.O. sera toujours considéré comme idéal si aucune précision supplémentaire n'est indiquée.

Exercice 9 Montage suiveur

L'A.O. est ici réel et possède un coefficient d'amplification $A_D = 10^5$, une résistance d'entrée différentielle $R_e = 100$ kΩ et une résistance de sortie $R_s = 10$ Ω. La tension u_d entre sa borne inverseuse et sa borne non inverse est différente de zéro.



1. Tracer la caractéristique statique de transfert de l'A.O. ainsi que la caractéristique $v_s = f(u_d)$ du montage suiveur. Combien de points de fonctionnement existent ?

2. Qu'en serait-il si les entrées E^- et E^+ étaient permutées ?

3. Donner le schéma équivalent de l'A.O. lorsque celui-ci est relié à une résistance de charge $R_u = 1$ kΩ et qu'il fonctionne en régime linéaire.

4. Exprimer l'amplification de tension $A_v = v_s/v_e$ en fonction de A_D, R_s et R_u. La calculer. On fera l'hypothèse : $i_e \ll i_s$.

5. Exprimer et calculer l'impédance d'entrée $Z_e = v_e/i_e$.

6. Exprimer et calculer l'impédance de sortie $Z_s = v_s/i_s$ quand $v_e = 0$.

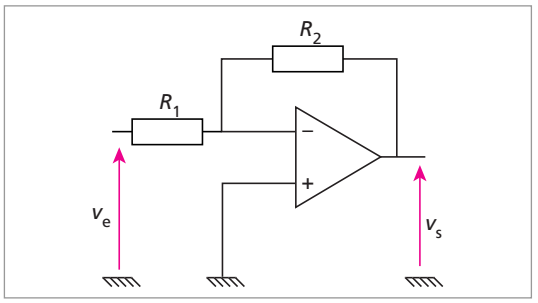
7. La tension v_e est fournie par un générateur de f.e.m. e_g et de résistance interne R_g.

a. Si ce générateur alimentait directement R_u, que vaudrait v_s ?

b. On interpose l'A.O. suiveur entre le générateur et R_u. Que vaut v_s ? Quel est l'intérêt d'un tel montage ?

Exercice 10 Montage amplificateur inverseur

$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$; $R_2 = 100\ \text{k}\Omega$.



1. L'A.O. étant supposé idéal, exprimer et calculer l'amplification en tension A_o, le gain en tension, la résistance d'entrée et la résistance de sortie du montage ci-contre.

2. L'A.O. n'est plus considéré comme idéal : son amplification différentielle vaut $A_D = 10^5$ bien que sa résistance d'entrée reste infinie et que sa résistance de sortie reste nulle. En utilisant le théorème de Millman entre la borne inverseuse et la masse, exprimer l'amplification en tension A_v en fonction de A_D, R_1 et R_2, puis de A_D et A_o. Ce résultat est-il compatible avec le résultat précédent ?

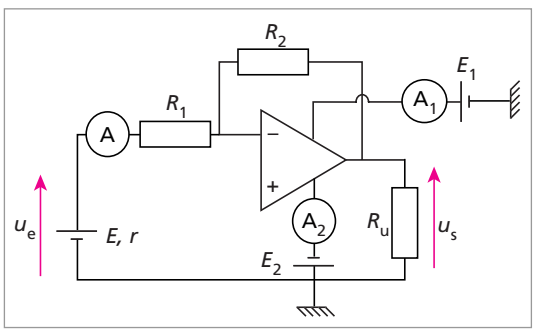
3. Pour des signaux sinusoïdaux, l'amplification différentielle varie selon la fonction : $A'_D = \dfrac{A_D}{1 + j\dfrac{f}{f_o}}$ avec $A_D = 10^5$ et $f_o = 12{,}5$ Hz.

a. Exprimer la nouvelle amplification A'_v en fonction de A_o, A_D, f et f_o.

b. Tracer le diagramme de Bode correspondant.

c. Calculer la fréquence de coupure à -3 dB.

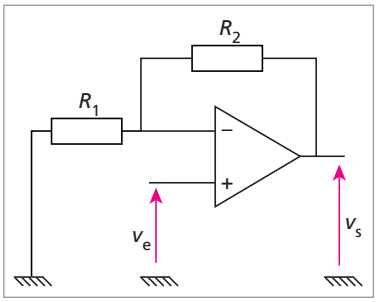
4. Ce montage est maintenant étudié pour faire le bilan de puissance de l'A.O. réel.
Le montage entier et les mesures réalisées sont les suivants :
$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 100\ \text{k}\Omega$,
$R_u = 1\ \text{k}\Omega$.
$U_e = 0{,}607$ V, $E_1 = 15{,}32$ V, $E_2 = 15{,}02$ V, $I = 0{,}06$ mA, $I_1 = 8{,}9$ mA, $I_2 = 2{,}8$ mA, $U_s = 6{,}00$ V.
Calculer :



- la puissance P_e fournie par le générateur d'entrée ;
- les puissances P_1 et P_2 fournies par les générateurs d'alimentation de l'A.O. ;
- la puissance P_s fournie à la résistance de charge R_u.

En déduire le rendement total en puissance du montage. Conclure.

Exercice 11 Montage amplificateur non inverseur



1. L'A.O. ci-contre fonctionne-t-il en régime de saturation ou en régime linéaire ?

2. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H} = v_s/v_e$ du quadripôle. Discuter le nom du montage.

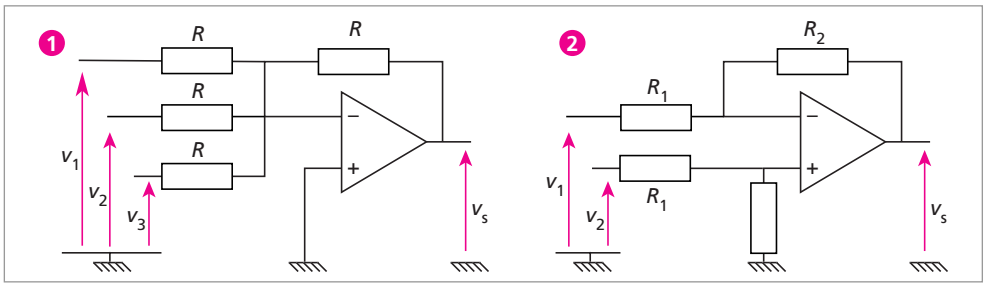
3. On désire obtenir un gain en tension de 20 dB en prenant $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$. Calculer R_2.

4. Le quadripôle est commandé par un générateur de f.e.m. $e_G = 1\ \text{V}$ et de résistance interne $R_G = 10\ \Omega$. Il est relié à une charge résistive $R_u = 1\ \text{k}\Omega$.

a. Calculer les puissances consommées à l'entrée et à la sortie du quadripôle. Discuter.

b. La tension de sortie v_s ne doit pas dépasser $V_{sat} = 15\ \text{V}$; le courant de sortie ne doit pas dépasser $i_{s,\,max} = 5\ \text{mA}$. Quelles sont alors les limites imposées sur e_G et R_u ?

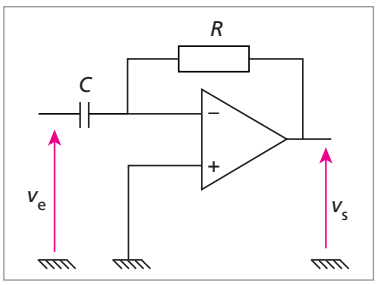
Exercice 12 Montages opérationnels



1. Exprimer v_s en fonction des tensions d'entrée et des résistances dans ces deux montages.

2. Quelles sont les fonctions réalisées par ces montages ? On prendra $R_1 = R_2$ dans le second montage.

Exercice 13 Montage dérivateur



1. En régime variable quelconque, quelle relation relie v_s et v_e ? Justifier le nom du montage.

2. En régime sinusoïdal, exprimer la fonction de transfert. Donner le diagramme de Bode correspondant.

3. Quel est l'inconvénient de ce montage aux très hautes fréquences (THF) ?

4. Pour y remédier, on introduit une résistance R' en série avec C. Exprimer la nouvelle fonction de transfert et donner le diagramme de Bode correspondant ($R' < R$).

Exercice 14 Montage intégrateur

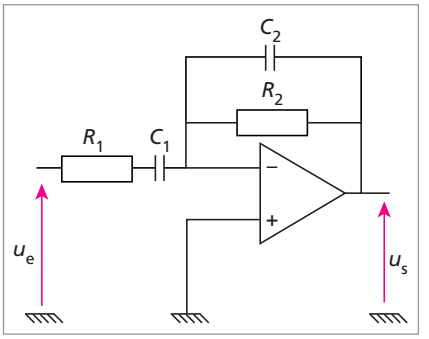
Dans le montage de l'exercice 13, inverser les positions de R et C et répondre aux mêmes questions. On remplacera « THF » par « TBF » et on précisera comment monter la résistance R'.

Exercice 15 Filtres

1. Dessiner le schéma équivalent du montage ci-contre aux basses fréquences. Quelle est la fonction réalisée ?

2. Même question aux hautes fréquences.

3. Exprimer la fonction de transfert et tracer le diagramme de Bode avec $R_2 = 10R_1$ et $C_1 = 100C_2$. Quel type de filtre obtient-on ? Préciser les pulsations de transition pour lesquelles le gain est nul ainsi que les pulsations de coupure à -3 dB.

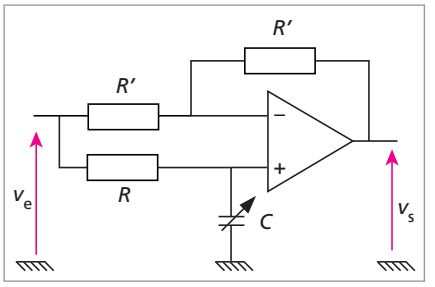


Exercice 16 Circuit déphaseur

1. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H} = v_s/v_e$.

2. Montrer que l'on a réalisé un circuit déphaseur dont le déphasage peut être ajusté en modifiant la valeur de C.

3. Calculer la valeur de C pour laquelle la tension de sortie est en quadrature retard par rapport à la tension d'entrée, quand $R = 1$ kΩ et $R' = 10$ kΩ et pour une fréquence égale à $100\,\pi$ Hz.



Exercice 17 Convertisseur tension-courant. Générateur de courant

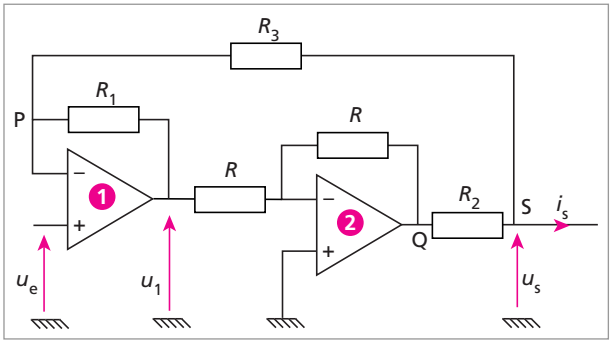
1. Que vaut le potentiel du nœud P ? Écrire la loi des nœuds en P en fonction de u_E, u_1, u_s, R_1 et R_3.

2. Quelle est la fonction réalisée par l'A.O.2 ? Quel est le potentiel du nœud Q ? Écrire la loi des nœuds en S.

3. Déduire l'expression du courant de court-circuit i_{sCC}, obtenu lorsque $u_s = 0$, en fonction de u_E et des résistances du montage.

4. Déduire la tension de sortie en circuit ouvert u_{so}, obtenue lorsque $i_s = 0$, en fonction de u_E et des résistances du montage.

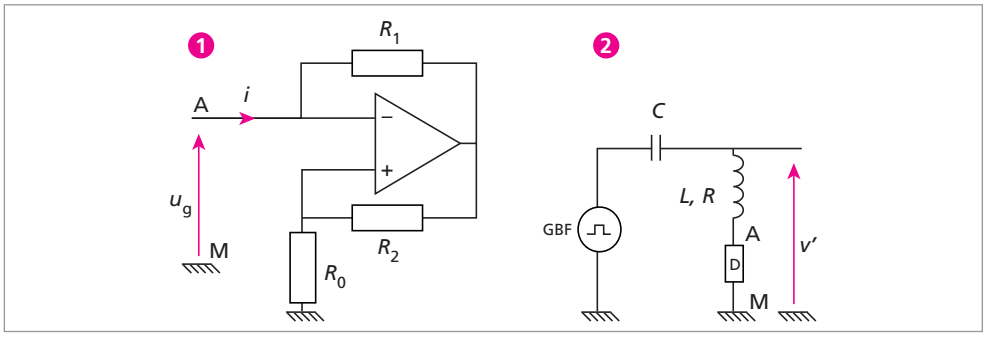
5. Déduire des résultats précédents les éléments du générateur de Norton équivalent à l'ensemble du montage, vu entre le nœud S et la masse.



6. Quelle condition faut-il remplir pour obtenir ainsi une source de courant parfaite commandée par la tension u_E ? Quelle est alors l'expression de l'intensité du courant débité par cette source ?

Exercice 18 Montage à resistance négative

Ce montage fournit un générateur de tension proportionnelle à l'intensité du courant débité.



1. Étude du montage de la figure 1

a. Quelle relation lie u_g à i ?

b. Dessiner la caractéristique $u_g = f(i)$ d'un tel générateur.

c. Préciser ses limites d'utilisation (limites du régime linéaire, pentes, domaines d'intensité).

d. Quelle serait la résistance du dipôle vu des bornes A et M ? On appellera (D) le dipôle ainsi constitué.

2. Étude du montage de la figure 2

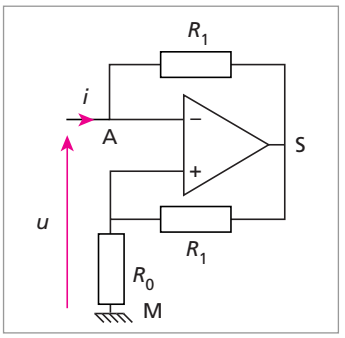
a. On branche (D) aux bornes d'un circuit R, L, C série. Qu'observera-t-on, selon les valeurs de R ? D'où provient l'énergie ?

b. Dans ce montage, $L = 50$ mH, $R = 60\ \Omega$, $C = 0{,}1\ \mu$F, $R_o = 800\ \Omega$, $R_1 = 100\ \Omega$ et $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$.

– Calculer la résistance critique R_C du circuit.
– En comparant la résistance totale du circuit à sa résistance critique, décrire $v'(t)$.
– Montrer que, pour une valeur R_{om} de R_o, l'amortissement du circuit est supprimé.
– $R_o = R_{om}$, que se passe-t-il si on supprime le générateur ? D'où provient l'énergie dissipée dans les conducteurs ohmiques ?

Exercice 19 Modélisation d'un oscillateur électrique par l'équation de Van Der Pol

Soit le montage à « résistance négative » ci-contre.



1. Retrouver rapidement l'équation de sa caractéristique $u = f(i)$ lorsque l'A.O. fonctionne en régime linéaire et en régime de saturation. Tracer $u = f(i)$.

2. L'ensemble de cette caractéristique peut être modélisée par une équation unique :

$$u = ai + bi^3$$

Exprimer a et b en fonction de V_{sat} et des résistances du montage en faisant correspondre les abscisses des deux extréma de la courbe réelle et de la courbe modélisée. Que vaut l'écart entre ces deux courbes si l'on étudie les ordonnées de ces deux extréma ? Montrer que cet écart est négligeable si $R_1 \gg R_o$.

3. On relie ce montage, entre les bornes A et M, à un circuit r, L, C série.
Montrer que l'on obtient alors une équation différentielle sur i de la forme :

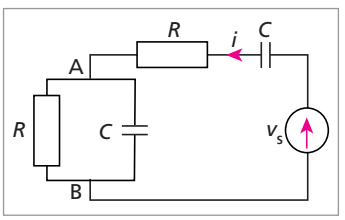
$$\frac{d^2i}{dt^2} - \varepsilon\omega_o\left(1 - \frac{i^2}{i_o^2}\right)\frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0$$

qui est appelée équation de Van Der Pol. Exprimer ε, i_o et ω_o en fonction des grandeurs du montage. À quelle condition obtient-on des oscillations ?

4. A.N. $R_1 = 2{,}2\ \text{k}\Omega$, $R_o = 230\ \Omega$, $r = 185\ \Omega$, $L = 0{,}5$ H, $C = 5{,}0\ \mu$F. Calculer ε et ω_o. Discuter le résultat obtenu.

Exercice 20 Alimentation d'un haut parleur (d'après CAPES 1995)

On considère le circuit représenté ci-contre : v_s est une tension de forme quelconque fournie par une source supposée parfaite. On désigne par i l'intensité du courant qui circule dans l'association $R - C$ série et par v_e la tension $V_A - V_B$.



1.a. Établir la relation qui existe entre i, v_e et dv_e/dt.

b. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $v_e(t)$.

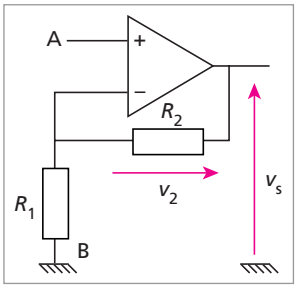
2. Le générateur de tension v_s est en fait une source commandée de telle façon que l'on ait : $v_s = Gv_e$ où G est une constante.

a. Écrire l'équation différentielle vérifiée par v_e. Pour quelle valeur de G cette équation admet-elle une solution sinusoïdale ?

b. Donner l'expression de la pulsation puis de la fréquence de cette solution.

c. Calculer la valeur de cette fréquence d'oscillation pour $C = 100$ nF et $R = 4{,}7$ kΩ.
On admet que, lorsque les conditions précédentes sont réalisées, il y a oscillation spontanée du circuit à la suite des régimes transitoires consécutifs à la mise sous tension.

3. Les conditions précédentes sont assurées par un amplificateur de tension dont l'entrée, d'impédance infinie, est branchée en AB. La sortie, d'impédance nulle, constitue la source de tension vs. L'amplificateur est réalisé suivant le schéma ci-contre où l'A.O. est idéal et fonctionne de façon linéaire dans le domaine -14 V < v_s < 14 V. On donne $R_1 = 55$ kΩ.



a. Quelle doit être la valeur de R_2 ?

b. Que se passe-t-il si accidentellement, G devient légèrement inférieur, puis supérieur à la valeur trouvée plus haut ?

4. Pour stabiliser l'oscillateur, on remplace la résistance R_2 par une varistance VDR, dont la résistance diminue lorsque la différence de potentiel v_2 à ses bornes augmente. Les couples de valeurs numériques caractérisant la VDR sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

R_2 en kΩ	238	185	150	126	106	90	74	51	37
v_2 en V	4	5	6	7	8	9	10	12	14

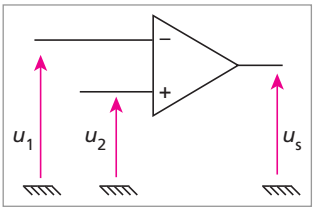
a. Déterminer l'expression de v_s en fonction de G et de v_2.

b. En déduire les valeurs numériques de G et de v_s pour les différentes valeurs numériques de v_2 données.

c. Tracer la courbe $G(v_s)$. En déduire la valeur de l'amplitude de l'oscillation fournie par le montage ; montrer que le système est bien stabilisé par la présence de la VDR.
Un tel montage constitue seulement le point de départ d'une alimentation pour haut-parleur : il faut bien entendu insérer un amplificateur de puissance entre le circuit oscillant et le haut-parleur.

A.O. en régime de saturation

Exercice 21 Montage comparateur



1. Justifier le nom du montage.

2. On considère les valeurs suivantes : $V_{sat} = 15$ V, $u_2 = 5$ V et -10 V $< u_1(t) < +10$ V.

a. Tracer $u_s = f(u_1)$.

b. Schématiser le montage permettant de visualiser cette courbe sur l'oscilloscope.

3. $V_{sat} = 15$ V, $u_2 = -5$ V et -10 V $< u_1(t) < +10$ V. Tracer $u_s = f(u_1)$.

4. $V_{sat} = 15$ V, $u_2 = 5$ V et $u_1(t) = 10 \sin \omega t$ avec $T = 3$ ms.

a. Représenter sur le même graphe $u_1(t)$ et $u_s(t)$.

b. Calculer la durée pendant laquelle $u_s = V_{sat}$.

c. Comment peut-on modifier cette durée ?

d. Quelle application connaissez-vous de ce résultat ?

e. Quel est son inconvénient aux hautes fréquences ?

Exercice 22 A.O. réel. Influence de la vitesse de balayage

Dans le montage comparateur précédent, alimenté comme à la question 4, les durées de commutation de l'A.O. ne sont plus négligeables. La vitesse limite de balayage (Slew Rate) de l'A.O. 741 utilisé vaut $S_r = 0{,}5$ V/µs.

1. Représenter $u_s(t)$ lorsque $T = 3$ ms.

2. Représenter $u_s(t)$ lorsque $T = 0{,}3$ ms.

3. Représenter $u_s(t)$ lorsque $T = 0{,}03$ ms.

4. Quelle est la fréquence limite au-delà de laquelle u_s n'atteindra pas les valeurs de la saturation ?

Exercice 23 Montage comparateur-inverseur

Dans le schéma de la figure 1 : $R_{1max} = R_2 = 10$ kΩ et $V_{sat} = 15$ V.

1. La tension u_1 est constante.

a. Établir l'expression de u_2 en fonction de R_1 et R_2.

b. $R_1 = 4$ kΩ et $u_1 = 5$ V. Calculer u_2 et u_s.

2. $u_1(t)$ est une tension en dent de scie représentée sur la figure 2.

a. Représenter le graphe de $u_s(t)$ lorsque $u_2 = 4$ V.

b. Déterminer le rapport cyclique du signal de sortie dans ces conditions.

c. Entre quelles limites doit varier R_1 pour que ce rapport cyclique varie entre 0 et 1 ?

3. $u_1(t) = 10 \sin \omega t$ avec $f = 100$ Hz et $u_2 = 0$ V. Les tensions $u_1(t)$ et u_s sont visualisées sur un oscilloscope dont le calibre de la base de temps vaut 2 ms/cm et la sensibilité vaut 5 V/cm sur les deux voies.

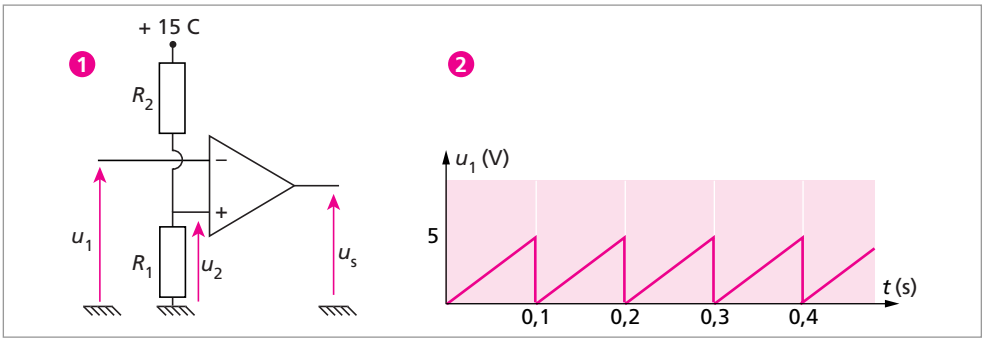
a. Représenter les oscillogrammes en vraie grandeur.

b. On supprime le balayage interne de l'oscilloscope, u_1 est appliquée sur la voie horizontale et u_s sur l'entrée verticale. Représenter la courbe obtenue. Justifier le nom du montage.

4. $u_1 = 6$ V et $u_2(t) = 10 \sin \omega t$. Les conditions d'observation sont les mêmes que précédemment.

a. Représenter les oscillogrammes obtenus.

b. Comment pourrait-on appeler le montage ainsi alimenté ?



Exercice 24 Déclencheur de Schmitt

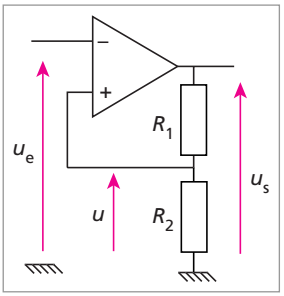
1. Exprimer u en fonction de R_1, R_2 et u_s.

2. Représenter et justifier la caractéristique de transfert $u_s = f(u_e)$ du montage.

3. Comment appelle-t-on le cycle obtenu ? Pourquoi ?

4. Si $R_1 = R_2 = 1$ kΩ et que $u_e = 10 \sin \omega t$, comment varie $u_s(t)$?

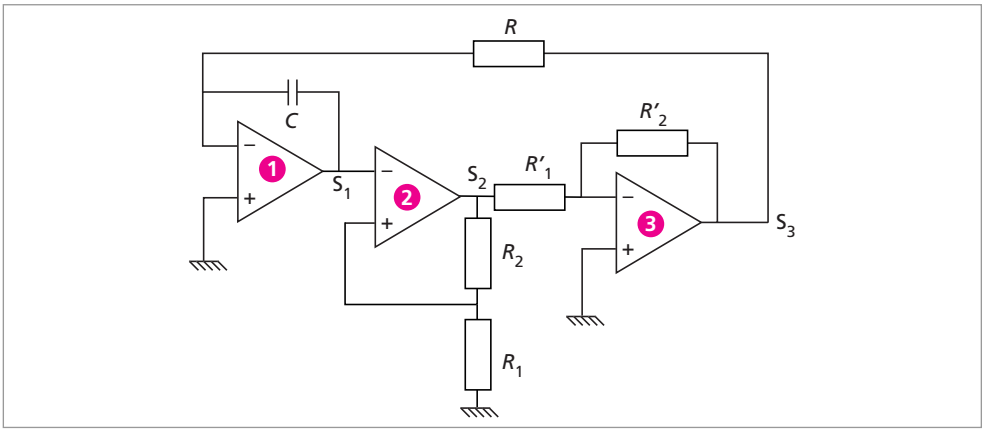
5. Quel est l'intérêt de ce montage par rapport au comparateur précédemment étudié ?



A.O. dans ses différents régimes

Exercice 25 Étude d'un oscillateur à relaxation

Dans le circuit ci-dessous, les éléments résistifs et capacitifs ainsi que les A.O. sont parfaits. L'A.O.2 fonctionne en régime de saturation et on appelle V_{sat} la tension de saturation.



1. Comment fonctionne le premier amplificateur opérationnel A.O.1 ?

2. Montrer que A.O.2. fonctionne en comparateur et préciser les conditions de basculement de la tension en S_2.

3. Quelle est la fonction de A.O.3 ?

4. Préciser la forme des signaux apparaissant en S_1, S_2 et S_3. Déterminer les expressions de leurs amplitudes crête respectives ainsi que leur période. À cette fin, on pourra commencer par considérer que, au temps $t = 0$, AO2 est en saturation haute, la tension en S_1 étant inférieure à $R_1 V_{sat}/(R_1 + R_2)$ et, sous ces hypothèses, en déduire les états de S_1 et S_3.

5. Les tensions de saturation haute et basse des A.O. étant respectivement + 12 V et − 12 V, déterminer un jeu possible de valeurs à adopter pour les composants passifs de manière que, simultanément :

a. le signal en S_1 ait une amplitude crête de 5 V ;

b. le signal en S_3 ait une amplitude crête de 10 V ;

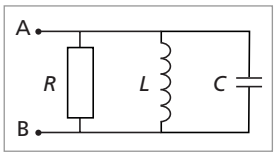
c. la fréquence des signaux soit voisine de 530 Hz.
À titre documentaire, on rappelle les valeurs nominales des résistances de la série E12 (avec une tolérance de ± 10%, la valeur en ohms est $R_n \times$ la puissance de 10 qui convient).

R_n	10	12	15	18	22	27	33	39	47	56	68	82	100

6. On dispose de diodes idéales. Modifier le montage pour qu'il fournisse maintenant un signal en dent de scies, la durée de montée et de descente étant respectivement de 5,3 ms et 530 µs environ.

Modulations

Exercice 26 Modulation d'amplitude



1. On étudie un dipôle en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω. Soit le circuit ci-contre considéré entre les points A et B.

a. Écrire l'expression de l'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle AB en fonction de R, L, C et ω.

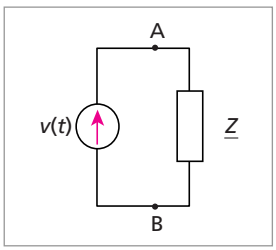
b. On pose $LC\omega_o^2 = 1$, $\omega/\omega_o = x$ et $Q = R/L\omega_o$. Exprimer le produit $\underline{Y}R$ sous la forme $(1 + jf(x, Q))$ où $f(x, Q)$ désigne une fonction simple de x et de Q.

c. En déduire l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle AB.

d. Préciser le comportement de ce dipôle aux basses fréquences et aux hautes fréquences : on donnera une interprétation physique du dipôle équivalent obtenu.

2. Utilisation du dipôle précédent

Le dipôle précédent est alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale $v(t) = V_o \cos \omega t$ et on note $i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi)$ l'intensité instantanée traversant le dipôle.



a. Écrire, sans démonstration, l'expression de I_o en fonction de V_o, R, Q et x.

b. Définir par analogie avec un circuit R, L, C série, les fréquences de coupure ; établir une relation entre ces fréquences et Q. Quel pourrait être un intérêt de ce dispositif ?

c. Quelle est l'expression du déphasage φ en fonction de x ? Tracer l'allure de la courbe représentative.

d. On utilise des pulsations très voisines de ω_o. Déterminer une expression approchée de l'intensité complexe $\underline{I}$ en fonction de V_o, Q, R, ω_o et $\delta\omega = \omega - \omega_o$.

3. Étude simplifiée d'une modulation d'amplitude : on considère une source de courant d'intensité $i(t)$ commandée par une tension $e(t)$ et chargée par l'impédance complexe étudiée précédemment. On se place en régime sinusoïdal forcé, pour des pulsations voisines de ω_o.

a. Rappeler la modélisation de cet opérateur par un schéma-bloc ainsi que la définition de la fonction de transfert caractéristique A.

b. Aux tensions d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ de cet opérateur, on associe les tensions complexes $\underline{E}$ et $\underline{S}$. Ecrire l'expression approchée de la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}$ en fonction de A (supposé constant), R, Q, ω_o et $\delta\omega$.

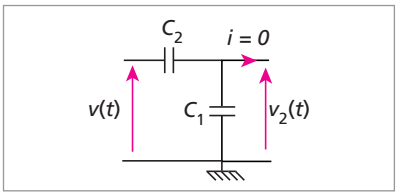
Le signal $e(t)$ est une tension sinusoïdale de pulsation ω_o, dont l'amplitude est modulée lentement par un signal sinusoïdal de pulsation $\Omega(\Omega \ll \omega_o)$. On note $e(t)$ sous la forme : $e(t) = E_o(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_o t$ où m est appelé le taux de modulation.

c. Représenter l'allure de la courbe $e(t)$ pour $m = 1/2$.

d. Préciser un montage électrique permettant l'obtention de signaux du type $s_o \cos \Omega t \cos \omega_o t$.

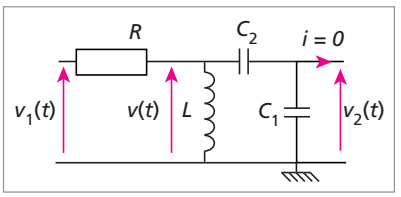
e. Montrer que le signal d'entrée peut être considéré comme la superposition de trois signaux dont on précisera les amplitudes et les pulsations.

Exercice 27 Principe d'un oscillateur à fréquence modulée (d'après CAPES 1996)



1. Soit le quadripôle ci-contre.
Dans ce montage, C_1 et C_2 sont les capacités de deux condensateurs ; $v(t)$ et $v_2(t)$ sont les tensions instantanées des tensions d'entrée et de sortie du quadripôle.
On suppose que le régime de fonctionnement du quadripôle est sinusoïdal de pulsation ω. On utilisera la notation complexe $\underline{V}$ pour l'amplitude complexe de la tension $v(t)$.

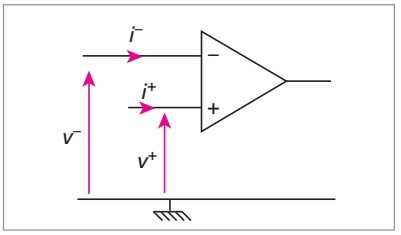
a. Donner le nom de ce montage classique et préciser son utilité. Exprimer le rapport $\underline{V_2}/\underline{V}$ en fonction de C_1 et C_2. Quelle relation existe-t-il entre les phases de $v_2(t)$ et de $v(t)$?



b. On considère maintenant le quadripôle ci-contre.
On reconnaît en partie dans cette représentation, le quadripôle précédent. Dans ce montage, $v_1(t)$ est la tension d'entrée du nouveau quadripôle. On note $\underline{Z}$ l'impédance complexe de l'ensemble formé de la bobine d'inductance L et des deux condensateurs (C_1 et C_2). Établir l'expression de $\underline{Z}$ en fonction de L, C_1, C_2 et ω.

c. Exprimer la rapport $\underline{V}/\underline{V_1}$ en fonction de R et $\underline{Z}$, puis en fonction de R, L, C_1, C_2 et ω.

d. En déduire l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \underline{V_2}/\underline{V_1}$ que l'on mettra sous la forme : $T(j\omega) = \dfrac{1}{a + \dfrac{1}{bj\omega} + dj\omega}$. Expliciter les coefficients a, b et d en fonction de R, L, C_1 et C_2. Quelles sont leurs dimensions ?

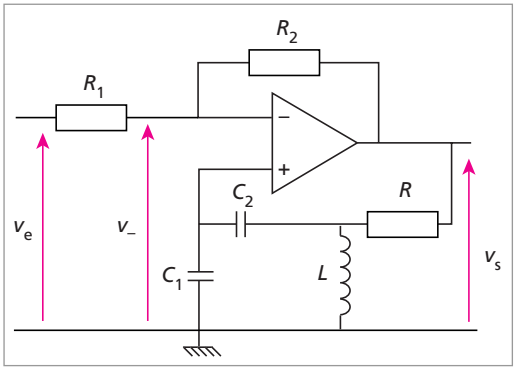


2. On envisage maintenant l'utilisation d'un amplificateur opérationnel, supposé idéal, en régime de fonctionnement linéaire. Dans ces conditions, on a $v_+ = v_-$ et $i_+ = i_- = 0$.
L'A.O. est inséré dans le montage ci-dessous. On remarquera la présence du quadripôle précédent dans ce montage.

a. On envisage un régime de fonctionnement sinusoïdal permanent.
Exprimer l'amplitude complexe $\underline{V_-}$ de deux manières différentes :

- tout d'abord en fonction de $\underline{V_e}$, $\underline{V_s}$, R_1 et R_2,
- puis en fonction de $\underline{T}$ et $\underline{V_s}$.

En déduire une relation entre $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$ faisant intervenir $\underline{T}$, R_1 et R_2.

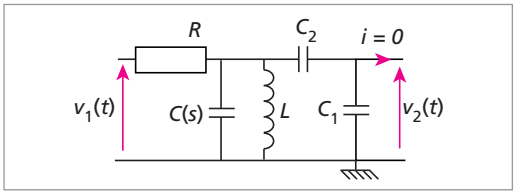


b. On relie maintenant R_1 directement à la masse, ce qui revient à annuler la tension d'entrée ($v_e = 0$).
Montrer que, sous certaines conditions, on peut malgré tout avoir $v_s(t)$ différente de zéro. Dans cette situation, $v_s(t)$ peut être une fonction sinusoïdale du temps. Exprimer la condition d'oscillation par une relation simple entre R_1, R_2, C_1 et C_2.
On pose $C' = C_1C_2/(C_1 + C_2)$. Exprimer la pulsation des oscillations en fonction de L et C'.

3. Étude d'un oscillateur à fréquence modulée.

a. Pour réaliser un tel oscillateur, on branche une diode à capacité variable (ou « varicap ») en parallèle sur la bobine d'inductance L.
Une varicap peut être assimilée à un condensateur dont la capacité $C(s)$ est fonction d'une grandeur s, susceptible de varier avec le temps. Ici $C(s) = As^n$ où A et n sont des constantes positives.
Le quadripôle représenté sur la deuxième figure de l'exercice est alors modifié selon le montage ci-dessous.
La fonction de transfert $\underline{T'}(j\omega)$ de ce nouveau quadripôle peut s'écrire :

$$\underline{T'}(j\omega) = \frac{1}{a' + \dfrac{1}{b'j\omega} + d'j\omega}.$$



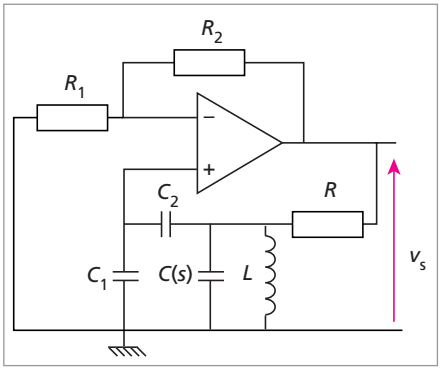
Expliciter les coefficients a', b' et d' en fonction de $C(s)$, R, L, C_1 et C_2, en remarquant qu'il suffit de remplacer l'impédance complexe de la bobine par celle de l'ensemble bobine et varicap en parallèle.

b. On reprend l'avant dernier montage, dans lequel $v_e = 0$, en y introduisant la varicap. On obtient le montage ci-après.
On fixe s à la valeur constante S_o, pour laquelle $C(S_o) = C_o$. Exprimer la pulsation ω_o de l'oscillateur en fonction de C_o, L, C_1 et C_2.
On impose maintenant $s(t) = S_o + \varepsilon\cos(\alpha t)$ où ε et α sont des constantes positives.

c. Sachant que $\varepsilon \ll So$, établir l'expression approchée au premier ordre de $C(t)$.

d. En déduire l'expression de la pulsation instantanée $\omega(t)$ de l'oscillateur.
On convient de poser :

$$\omega(t) = \omega_o \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \cos \Omega\, t\right).$$



Établir les expressions de Ω et du taux de modulation $\beta = \Delta\omega/\omega_o$.
On parle, en langage courant, de « porteuse » et de « signal modulant ». Quelles sont les pulsations de ces deux signaux ? Quels sont leurs rôles respectifs ?

e. Donner les ordres de grandeur des fréquences des porteuses pour les ondes radio, de télévision et de télécommunication par satellite.

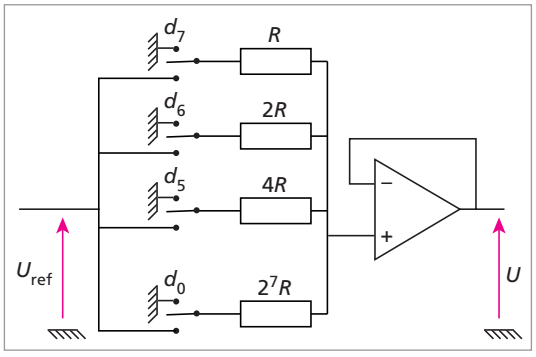
– Une grandeur introduite dans l'étude précédente intervient dans le réglage d'un récepteur lorsque l'on choisit de capter une émission parmi d'autres. Préciser cette grandeur et donner son ordre de grandeur usuel dans les communications radio.

– Citer une autre méthode de modulation. La comparer succinctement à la modulation de fréquence et discuter ses avantages et inconvénients.

Conversion numérique-analogique

Exercice 28 Convertisseur à sommation de courant ou à résistances pondérées

Cet exercice correspond au matériel Electrome, qui est couramment utilisé lors de l'épreuve de montage.
Les interrupteurs $d_0, d_1, \ldots, d_7$ sont, soit reliés à la masse (position « 0 »), soit reliés à la tension de référence $U_{ref} = 5$ V (position « 1 »). On appelle A_k le poids de chaque bit, $A_k = 0$ ou 1 selon que l'interrupteur d_k est en position « 0 » ou « 1 ».



1. Quel est le type de fonctionnement de l'A.O. supposé idéal ? Quel est son rôle ?

2. Exprimer les intensités i_0, i_1, i_2, …, i_7 traversant les 8 résistances. Attention, à l'intensité i_k est associée l'interrupteur d_k.

3. En appliquant la loi des nœuds, déduire une relation entre la tension analogique de sortie U et A_k. Montrer que l'on a bien réalisé une conversion numérique-analogique du nombre N.

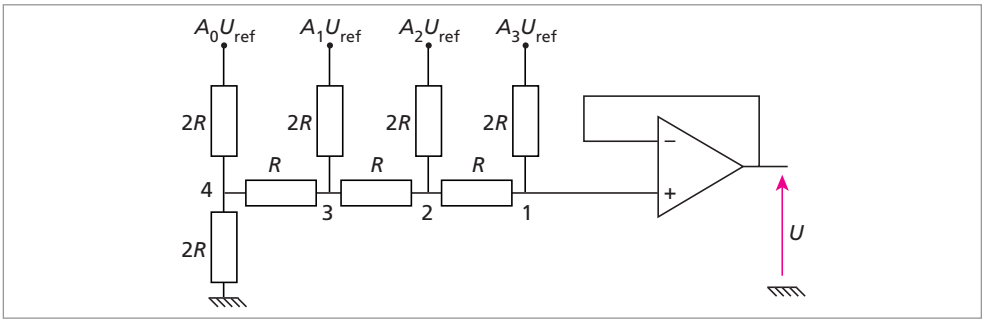
4. Préciser le nombre de bits maximal, la plus grande valeur de N possible, le MSB, le LSB.

5. Calculer la plus petite tension délivrée par le CNA lorsque $U_{réf} = 5$ V. Cette tension est appelée « quantum » ou « résolution ». Tracer la caractéristique de transfert du CNA c'est-à-dire $U = f(N)$.

6. Quels sont les problèmes pratiques posés par un tel CNA ?

Exercice 29 Convertisseur à réseau *R*-2*R* ou réseau en échelle

Cet exercice correspond au matériel Pierron, qui est couramment utilisé lors de l'épreuve de montage.
On veut réaliser la conversion d'un nombre binaire à 4 bits en utilisant le montage suivant :



Les tensions A_kU_{ref} sont obtenues comme dans le montage de l'exercice 28 : un interrupteur relie chaque résistance $2R$ à U_{ref} ou a la masse (A_k prenant alors les valeurs 1 ou 0).

1. Quel est l'intérêt de ce montage par rapport au précédent ?

2. Écrire les lois des nœuds aux 4 nœuds 1, 2, 3 et 4, en fonction des potentiels v_1, v_2, v_3 et v_4 de ces nœuds.

3. Éliminer de proche en proche tous ces potentiels sauf v_1 et montrer que v_1 est proportionnel à N.

4. Quelle relation aurait-on trouvée pour v_1 dans le cas d'une conversion d'un code pondéré à n bits (au lieu de 4 bits ici) ?

5. Quelle est l'expression du quantum lors d'une conversion à 8 bits ?

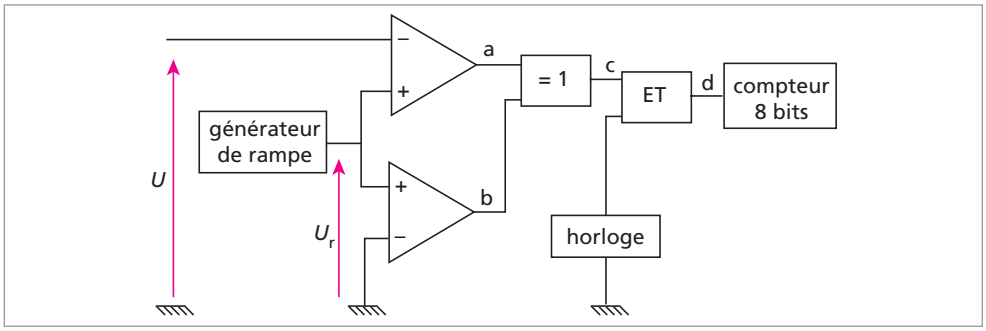
6. Quelle est la tension maximale obtenue lors d'une conversion à 8 bits ?

7. Quel est le rôle joué par l'A.O. ?

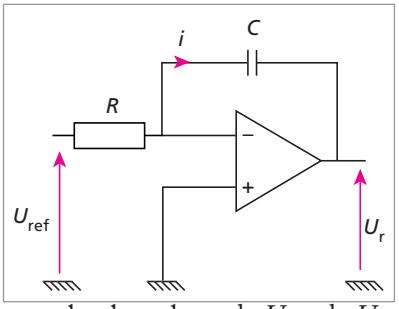
Conversion analogique-numérique

Exercice 30 Convertisseur à rampe numérique (simple rampe)

Cet exercice correspond au matériel Pierron, qui est couramment utilisé lors de l'épreuve de montage. On appelle U la tension analogique à numériser.



Le générateur de rampe peut être un CNA ou bien le simple intégrateur ci-dessous où U_{ref} est une tension continue **négative.**



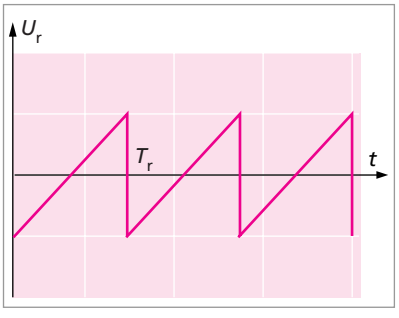
1. Étude du générateur de rampe :

- exprimer i en fonction de U_{ref} et R puis en fonction de U_r et C ;
- en déduire l'évolution de U_r en fonction du temps (à $t = 0$, $U_r = 0$).

2. Étude des comparateurs :

- donner les états logiques a et b des deux comparateurs selon les valeurs de U et de U_r ;
- à quelle date T se fait le basculement du comparateur du haut ?

3. Étude du circuit logique (porte OU exclusif + porte ET) : en fait, dans la plaquette Pierron, le générateur de rampe fournit la tension U_r suivante :



Donner la table de vérité du circuit logique en précisant les différents états logiques de a, b, c et d entre $t = 0$ et $t = T_r$.

4. Chronogrammes : soit U_h la tension en créneaux délivrée par l'horloge pendant la période $T_h \ll T_r$ et soit U_s la tension à l'entrée du compteur.
Représenter les variations des tensions U_r et U_s au cours du temps. Bien préciser entre quelles dates t_1 et t_2 le compteur est alimenté.

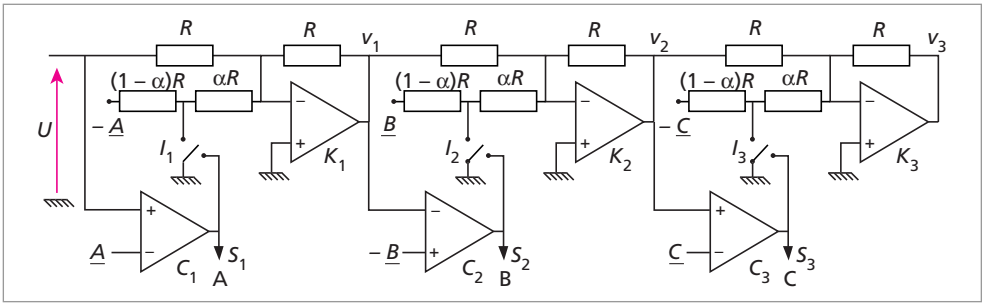
5. Le compteur reçoit N créneaux de période T_h pendant la durée t, $N = t/T_h$.
En déduire la loi de conversion analogique-numérique liant U à N.

6. Quelle est la résolution (tension analogique U minimum) du convertisseur ?

7. Quelles sont les sources d'erreur d'une telle conversion.

Exercice 31 Convertisseur à approximations successives

Cet exercice correspond au matériel Electrome, qui est couramment utilisé lors de l'épreuve de montage. On appelle U la tension analogique à numériser.



Principe : on essaie de déterminer chaque bit séparément, en commençant par le MSB. Pour une conversion à n bits, il faudra n essais.

Exemple : soit la tension U analogique à convertir en un nombre à 3 bits $[A, B, C]$

$$N = A2^2 + B2^1 + C2^0$$

1er étape : on compare U à $\underline{A}$, le poids du MSB ($\underline{A} = 4$)
si $U \geqslant 4$ alors $A = 1$
si $U < 4$ alors $A = 0$

2e étape : on compare $U - \underline{A}$ à $\underline{B}$ ($\underline{B} = 2$)
si $U - \underline{A} \geqslant 2$ alors $B = 1$
si $U - \underline{A} < 2$ alors $A = 0$

3e étape : on compare $U - (\underline{A} + \underline{B})$ à $\underline{C}$ ($\underline{C} = 1$)
si $U - (\underline{A} + \underline{B}) \geqslant 1$ alors $C = 1$
si $U - (\underline{A} + \underline{B}) < 1$ alors $C = 0$

Amusez-vous à convertir $U = 5{,}7$ puis $U = 7{,}2$ puis $U = 2{,}3$ en 3 bits et vérifier vos résultats.

Réalisation (schéma ci-dessus)

1. 1re étape : montrer que, lorsque I_1 est ouvert $v_1 = -(U - \underline{A})$ et lorsque I_1 est fermé $v_1 = -U$ donc que $v_1 = -(U - \underline{A})$ quel que soit la position de I_1.

2. 2e étape : montrer que $v_2 = U - (\underline{A} + \underline{B})$ quelle que soit la position de I_2.

3. 3e étape : trouver l'expression de v_3

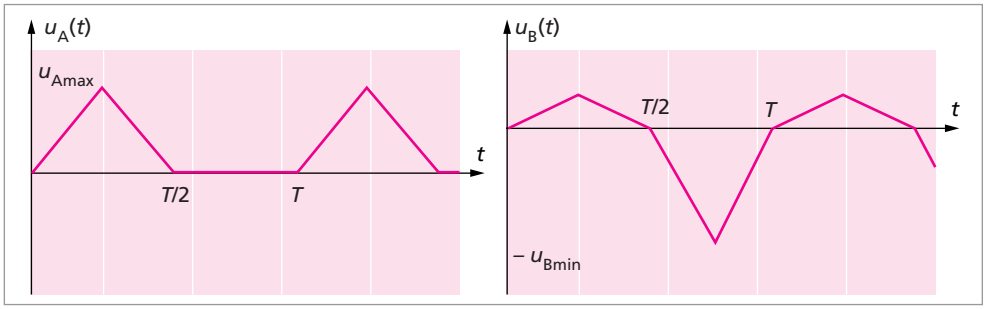
4. Discuter les avantages et les inconvénients d'un tel CAN.

SOLUTIONS

1 La diode est supposée idéale dans les questions 1a, 1b et 2a.

1.a. La valeur maximum est $i_{max} = \dfrac{e_{max}}{R + r} = 50$ mA (diode passante) et $i_{min} = 0$ (diode bloquée).

b. Quand la diode est passante : $u_A(t) = ri(t)$ avec $u_{Amax} = 50$ mV (1 cm) et $T = 1$ ms (5 cm). On a alors $u_B(t) = u + u_A(t) = u_A(t)$ avec $u_{Bmax} = 50$ mV (0,25 mm). Quand elle est bloquée, $u_A = 0$ et $u_B = e$ avec $u_{Bmin} = -5$ V (2,5 cm).



c. La diode est passante si $u > V_s = 0{,}6$ V. On a alors

$$i_{max} = \frac{e_{max}}{R + r + r_d} = 45 \text{ mA},$$

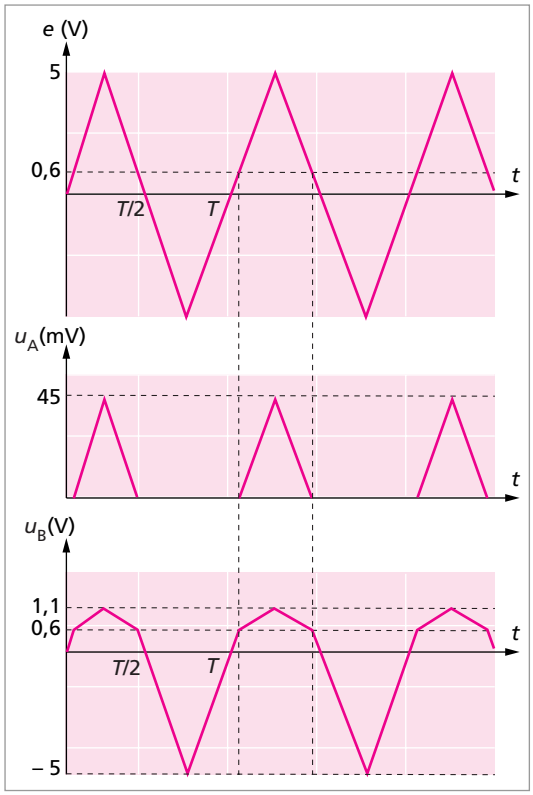
$$u_{Amax} = ri_{max} = 45 \text{ mV} \quad (0{,}9 \text{ cm})$$

La diode devient passante à la date t_o lorsque $e = V_s$ soit pour $t_o = 0{,}03$ ms (0,15 cm). Dans ce domaine,

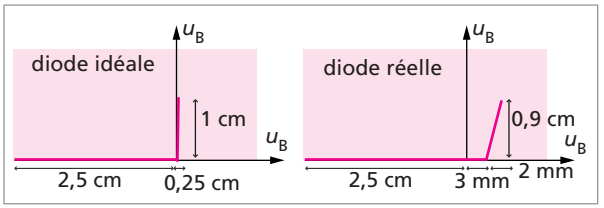
$$u_B(t) = u + u_A(t) = V_s + (r + r_d)$$

$$i = 0{,}6 + 11i$$

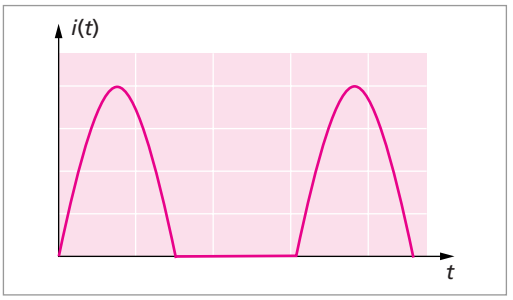
avec $u_{Bmax} = 1{,}1$ V (0,5 cm).
Lorsque la diode est bloquée, on a toujours $u_B = e$.



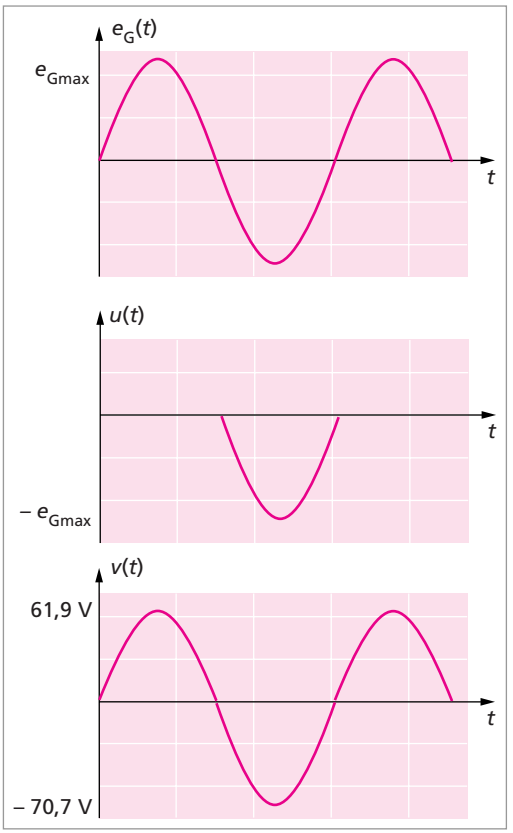
2.



2 **1.** $T = 1/f = 1$ ms. $E_{max} = E_G\sqrt{2} = 70{,}7$ V. Quand la diode est passante, $i = \dfrac{e}{R + R_G}$ et $i_{max} = 0{,}88$ A.



2. On a $v = e_G - Ri = u + u_R$.
Quand la diode est passante, $u = 0$, $v = Ri$ et $v_{max} = 61{,}9$ V.
Quand elle est bloquée, $u = e$, $i = 0$, $v = e_G$ et $v_{min} = 70{,}7$ V.
$v(t)$ n'est pas une tension sinusoïdale car $|v_{min}| \neq v_{max}$. Pour la rendre sinusoïdale, il faudrait que $v(t) \cong e_G(t)$ quand la diode est passante, donc que $R_G \ll R$ car $v = e_G - \dfrac{R_G e_G}{R + R_G}$.



3. On calcule :

$$I_{max} \succeq \frac{e_{Gmax}}{R + R_G} = 0{,}88 \text{ A}$$

et

$$|u_{inv,max}| \succeq e_{Gmax} = 70{,}7 \text{ V}.$$

4. Par définition,

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{e_G(t)}{R + R_G}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{e_{Gmax}\sin \omega t}{R + R_G}\,dt = \frac{i_{max}}{\pi}$$

$$= \frac{e_{Gmax}}{\pi(R + R_G)} = 0{,}28 \text{ A}.$$

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T u_R(t)i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} i^2(t)\mathrm{d}t = \frac{Ri_{max}^2}{4} = \frac{Re_{Gmax}^2}{4(R+R_G)^2} = 13{,}7\,\mathrm{W}.$$

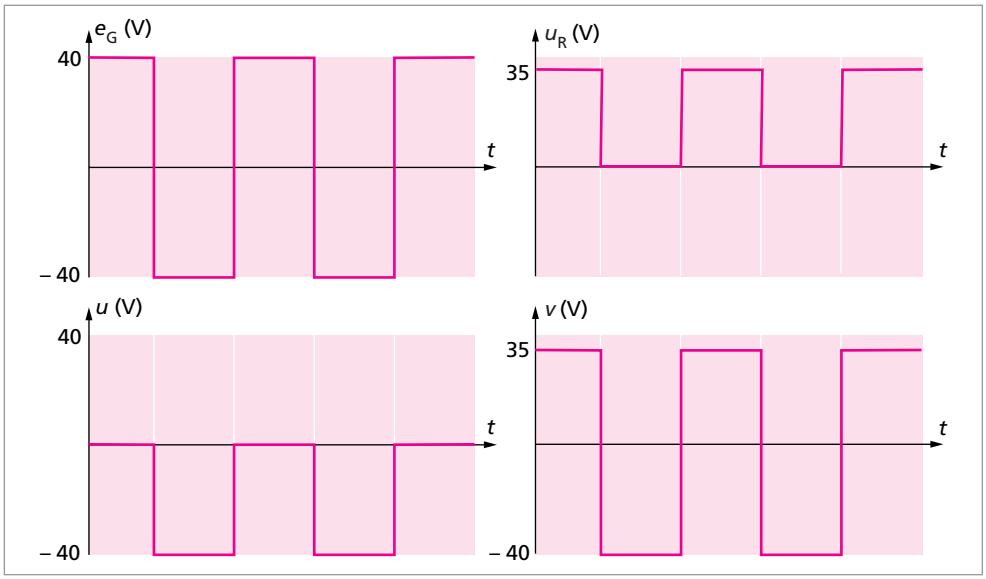
$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t = \frac{P_{moy}}{R} \text{ d'où}$$

$$I_{eff} = \frac{i_{max}}{2} = \frac{e_{Gmax}}{2(R+R_G)} = 0{,}442\ \mathrm{A}.$$

Le facteur de forme est défini par $F = \dfrac{I_{eff}}{I_{moy}} = \dfrac{\pi}{2} = 1{,}57$.

Le taux d'ondulation τ est tel que $F^2 = 1 + \tau^2$ d'où $\tau = 1{,}21$.

5.a. Quand la diode est passante, $v = u_R$ et quand elle est bloquée $v = e_G$.



b. Comme précédemment, $I_{moy} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} \frac{e_{Gmax}}{R+R_G}\mathrm{d}t = \frac{I_{max}}{2} = 0{,}25\ \mathrm{A}.$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \left(\frac{e_{Gmax}}{R+R_G}\right)^2 \mathrm{d}t \text{ d'où } I_{eff} = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} = 0{,}35\ \mathrm{A}.$$

$$P_{moy} = RI_{eff}^2 = \frac{RI_{max}^2}{2} = 8{,}75\ \mathrm{W}.$$

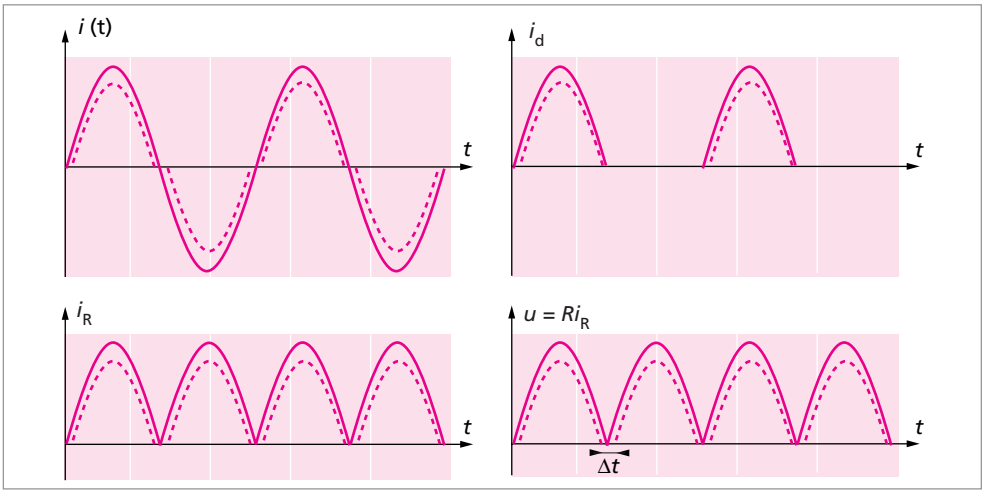
$$F = \frac{I_{eff}}{I_{moy}} = \sqrt{2} = 1{,}41 \text{ et } \tau = 1.$$

Conséquence : pour voir immédiatement si un voltmètre est RMS, il suffit de lui faire mesurer une tension en créneaux de valeur moyenne nulle. En position "alternatif", on doit alors lire $U_{eff} = U_{max}$ s'il est RMS (et non pas $U_{max}/\sqrt{2}$).

3 **1.** Quand $v(t) > 0$, i circule dans D_1, R et D_2. D_1 et D_2 sont donc passantes.

2. Quand $v(t) < 0$, i circule dans D_3, R et D_4. D_3 et D_4 sont donc passantes. De plus i circule toujours dans le même sens dans R : $i = i_R > 0$.

3. Le cas de la diode idéale est représenté en traits pleins, celui de la diode réelle en pointillés.



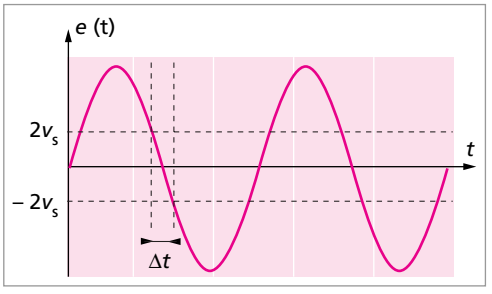
Quand les diodes sont idéales :

$$i_{max} = \frac{e_{Gmax}}{R} = 0{,}5 \text{ A}$$

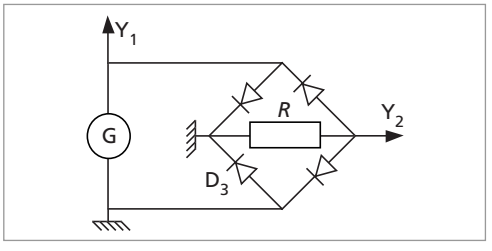
Lorsqu'elles sont réelles :

$$i'_{max} = \frac{e_{Gmax}}{R + 2r_d}$$

De plus elles ne sont alors passantes que si $|e| > 2v_s$. On peut mesurer, dans ce cas, la durée Δt pendant laquelle aucune diode n'est passante, en visualisant $e(t)$.



4. La masse de l'oscilloscope, commune à ses deux voies, court-circuiterait une diode. Sur le schéma ci-contre, la diode D_3 est court-circuitée. Pour visualiser simultanément $e(t)$ et $u(t)$, il faut utiliser un transformateur d'isolement.

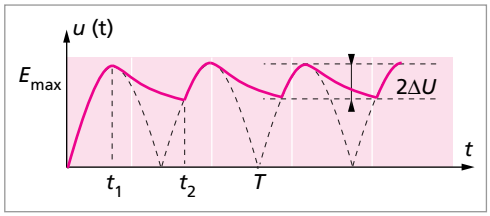


5. Les calculs sont les mêmes que dans l'exercice précédent. On obtient numériquement : $I_{max} = 0{,}5$ A, $I_{Rmoy} = 0{,}318$ A, $I_{Reff} = 0{,}35$ A, $F = 1{,}11$ et $\tau = 0{,}48$. À partir du même signal sinusoïdal $i(t) = I_{max} \sin \omega t$ les deux types de redressement donnent les résultats suivants :

	Redressement simple alternance		Redressement double alternance
I_{moy}	I_{max}/π	<	$2I_{max}/\pi$
I_{eff}	$I_{max}/2$	<	$I_{max}/\sqrt{2}$
F	$\pi/2$	>	$\pi/2\sqrt{2}$
τ	1,21	>	0,48

6. Si l'une des diodes est mal branchée, il faut qu'elle puisse supporter $\dfrac{E_G}{2} = 25$ V en inverse ! C'est éventuellement la résistance interne du générateur R_G qui peut assurer cette protection.

4 **1.** Entre t et t_1 : le condensateur se charge sous $u(t)$; entre t_1 et t_2 : il se décharge dans R.



2. Entre t et t_1 la tension s'écrit :

$$u_C(t) = u_R(t) = u(t) = E_{max} \sin \omega t.$$

3. Entre $t_1$et t_2 : $u = E_{max} e^{-(t-t_1)/RC}$. Pour un bon lissage, la décharge doit être suffisamment lente : $RC \gg T/2$. De plus la durée de la décharge vaut $t_2 - t_1 \simeq T/2$. (Rigoureusement, $t_1 = T/4$ et t_2 est tel que $E_{max} e^{-(t_2-t_1)/RC} = E_{max} \sin \omega t_2$)

4. Pour $t = t_1$: $u(t_1) = E_{max}$. Pour $t = t_2$: $u(t_2) = E_{max} e^{-(t_2-t_1)/RC} \simeq E_{max} e^{-T/2RC}$. Comme $RC \gg T/2$, $T/2RC \ll 1$ et $e^{-T/2RC} \simeq 1 - T/2RC$. Finalement,

$$u(t_2) \simeq E_{max} \left(1 - \frac{T}{2RC}\right)$$

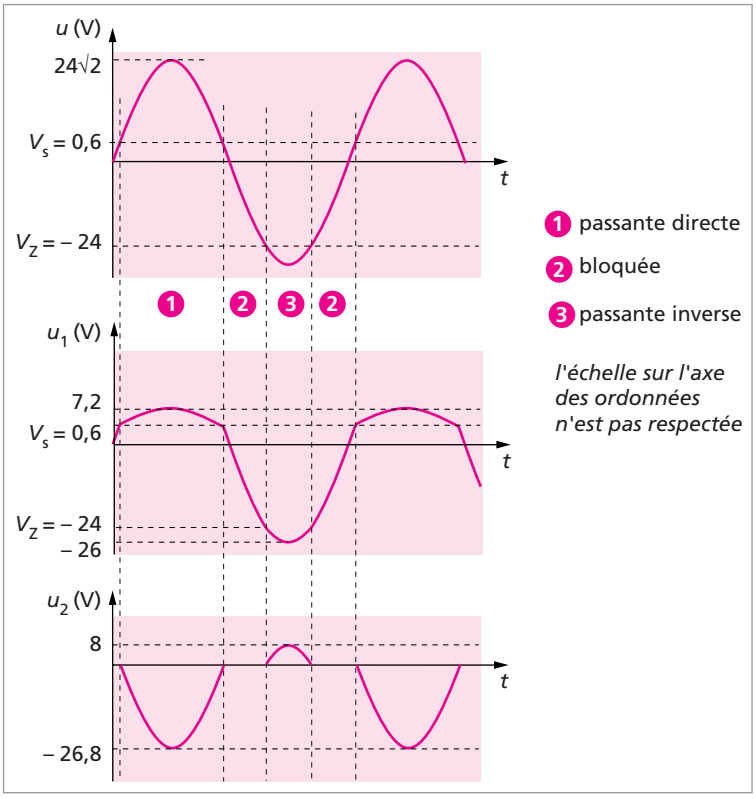
On en déduit l'amplitude d'oscillations $\Delta U = \dfrac{u(t_1) - u(t_2)}{2} \simeq \dfrac{E_{max} T}{4RC}$ et le taux d'ondulation $\tau = \dfrac{\Delta U}{U_{moy}} \simeq \dfrac{\Delta U}{E_{max}} \simeq \dfrac{T}{4RC}$.

5. Si $R = 100\ \Omega$ et $T = 20$ ms, il faut que $C \gg T/2R = 0{,}1$ mF : on peut prendre $C = 1$ mF. Seuls les condensateurs électrochimiques possèdent des capacités aussi importantes. Il faut donc faire attention à la polarité de C (armature + reliée au point A du schéma de l'exercice précédent). On a alors $\tau = 0{,}05$ s.

6. Il faut utiliser la touche AC de l'oscilloscope qui permet de mesurer $2\Delta U$, puis la touche DC qui fait grimper le signal de U_{moy}, qui est donc mesurable. On en déduit $\tau = \dfrac{\Delta U}{U_{moy}}$.

5 **1.** La puissance vaut $P_{max} = rI_{max}^2$ d'où $I_{max} = \sqrt{\dfrac{P_{max}}{r}} = 4{,}4$ A (en direct et en inverse). De même $U_{max} = 24\sqrt{2}$ V.
En direct, $U_{max} = V_s + (R_p + r)I_{max}$. On en déduit $R_p = 5\ \Omega$.
En inverse, $U_{max} = V_z + (R_p + r)I_{max}$. On en déduit $R_p = 10{,}6\ \Omega$. (Attention $V_z = -24$ V). On choisit R_p de façon à protéger la diode dans les deux sens, soit la valeur la plus grande $R_p = 10{,}6\ \Omega$.

2.



Pour u_1 :
∗ la diode est passante quand $0{,}6\text{ V} < u < 24\sqrt{2}$ V. On a alors $u_1 = u + u_2$ avec $u_1 = V_s + ri_p$ et $u_2 = -R_p i_p$. D'où $u_1 = \dfrac{ru + R_p V_s}{r + R_p}$ avec $u_{1max} = 7{,}2$ V.
∗ la diode est bloquée quand $-24\text{ V} < u < 0{,}6$ V. On a alors $i_p = 0$ et $u_1 = u$.
∗ la diode est passante en inverse quand $-24\sqrt{2}\text{ V} < u < -24$ V. On a alors $u_1 = u + u_2$ avec $u_1 = -(V_z + ri_p)$ et $u_2 = R_p i_p$. D'où $u_1 = \dfrac{ru - R_p V_z}{r + R_p}$ avec $u_{in} = -26$ V.
Pour u_2 :
∗ quand la diode est passante en direct, $u_2 = -\dfrac{R_p(u - V_z)}{r + R_p}$ avec $u_{2min} = -26{,}8$ V.

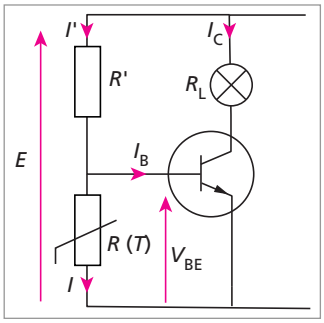
∗ quand elle est bloquée, $u_2 = 0$,

∗ quand elle est passante en inverse, $u_2 = -\dfrac{R_p(u + V_z)}{r + R_p}$ avec $u_{2max} = 8$ V.

6 **1.a.** Avec les caractéristiques de la lampe, on calcule $R_L = 3{,}7/0{,}3 = 12{,}3\ \Omega$.

b. Pour $T = T_a$, le transistor est bloqué lorsque $I_C = I_B = 0$ et $V_{BE} \leqslant V_s$. Or $V_{BE} = \dfrac{R(T_a)E}{R' + R(T_a)} \leqslant V_s$, qui est satisfait si $R' \geqslant R(T_a)\left(\dfrac{E}{V_s} - 1\right)$, soit $R' \geqslant 155\ \Omega$.

c. Pour $T = T_b$, le transistor est saturé. On calcule toutes les intensités des courants.



On a $I_C = \dfrac{E}{R_L} = 0{,}3$ A. $I_B = \dfrac{I_C}{\beta} = 3$ mA.

$I' = \dfrac{E - V_{BE}}{R'}$ or $V_{BE} \geqslant V_s$ d'où :

$$I' \leqslant \frac{E - V_s}{R'} = 15{,}5 \text{ mA}$$

$I = I' - I_B < 12{,}5$ mA.

Or $I = \dfrac{V_{BE}}{R(T_b)}$, d'où $R(T_b) = \dfrac{V_{BE}}{I} > 48\ \Omega$ et dans ces conditions, la lampe s'allume.

2. Pour $T = T_a$, le transistor est saturé, $I_C = \dfrac{E}{R_L} = 0{,}3$ A. $I_B = \dfrac{I_C}{\beta} = 3$ mA. Le courant dans $R(T_a)$ vaut $I = \dfrac{V_{BE}}{R(T_a)} = 0{,}6$ mA. Le courant dans R' vaut $I' = I + I_B = 3{,}6$ mA. Or $I' = \dfrac{E - V_{BE}}{R'}$ d'où $R' = \dfrac{E - V_{BE}}{I'} = 861\ \Omega$. Il y a saturation pour $V_{BE} \geqslant V_s$, soit $I > 0{,}6$ mA, $I' > 3{,}6$ mA et $R' < 861\ \Omega$.

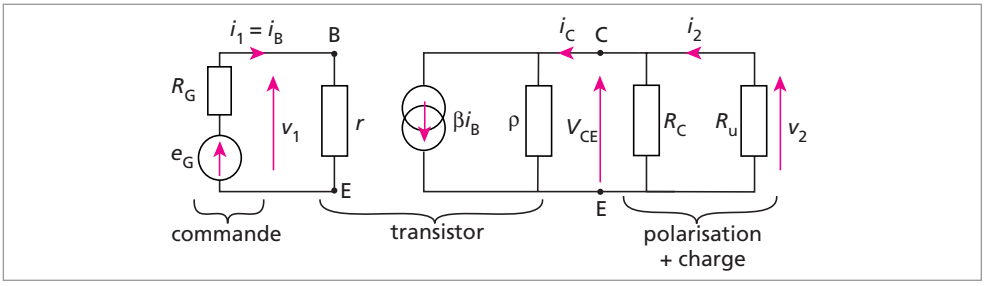
Pour $T = T_b$, le transistor est bloqué, $V_{BE} \leqslant V_s$, $I_B = 0$ d'où $R(T_b) \leqslant \dfrac{R'V_s}{E - V_s}$. La lampe est donc éteinte pour $R(T_b) \leqslant 155\ \Omega$.

7 **1.a.** L'indice "o" se rapporte à l'état de polarisation du transistor.

$V_{CEo} = \dfrac{V_{CC}}{2} = 5$ V ; $I_{Co} = \dfrac{V_{CC}}{2R_C} = 5$ mA ; $I_{Bo} = \dfrac{I_{Co}}{\beta} = 50\ \mu$A.

b. $R_B = \dfrac{V_{CC} - V_{BEo}}{I_B} = 188\ \text{k}\Omega$, R_B est donc beaucoup plus importante que toutes les autres résistances du montage et peut dans un premier temps être considérée comme infinie.

2.a. Pour l'alternatif, on éteint la source de tension V_{CC}, ce qui revient à la court-circuiter ($V_{CC} = 0$). Le point F se trouve donc au potentiel nul. $V_F = 0$. D'où le schéma équivalent suivant, valable en alternatif seulement et pour les faibles amplitudes de courant :



b. Les équations caractéristiques du transistor sont :

Circuit base-émetteur : $$\underline{V_1} = r\underline{I_1} \quad (1)$$

Circuit collecteur-émetteur : $$\underline{I_C} = \beta\underline{I_1} + \frac{\underline{V_2}}{\rho} \quad (2)$$

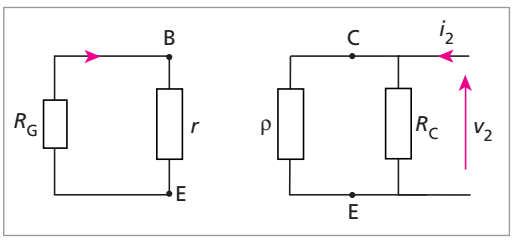
Equation caractéristique du circuit d'entrée : $$\underline{V_1} = \underline{E_G} - R_G\underline{I_1} \quad (3)$$

Equations caractéristiques du circuit de sortie : $$\underline{V_2} = -R_u\underline{I_2} \quad (4)$$

et $$\underline{V_2} = -\frac{R_uR_C}{R_u + R_C}\underline{I_C} \quad (5)$$

c. L'impédance d'entrée du montage est définie par : $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{V_1}}{\underline{I_1}}$. D'après (1), on a $\underline{Z_e} = r = 500\ \Omega$.

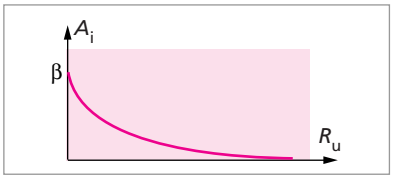
L'impédance de sortie du montage est définie par $\underline{Z_s} = \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{I_2}}$, lorsque les sources sont éteintes (e_G remplacée par un court-circuit et la branche contenant βi_B ouverte) et quand la résistance de charge R_u n'est pas branchée. On obtient alors le schéma équivalent suivant, où l'on voit que :



$$\underline{Z_s} = \frac{\rho R_C}{\rho + R_C} = 909\ \Omega.$$

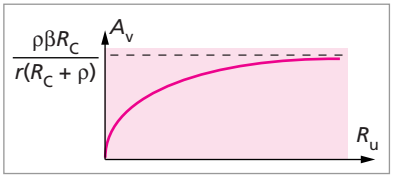
d. Le coefficient d'amplification en courant est défini par $\underline{A_i} = \dfrac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}}$. (Ne pas confondre avec le gain en courant, qui serait défini par $G_i = 20 \log \left|\dfrac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}}\right|$) En éliminant $\underline{I_C}$ entre

les équations (2) et (5), puis en éliminant $\underline{V_2}$ grâce à l'équation (4), on obtient : $\underline{A_i} = \dfrac{\beta}{R_u\left(\dfrac{1}{R_C}+\dfrac{1}{R_u}+\dfrac{1}{\rho}\right)}$. On reconnait, au dénominateur, la résistance équivalente R_o au circuit de sortie, définie par : $\dfrac{1}{R_o} = \dfrac{1}{R_C}+\dfrac{1}{R_u}+\dfrac{1}{\rho}$. Il vient alors : $\underline{A_i} = \dfrac{\beta}{R_u R_o}$. $\underline{A_i}$ est un nombre réel positif, cela signifie que les intensités des courants instantanés $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont en phase. De plus, $R_o = 476\ \Omega$, d'où $\underline{A_i} = 47{,}6$, valeur bien inférieure au coefficient d'amplification β en courant du seul transistor. Les variations de A_i en fonction de la résistance de charge R_u sont représentées sur la figure ci-contre. Elles montrent que le montage ne se comporte comme un amplificateur de courant que pour les faibles valeurs de R_u.



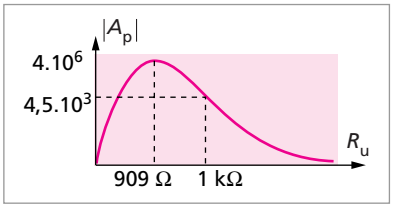
e. De même, le coefficient d'amplification en tension est défini par :

$$\underline{A_v} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{-R_u\underline{I_2}}{r\underline{I_1}} = -\frac{R_u}{r}\underline{A_i} = -\frac{\beta R_o}{r}$$
$$= -95{,}2$$



Ce coefficient est encore réel, mais négatif. Cela signifie que les tensions instantanées $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont en opposition de phase. La figure ci-dessus représente les variations de $|A_v|$ avec la résistance de charge R_u. A l'opposé du cas précedent, on voit que le montage se comporte comme un amplificateur de tension pour les fortes valeurs de la résistance de charge R_u.

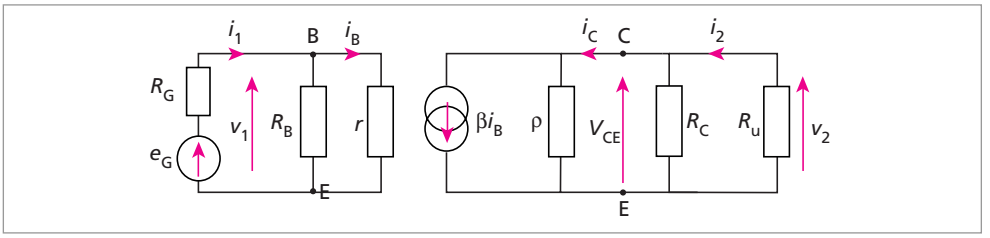
f. $\underline{A_p} = \underline{A_i}\,\underline{A_v} = -\dfrac{\beta^2 R_o^2}{rR_u} = -4\,533$. Pour étudier les variations de $\left|\underline{A_p}\right|$ en fonction de R_u, il faut développer R_o. En posant $\dfrac{1}{R_s} = \dfrac{1}{R_C}+\dfrac{1}{\rho}$, il vient $\left|\underline{A_p}\right| = \dfrac{\beta^2}{r\left(\dfrac{1}{\sqrt{R_u}}+\dfrac{\sqrt{R_u}}{\sqrt{R_s}}\right)}$. $\left|\underline{A_p}\right|$ en fonction de R_u passe par un maximum pour $R_u = R_s = 909\ \Omega$ (ce qui correspond au cas étudiée ici). On a alors :



$$\left|\underline{A_p}\right|_{max} = \frac{\beta^2 R_s^2}{4r} = 4{,}13.10^6\ !$$

En conclusion, pour R_u faible le montage se comporte comme un amplificateur de courant, pour R_u important le montage se comporte comme un amplificateur de tension et pour $R_u \simeq Rs$ il se comporte comme un amplificateur de puissance.

g. Le schéma équivalent devient :

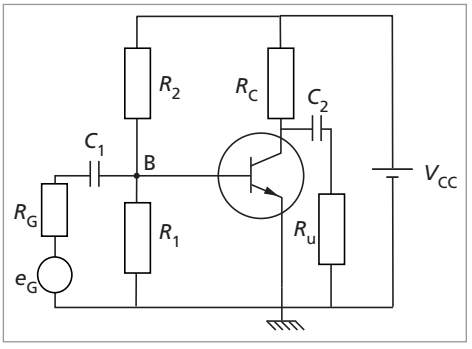


L'équation (1) entre la base et l'émetteur est remplacée par : $R_B(\underline{i_1} - \underline{i_B}) = r\underline{i_B}$. Le raisonnement suivi dans les questions précédentes conduit à : $\underline{Z'_e} = \dfrac{rR_B}{r + R_B} = 499\,\Omega \simeq \underline{Z_e}$, $\underline{Z'_s} = \underline{Z_s}$, $\underline{A'_i} = \underline{A_i}\dfrac{R_B}{R_B + r} = 47{,}5 \simeq \underline{A_i}$, $\underline{A'_v} = \underline{A_v}$ et $\underline{A'_p} = \underline{A_p}\dfrac{R_B}{R_B + r} = -4\,521 \simeq \underline{A_p}$.

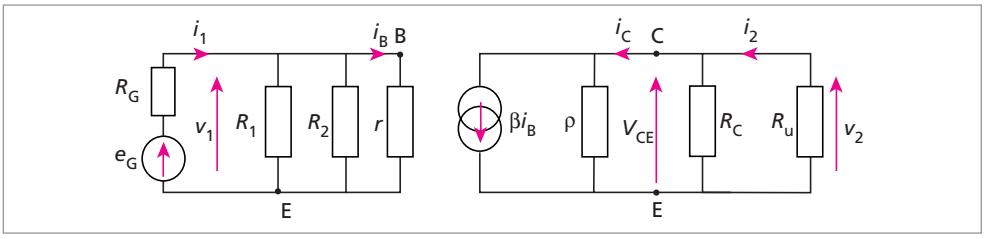
3.a. $I_C = \dfrac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C} = 5$ mA ; $I_B = \dfrac{I_C}{\beta} = 50$ µA ; l'intensité du courant dans R_1 s'écrit : $I' = \dfrac{V_{BE}}{R_1} = 0{,}6$ mA et celle du courant dans R_2 : $I'' = I' + I_B = 0{,}65$ mA.

b. Or $I'' = \dfrac{V_{CC} - V_{BE}}{R_2}$ d'où $R_2 = \dfrac{V_{CC} - V_{BE}}{I''} = 14{,}5$ kΩ.

4.a.



b. Sur ce schéma, on remarque que $R_1 /\!/ R_2$ est équivalent à R_B de la question 2.g. Il suffit donc de remplacer R_B par $\dfrac{R_1 R_1}{R_1 + R_2}$ dans les résultats de la question 2.g.

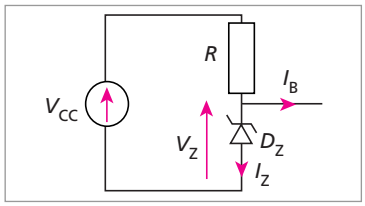


c. $\underline{Z_e''} = 500\ \Omega \simeq \underline{Z_e}$; $\underline{Z_s''} = 909\ \Omega = \underline{Z_s}$; $\underline{A_i''} = 23{,}0 < \underline{A_i}$; $\underline{A_v''} = -97{,}2 < \underline{A_v}$; $\underline{A_p''} = -2\,190 : \left|\underline{A_p''}\right| \ll \left|\underline{A_p''}\right|$.

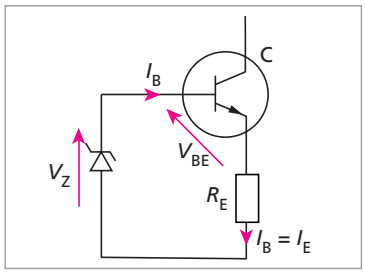
5. En régime continu, le condensateur de capacité C_E se comporte comme un interrupteur ouvert. $I_B \ll I_C$ d'où $I_C \simeq I_E = \dfrac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C + R_E} = 4{,}55$ mA, $I_B = \dfrac{I_C}{\beta} = 45{,}5\ \mu$A. L'intensité du courant dans R_1 vaut $I' = \dfrac{V_{BM}}{R_1} = \dfrac{V_{BE} + V_{EM}}{R_1} = \dfrac{V_{BE} + R_E I_E}{R_1} = 1{,}05$ mA. Celui dans R_2 vaut $I'' = I' + I_B = 1{,}1$ mA. D'où $R_2 = \dfrac{V_{CC} - V_{BM}}{I''} = 8{,}14\ \text{k}\Omega$.

6. En régime alternatif, le condensateur de capacité C_E doit se comporter comme un court-circuit. Pour cela il faut que $\dfrac{1}{C_E \omega} \ll R_E$. Dans ces conditions, le potentiel $V_E = 0$ pour l'alternatif. On obtiendra donc les mêmes résultats qu'à la question 4.

8 **1.** $V_z = \dfrac{R_z}{R + R_z} V_{CC}$ d'où $R_z = \dfrac{RV_z}{V_{CC} - V_z}$ et, comme $I_z \simeq I_R$, $I_z = \dfrac{V_z}{R_z} = \dfrac{V_{CC} - V_z}{R} = 5{,}18$ mA. La puissance dissipée dans la diode vaut $P_D = V_z I_z = 18{,}6$ mW, celle dissipée dans R vaut $P_R = \dfrac{(V_{CC} - V_z)^2}{R} = 59{,}1$ mW.



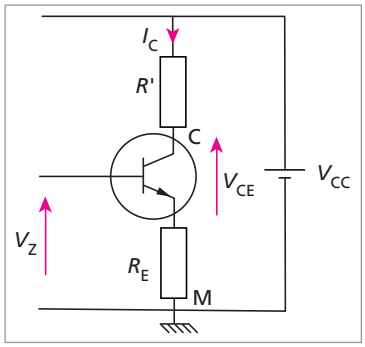
2.a. $V_z = V_{BE} + R_E I_C$ d'où $I_C = \dfrac{V_z - V_{BE}}{R_E} = \dfrac{3}{R_E}$. Dans cette dernière relation, l'intensité I_C est exprimée en ampère si R_E l'est en ohm, ou bien I_C est exprimée en mA si R_E l'est en kΩ.



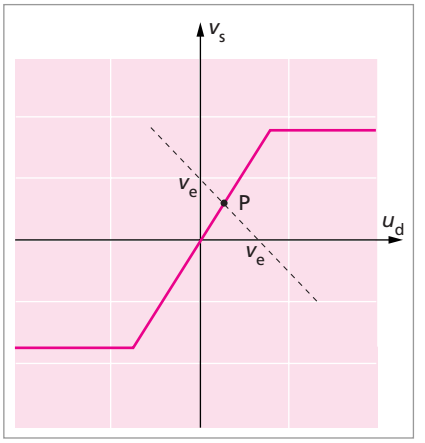
b. I_C est indépendante de la résistance de charge R', on a donc un générateur de courant. Avec 1 kΩ < R_E < 101 kΩ, on obtiendra 29,7 μA < I_C < 3 mA.

c. Pour cette valeur de la résistance, on a $I_C = 3$ mA. $V_{CC} = V_{CE} + (R_E + R')I_C$, or $V_{CE} < 0{,}4$ V, donc $R' < \dfrac{V_{CC} - R_E I_C - 0{,}4}{I_C}$. On obtient l'encadrement :

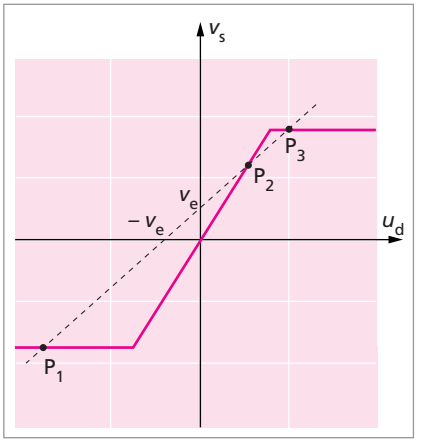
$$0 < R' < 3{,}87\ \text{k}\Omega$$



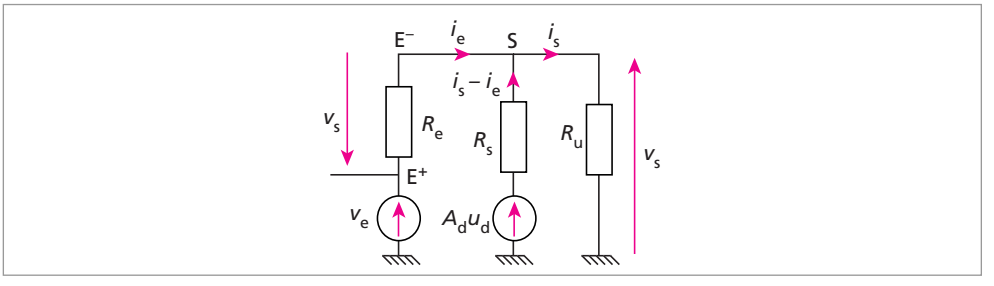
9 **1.** La caractéristique statique de l'A.O. est représentée en trait plein sur la figure. Dans le montage suiveur, $v_s = v_e - u_d$ est représentée par une droite en pointillés, de pente -1, sur le même graphe. Il n'y a qu'une seule intersection, donc un seul point de fonctionnement P apparaît : le fonctionnement de ce montage est stable.



2. En inversant les entrées de l'A.O., on obtient le graphe ci-contre . En effet, on a alors $v_s = v_e + u_d$ ($u_d = v^+ - v^-$) qui est représentée par une droite de pente +1. Il peut y avoir 3 points de fonctionnement, comme sur la figure (P_1, P_2 et P_3) dont 2 correspondent à $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$: le régime est instable. Sinon, il n'y a qu'une seule intersection, mais qui correspond à $v_s = u_d = 0$, ce qui n'offre aucun intérêt. Conclusion : pour obtenir un régime linéaire stable, il faut toujours réaliser une contre-réaction entre E^- et S, et non entre E^+ et S.



3.



4. On a $v_s = A_d u_d - R_s(i_s - i_e) \simeq A_d u_d - R_s i_s (i_s \gg i_e)$. De plus $i_s = \dfrac{v_s}{R_u}$ et $u_d = v_e - v_s$ d'où $A_v = \dfrac{v_s}{v_e} = \dfrac{A_d}{1 + A_d + \dfrac{R_s}{R_u}}$. $A_v \simeq 1$: on est bien en présence d'un montage « suiveur », même si l'A.O. n'est pas idéal.

5. $Z_e = \dfrac{v_e}{i_e}$ or $i_e = \dfrac{u_d}{R_e}$ et $u_d = v_e - v_s = v_e(1 - A_v)$ d'où :

$$Z_e = \frac{R_e\left(1 + A_d + \dfrac{R_s}{R_u}\right)}{1 + \dfrac{R_s}{R_u}} = 10^{10}\ \Omega$$

(Rappel : pour un A.O. idéal, $Z_e = \infty$)

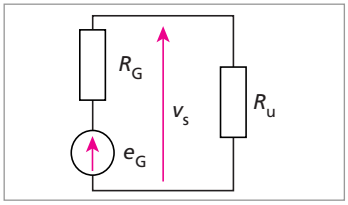
6. $v_s \simeq A_d u_d - R_s i_s$. Quand $v_e = 0$, $u_d = -v_s$ d'où :

$$Z_s = \frac{R_s}{1 + A_d} \simeq \frac{R_s}{A_d} = 10^{-4}\ \Omega$$

(Rappel : pour un A.O. idéal, $Z_s = 0$)

7.a. $v_s = \dfrac{R_u}{R_u + R_g} e_g < e_g$.

b. $Z_e = \infty \Longrightarrow i_e = 0 \Longrightarrow R_g i_e = 0 \Longrightarrow v_e = e_g$.
$A_v = 1 \Longrightarrow v_s = v_e \Longrightarrow v_s = e_g$: on a un adaptateur d'impédance "parfait".



10 **1.** L'amplification vaut :

$$A_o = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1} = -100$$

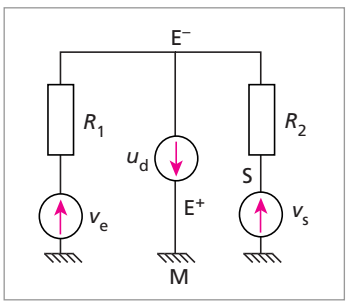
et le gain :

$$G_v = 20 \log |A_o| = 40\ \text{dB}$$

La résistance d'entrée est égale à $R_e = \dfrac{v_e}{i_e} = R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, et la résistance de sortie $R_s = \infty$ (A.O. idéal).

2. Le théorème de Millman s'écrit entre E^- et M :

$$U_{EM} = -u_d = \frac{\dfrac{v_e}{R_1} + \dfrac{v_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_1}}$$

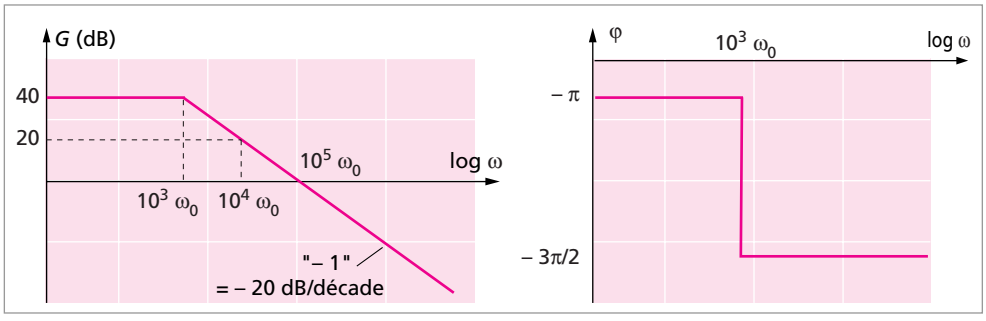


Or $v_s = A_d u_d$ d'où $-u_d = -\dfrac{v_s}{A_d}$ et finalement $A_v = \dfrac{v_s}{v_e} = \dfrac{A_d A_o}{A_d + 1 - A_o} \simeq \dfrac{A_d A_o}{A_d - A_o} \simeq A_o = -100$.

3.a. $\underline{A'_v} = \dfrac{\underline{A'_d}A_o}{\underline{A'_d} + 1 - A_o} = \dfrac{A_d A_o}{A_d + (1 - A_o)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)}$ qu'il faut mettre sous la forme $\dfrac{H_o}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'}}$. Après calcul, on obtient :

$$\underline{A'_v} = \frac{\mathrm{A}v}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega'_o}} \qquad \text{avec} \qquad \omega'_o = \omega_o \frac{A_d + 1 - A_o}{1 - A_o} \simeq -\omega_o \frac{A_d}{A_o} = 10^3 \omega_o$$

b. $\underline{A'_v} = \dfrac{-10^2}{1 + j\dfrac{\omega}{10^3\omega_o}} = \underline{H_o}\,\underline{H_3}$ où $\underline{H_o} = \mathrm{A}v = -100 < 0$ et $\underline{H_3} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{10^3\omega_o}}$. D'où les diagrammes de Bode suivants avec $G = 20\log\left|\underline{A'_v}\right| = 20\log\left|\underline{H_o}\right| + G_3 = 40 + G_3$ et $\varphi = \varphi_{H_o} + \varphi_3 = -\pi + \varphi_3$.



c. Comme $G_{max} = 40$ dB, à -3 dB, le gain vaut $G_c = G_{max} - 3 = 37$ dB, qui correspond à $\left|\underline{A'_v}\right| = \dfrac{\left|\underline{A'_{v,max}}\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left|\underline{A_v}\right|}{\sqrt{2}}$. Ce gain est obtenu pour $\omega_c = 10^3\omega_o$ soit pour $f_c = 12{,}5$ kHz.

4. $P_e = U_e I = 3{,}64 \cdot 10^{-5}$ W, $P_1 = E_1 I_1 = 0{,}136$ W, $P_2 = E_2 I_2 = 42{,}1$ mW, $P_s = \dfrac{U_s^2}{R_u} = 36$ mW. $\eta = \dfrac{P_s}{P_e + P_1 + P_2} = 20{,}2$ % : le rendement d'un A.O. n'est jamais important, mais on a toujours $P_e \ll P_1$ et P_2.

11

1. La contre-réaction entre E^- et S atteste du fonctionnement en régime linéaire.

2. Soit i l'intensité du courant traversant R_1 ou R_2. On a $v_e = -R_1 i$ et $v_s = -(R_1 + R_2)i$ d'où $\underline{H} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$. Cette fonction de tranfert est réelle et positive : cela signifie que la tension de sortie est en phase avec la tension d'entrée et on a bien un montage non inverseur.

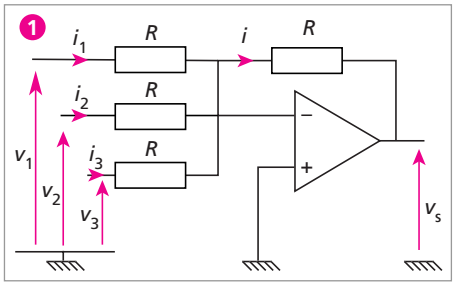
3. $G = 20\log|\underline{H}| = 20$ dB d'où $|\underline{H}| = 10$ et $\dfrac{R_2}{R_1} = 9$. Or $R_1 = 10$ kΩ, donc $R_2 = 90$ kΩ.

4.a. À l'entrée, $P_e = v_e i^+ = 0\,(i^+ = 0)$. A la sortie, $P_s = \dfrac{v_s^2}{R_u} = \dfrac{e_G^2}{R_u}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right) = 0{,}1\,\text{W}$.
P_s est donc fournie par l'alimentation de l'A.O..

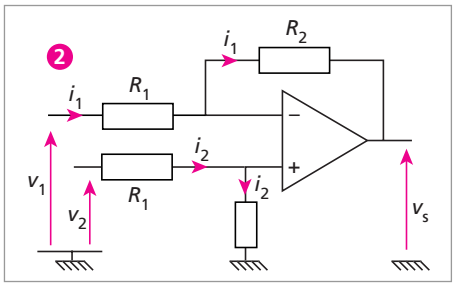
b. $v_s \leqslant V_{sat}$ donc $|\underline{H}| \leqslant \dfrac{V_{sat}}{e_G}$ et $e_G \leqslant 1{,}5$ V.
De plus, $i_s \leqslant i_{s,max}$ soit $R_u = \dfrac{v_s}{i_s} \succeq \dfrac{v_s}{i_{s,max}}$ et donc $R_u \succeq 3\,\text{k}\Omega$ pour $v_s = V_{sat}$.

Remarque : pour $e_G = 1$ V, $|\underline{H}| = 10 \Longrightarrow v_s = 10V \Longrightarrow R_u \geqslant 2\,\text{k}\Omega$.

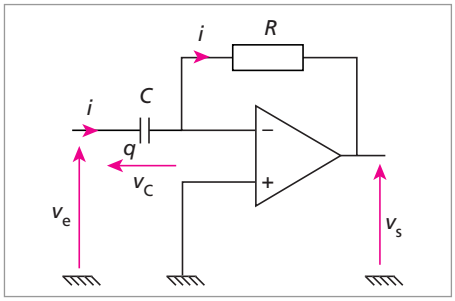
12 Pour la figure 1, on peut écrire : $v_s = -Ri$, $v_1 = Ri_1$, $v_2 = Ri_2$, $v_3 = Ri_3$. Or $i = i_1 + i_2 + i_3$ d'où $v_s = -(v_1 + v_2 + v_3)$: le montage est un additionneur - inverseur.



Pour la figure 2, on a $v_1 = R_1 i_1 + R_2 i_2$, $v_2 = R_1 i_2 + R_2 i_2$ d'où $v_s = -\dfrac{R_2}{R_1}(v_1 - v_2)$. Si $R_2 = R_1$, le montage est un soustracteur, sinon c'est un soustracteur amplificateur.

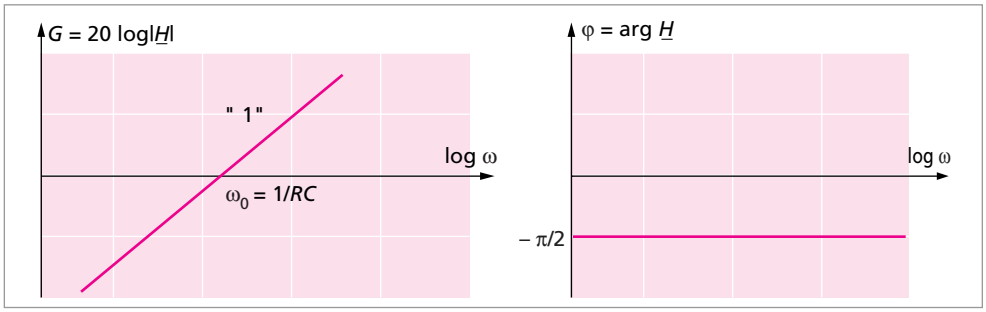


13 **1.** On peut écrire : $v_s = -Ri$ avec $i = \dfrac{dq}{dt}$ et $v_e = v_C = \dfrac{q}{C}$ d'où $v_s = -RC\dfrac{dv_e}{dt}$. Le montage réalise donc bien une dérivation.



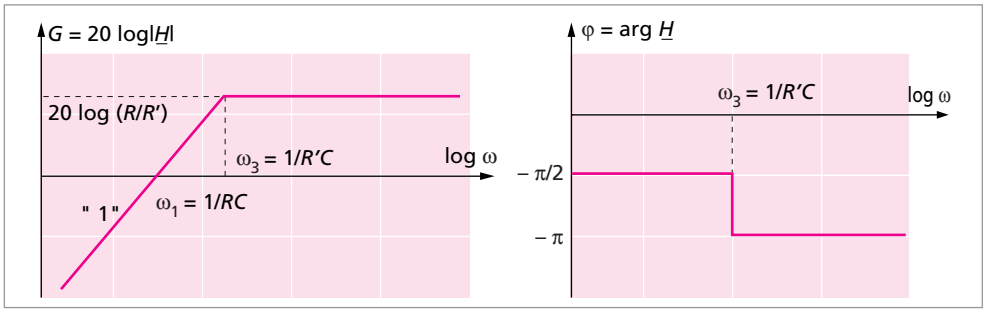
2. En régime sinusoïdal, $\dfrac{dv_e}{dt} = j\omega\underline{v_e}$ d'où $\underline{H} = -j\omega RC = \underline{H_o}\,\underline{H_1}$ avec $\underline{H_o} = -1$, $\underline{H_1} = j\dfrac{\omega}{\omega_o}$ et $\omega_o = \dfrac{1}{RC}$.

On obtient les diagrammes de Bode suivants :



3. À très haute fréquence : si $\omega \to \infty \Longrightarrow |\underline{H}| \to \infty$ et $v_s \to \infty$: il y a saturation ($v_s \leqslant V_{sat}$). Il faut donc rajouter une résistance R' en série avec C pour éviter que Z_e ne s'annule.

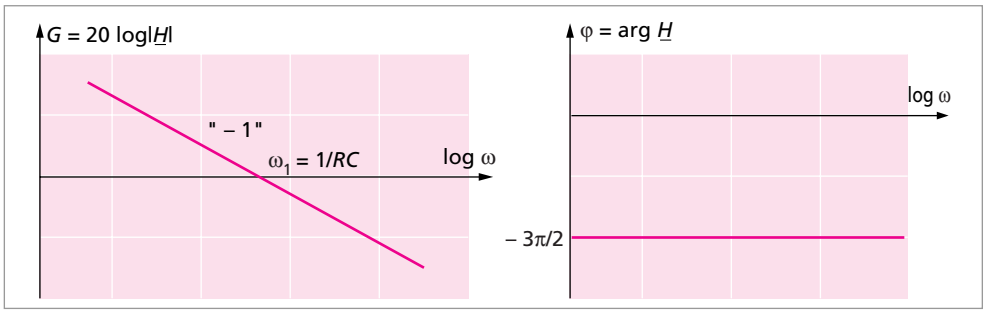
4. Soit $\underline{Z}$ l'impédance de la branche contenant R' et C en série. $\underline{Z} = R' + \dfrac{1}{jC\omega}$. On est ramené au montage amplificateur inverseur d'où $\underline{H} = -\dfrac{R}{\underline{Z}} = -\dfrac{jRC\omega}{1 + jR'C\omega} = -\underline{H_1}\,\underline{H_3}$ avec $\underline{H_1} = j\dfrac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H_3} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}}$ où $\omega_1 = \dfrac{1}{RC}$ et $\omega_3 = \dfrac{1}{R'C}$. On obtient les diagrammes de Bode suivants, en choisissant $R' < R$.



Remarque : à BF, donc pour $\omega \ll \omega_3$,on a un dérivateur réel (pente "1"), à HF, donc, pour $\omega \gg \omega_3$, on a un filtre passe-haut.

14 **1.** En régime variable, $v_e = Ri$ avec $i = \dfrac{dq}{dt}$ et $v_s = -v_C = -\dfrac{q}{C}$ d'où $v_s = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int v_e(t)dt$. Le montage effectue bien une intégration

2. En régime sinusoïdal, $\underline{H} = -\dfrac{1}{jRC\omega} = -\dfrac{1}{\underline{H_1}}$. D'où les diagrammes de Bode suivants :

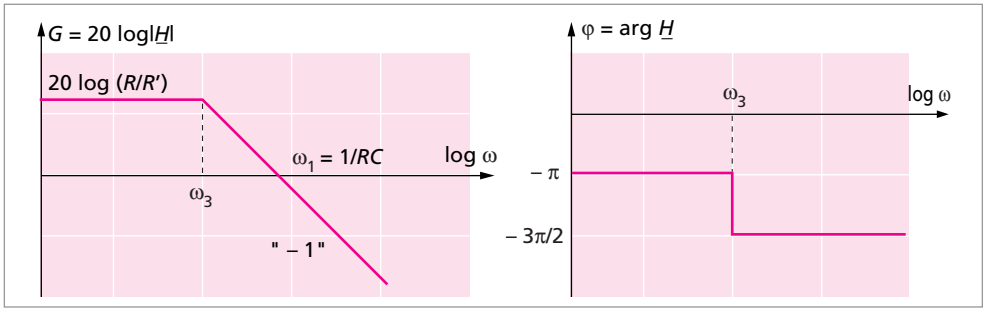


3. À TBF, $\dfrac{1}{j\omega C} \to \infty \Longrightarrow \underline{H} \to \infty$, or $v_s < V_{sat}$: il y a saturation. Pour l'éviter, il suffit de mettre une résistance R' en parallèle avec C, entre E^- et S.

4. On est une fois de plus ramené au montage amplificateur inverseur avec $Z = C /\!\!/ R'$. On obtient :

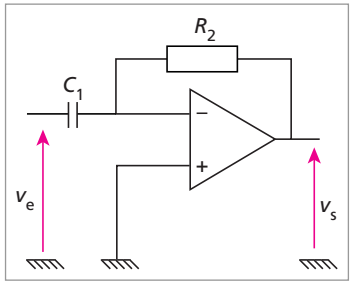
$$\underline{H'} = -\frac{\dfrac{R}{R'}}{1 + j\omega R'C} = -\underline{H_0}\underline{H_3}$$

où $\omega_3 = 1/R'C$. D'où les diagrammes de Bode suivants :

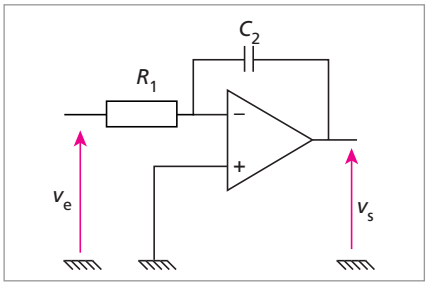


Pour $\omega \ll \omega_3$, on a un filtre passe-bas ; pour $\omega \gg \omega_3$, on a un intégrateur.

15 **1.** Aux basses fréquences, $\dfrac{1}{C_1\omega} \gg R_1$ et $\dfrac{1}{C_2\omega} \gg R_2$, d'où la figure ci-contre.
On est en présence d'un dérivateur parfait.



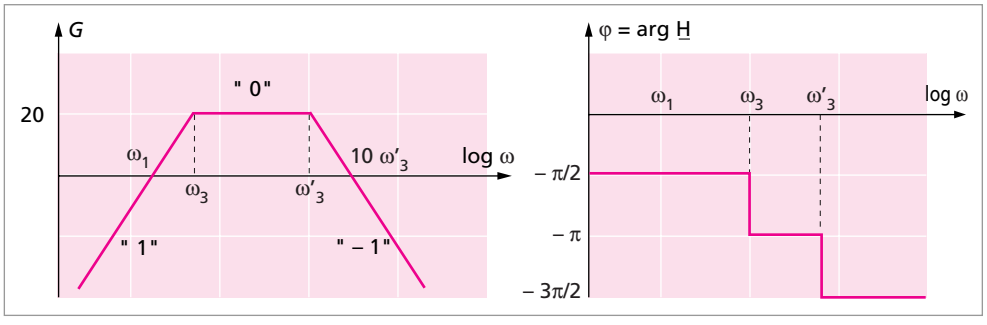
2. Aux hautes fréquences, $\dfrac{1}{C_1\omega} \ll R_1$ et $\dfrac{1}{C_2\omega} \ll R_2$, d'où la figure ci-contre :
On est en présence d'un intégrateur parfait.



3. On calcule la fonction de transfert : $\underline{Z_1} = R_1 + \dfrac{1}{jC_1\omega}$, $\underline{Y_2} = \dfrac{1}{\underline{Z_2}} = \dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega$ d'où

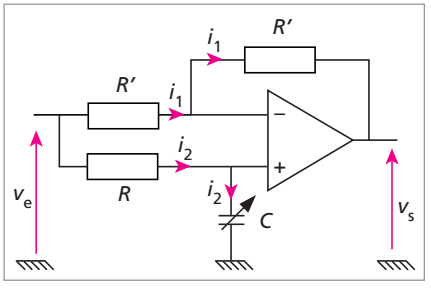
$$\underline{H} = -\frac{jR_2C_1\omega}{(1+jR_1C_1\omega)(1+jR_2C_2\omega)} = -\underline{H_1}\,\underline{H_3}\,\underline{H_3'}$$

avec $\underline{H_1} = j\omega/\omega_1$, $\underline{H_3} = \dfrac{1}{1+j\omega/\omega_3}$, $\underline{H_3'} = \dfrac{1}{1+j\omega/\omega_3'}$ et $\omega_1 = 1/R_2C_1$, $\omega_3 = 1/R_1C_1$, $\omega_3' = 1/R_2C_2$. Avec les valeurs numériques fournies, $\omega_1 < \omega_3 < \omega_3'$ et il y a une décade entre chacune de ces pulsations. Les diagrammes de Bode sont représentés ci-dessous.



On est en présence d'un filtre passe-bande. Le gain s'annule pour ω_1 et $10\omega_3'$. Il vaut $G_{max} - 3$ dB pour ω_3 et ω_3' donc la bande passante vaut $\omega_3' - \omega_3 = 9/R_1C_1$.

16 **1.** Il faut calculer la fonction de transfert. $\underline{V_e} = \left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)\underline{I_2}$ et $\underline{V_s} = \dfrac{\underline{I_2}}{jC\omega} - R'\underline{I_1}$. Or $R'\underline{I_1} = R\underline{I_2}$ donc $\underline{H} = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}} = \dfrac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$.



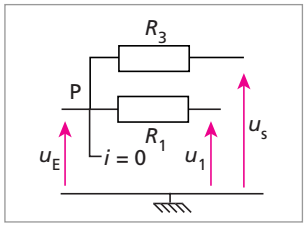
2. Le déphasage entre la tension d'entrée et de sortie vaut : $\varphi = \arg \underline{H} = -2\arctan RC\omega$. φ varie entre 0 et -π selon la valeur de C : on a bien un "déphaseur pur".

3. Quand $\varphi = -\pi/2$, $\arctan RC\omega = +\pi/4$ d'où $RC\omega = 1$. On obtient alors $C = 500$ nF.

Remarque : $|\underline{H}| = \sqrt{\dfrac{1+(RC\omega)^2}{1+(RC\omega)^2}} = 1 = \text{Cte}$ d'où $G = 0$ dB. On a bien un montage qui ne fait que déphaser v_s par rapport à v_e.

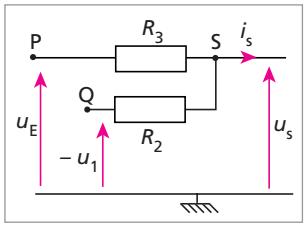
17 **1.** L'A.O. est idéal, donc $(u_d)_1 = 0$, d'où $v_p = u_E$.
La loi des nœuds en P s'écrit :

$$\frac{u_s - u_E}{R_3} = \frac{u_E - u_1}{R_1} \qquad (1)$$



2. Le deuxième A.O. est monté en amplificateur inverseur, avec deux résistances identiques, c'est donc seulement un inverseur : $v_Q = -u_1$.
La loi des nœuds en Q s'écrit :

$$i_s = \frac{u_E - u_s}{R_3} + \frac{(-u_1) - u_3}{R_2} \qquad (2)$$



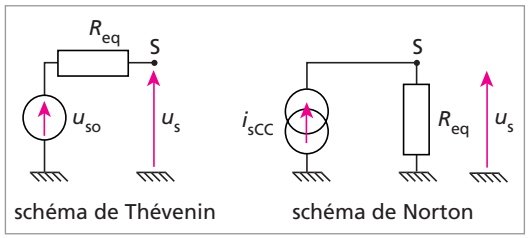
3. $u_s = 0$ donc $i_{sCC} = \dfrac{u_E}{R_3} - \dfrac{u_1}{R_2}$. Or (1) devient $\dfrac{-u_E}{R_3} = \dfrac{u_E - u_1}{R_1}$ d'où :

$$u_1 = u_E\frac{R_1 + R_3}{R_3} \qquad \text{et} \qquad i_{sCC} = \frac{u_E(R_2 - R_1 - R_3)}{R_2R_3}$$

4. $i_s = 0$, en reportant cette valeur dans (1) et (2), il vient : $u_{so} = \dfrac{u_E(-R_2 + R_1 + R_3)}{(-R_2 + R_1 - R_3)}$.

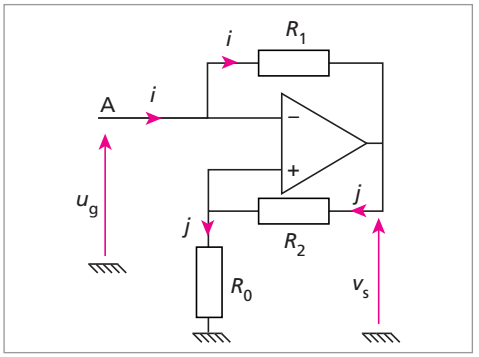
5. On obtient les schémas de Thévenin et Norton ci-contre.
Avec $i_{sCC} = \dfrac{u_{so}}{R_{éq}}$:

$$R_{éq} = \frac{R_2R_3}{R_2 - R_1 + R_3}$$



6. La source de courant est idéale si $R_{éq} = \infty$, il faut donc que $R_2 = R_1 + R_3$. Dans ces conditions, $i = i_{sCC} = -\dfrac{2u_E}{R_2}$.

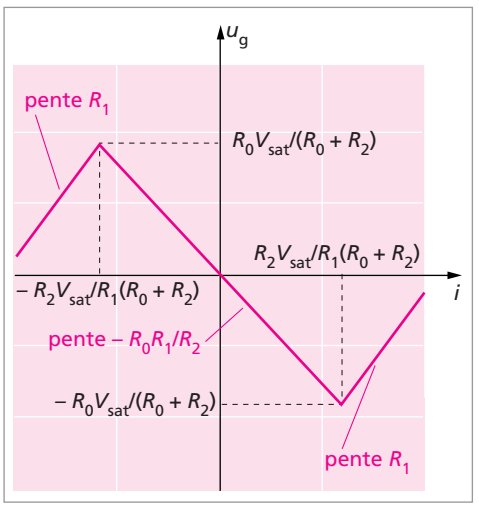
18 **1.a.** En régime linéaire : $R_1 i = -R_2 j$ et $u_g = R_o j$ d'où $u_g = -\dfrac{R_o R_1}{R_2} i$. Attention, le dipôle (D) est étudié en convention récepteur (u_g et i en sens inverse).



b. En régime linéaire et en convention récepteur, $u_g = f(i)$ est donc représentée par une droite passant par l'origine et de pente $-\dfrac{R_o R_1}{R_2}$.

c. Les limites du régime linéaire sont définies par $|v_s| \leqslant V_{sat}$. Or $v_s = (R_o + R_2)j$ d'où $|j| \leqslant \dfrac{V_{sat}}{R_o + R_2}$. De plus $i = -\dfrac{R_2}{R_1} j$ donc $|i| \leqslant \dfrac{R_2 V_{sat}}{R_1(R_o + R_2)}$. Enfin $u_g = R_o j$ d'où $|u_g| \leqslant \dfrac{R_o V_{sat}}{(R_o + R_2)}$.

En régime de saturation, $u_d = e^+ - e^- \neq 0$ donc $R_1 i \neq -R_2 j$. On a alors $v_s = \pm V_{sat}$. Or $i = \dfrac{u_g - v_s}{R_1}$ d'où $i = \dfrac{u_g \mp V_{sat}}{R_1}$ et $u_g = R_1 i \pm V_{sat}$. On obtient alors deux demi-droites de pente $R_1 > 0$. Ces résultats sont résumés sur la caractéristique ci-contre.



d. En régime linéaire et en convention récepteur, $R_D = -\dfrac{R_o R_1}{R_2} < 0$, d'où le nom de "résistance négative" donnée au montage.

2.a. On étudie un circuit $\{R_{tot}, L, C\}$ série où $R_{tot} = R + R_D = R - \dfrac{R_o R_1}{R_2}$.

– Si $R_{tot} = 0$, $R = \dfrac{R_o R_1}{R_2}$: on observe des oscillations non amorties de pulsation $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Si $0 < R_{tot} < R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, soit $\dfrac{R_o R_1}{R_2} < R < \dfrac{R_o R_1}{R_2} + 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$: on observe des oscillations amorties.

– Si $R_{tot} = R_C$, soit $R = \dfrac{R_o R_1}{R_2} + 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$: on est en régime critique.

– Si $R_{tot} > R_C$, soit $R > \dfrac{R_o R_1}{R_2} + 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$: on est en régime apériodique.

Ces régimes nécessitent de l'énergie. Celle-ci provient de l'alimentation de l'A.O. et non du générateur de créneaux. Ce dernier fournit une tension continue ou nulle, dont la dérivée est nulle. Il n'intervient donc pas dans l'équation différentielle du circuit $\{R_{tot}, L, C\}$: On pourrait s'en passer.

b. $-R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 4472\ \Omega$, $R_{tot} = 52\ \Omega$ donc $R_{tot} < R_C$: les oscillations sont amorties.

– Il n'y a pas d'amortissement si $R_{tot} = 0$, soit pour $R_{om} = \dfrac{RR_2}{R_1} = 6\ \text{k}\Omega$.

– Le générateur de créneaux n'est alors plus utile puisque les oscillations ne s'amortissent plus.

19

1. En régime linéaire, $u = -R_o i$ et en régime de saturation, $u = R_1 i \pm V_{sat}$.

2. $u = ai + bi^3$. Pour que la caractéristique réelle et sa modélisation coïncident en régime linéaire, il faut que $a = -R_o$.

La courbe modélisée est extrémum pour $\dfrac{du}{di} = a + 3bi^2 = 0$, soit pour $i = \pm\sqrt{\dfrac{R_o}{3b}}$. Or, sur la courbe réelle, les abscisses de ces extréma valent $i = \pm\dfrac{V_{sat}}{R_o + R_1}$. Pour que ces abscisses correspondent, il faut que $b = \dfrac{R_o(R_o + R_1)^2}{3V_{sat}^2}$.

Lorsque $i'_o = \pm\sqrt{\dfrac{R_o}{3b}}$: $u_{\text{caractéristique}} = \mp R_o i'_o$ et $u_{\text{modélisation}} = \mp\dfrac{2}{3}R_o i'_o$. L'écart entre la caractéristique et sa courbe modélisée vaut donc $|\Delta u_{max}| = \dfrac{R_o i'_o}{3} = \dfrac{R_o V_{sat}}{3(R_o + R_1)}$. Si $R_o \ll R_1$, $|\Delta u_{max}| \ll \dfrac{V_{sat}}{3}$, cet écart est négligeable.

3. Pour le circuit RLC série, $u = -\dfrac{q}{C} - L\dfrac{di}{dt} - Ri = -R_o + bi^3$. En dérivant par rapport à t et en posant $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, il vient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \frac{(R_o - R)}{L\omega_o}\omega_o\left(1 - \frac{3bi^2}{(R_o - R)}\right)\frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0$$

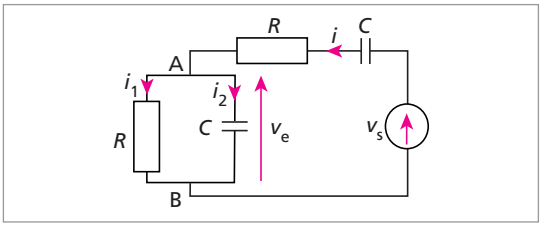
ou encore

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \varepsilon\omega_o\left(1 - \frac{i^2}{i_o^2}\right)\frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0$$

avec $\varepsilon = \dfrac{(R_o - R)}{L\omega_o}$ et $i_o^2 = \dfrac{(R_o - R)V_{sat}^2}{R_o(R_o - R)^2}$. On obtient des oscillations si $i_o^2 > 0$ soit pour $R_o > R$.

4. $\varepsilon = 0{,}14 \ll 1$: ε n'est pas négligeable mais sa faible valeur permet d'appliquer la méthode itérative de résolution de cette équation différentielle. On obtient $T_o = 9{,}9$ ms.

20 **1.a.** Aux bornes de RC série :



$$v_s - v_e = Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Aux bornes de RC parallèle :

$$v_e = Ri_1 = \frac{1}{C}\int i_2\,dt$$

Or $i = i_1 + i_2$. D'où

$$i = \frac{v_e}{R} + C\frac{dv_e}{dt}$$

b. En dérivant la première équation et en ordonnant les termes, on obtient :

$$\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{(RC)^2} = \frac{1}{RC}\frac{dv_s}{dt}$$

2.a. En remplaçant v_s par Gv_e, il vient :

$$\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{1}{RC}(3 - G)\frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{(RC)^2} = 0$$

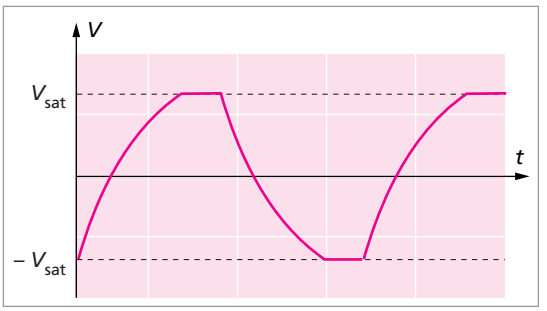
qui admet une solution sinusoïdale non amortie quand $G = 3$.

b. Pour $G = 3$, $\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{v_e}{(RC)^2} = 0$, $\omega_o = \frac{1}{RC}$ et $f_o = \frac{1}{2\pi RC}$.

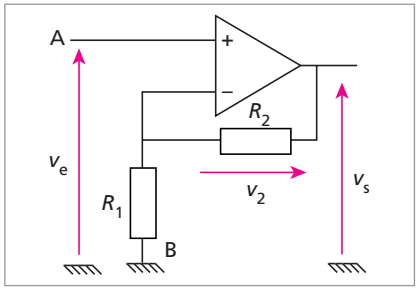
c. A.N. $f_o = 338{,}6$ Hz.

3.a. On est en présence d'un amplificateur non inverseur de gain $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Pour que $G = 3$, il faut que $R_2 = 110\ \text{k}\Omega$.

b. – Si G devient inférieur à 3, une oscillation atténuée exponentiellement apparaît en régime transitoire, donc il n'y a aucune oscillation en régime permanent.
– Si G devient supérieur à 3, une oscillation croissante exponentiellement apparaît et on atteint le régime de saturation.



4.a. $v_s = Gv_e$, $v_e = v_+ - v_-$,
$v_2 = v_s - v_- = v_s - v_e$. D'où $v_s = \dfrac{G}{G-1} v_2$.



b. $G = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$ avec $R_2 = f(v_2)$ et $v_2 = g(v_s)$. On obtient numériquement :

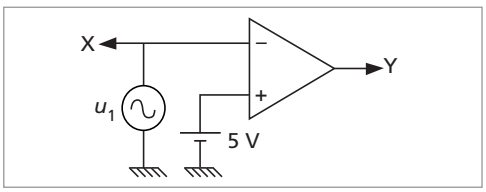
R_2 (kΩ)	238	185	150	126	106	90	74	51	37
V_2 (V)	4	5	6	7	8	9	10	12	14
G	5,32	4,36	3,72	3,29	2,92	2,64	2,34	1,93	1,67
V_s (V)	4,92	6,42	8,2	10,05	12,16	14	14	14	14

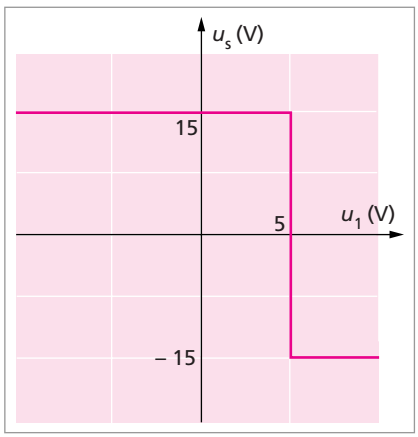
Fonctionnement non linéaire

21 **1.** $u_d = u_2 - u_1$. Quand $u_d > 0$, $u_2 > u_1$ et $u_s = V_{sat}$, quand $u_d < 0$, $u_2 < u_1$ et $u_s = -V_{sat}$: le montage permet de comparer u_2 et u_1.

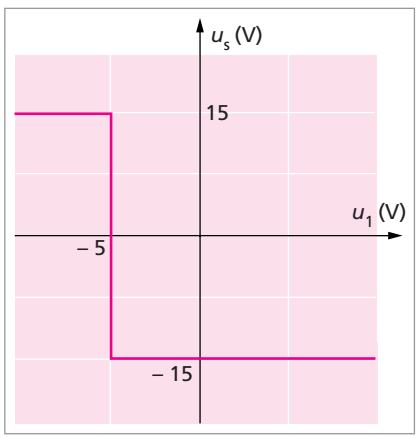
2.a. Quand -10 V $< u_1 < 5$ V, $u_d > 0$ et $u_s = V_{sat}$. Quand $u_1 > 5$ V, $u_d < 0$ et $u_s = -V_{sat}$.

b.

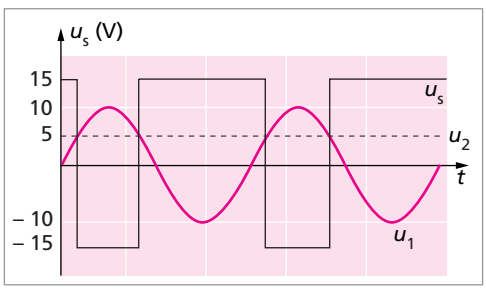




3. Le raisonnement est le même que précédemment, on obtient la courbe ci-contre.



4.a.



b. Il y a basculement quand $u_1 = u_2$, soit quand $10 \sin \omega t = 5$ et donc pour $\omega t = \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{13\pi}{6}$, $\dfrac{17\pi}{6}$, ... $v_s = V_{sat}$ entre les dates t_1 et t_2 telles que $\omega t_1 = \dfrac{5\pi}{6}$ et $\omega t_2 = \dfrac{13\pi}{6}$, soit $t_2 - t_1 = \dfrac{2T}{3} = 2$ ms $= \tau$.

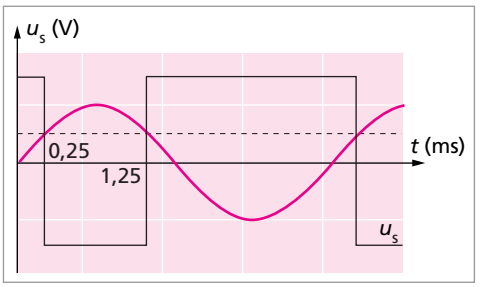
c. Pour modifier τ, il suffit de faire varier u_2 : si u_2 augmente, τ augmente.

d. On obtient ainsi une tension en créneaux disymétriques à partir d'un signal sinusoïdal.

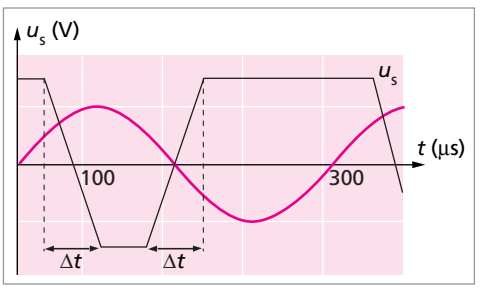
e. En HF, τ devient très faible, l'A.O. n'a plus le temps de basculer ("slew rate" de 0,5 V/µs pour un A.O. 741). Or u_s bascule de -15 V à $+15$ V, soit une variation $\Delta u_s = 30$ V. Il lui faudra $30/0{,}5 = 60$ µs pour basculer. La période du signal doit donc être telle que $T \gg 60$ µs et sa fréquence $f \ll 17$ kHz. Il suffit d'étudier l'exercice suivant pour se convaincre des dégâts d'une tension trop rapide.

22 On rappelle que pour un A.O. 741, $\Delta u_s = 30$ V correspond à une durée de basculement $\Delta t = 60$ µs (voir exercice précédent).

1. Pour $T = 3$ ms, l'A.O. bascule aux dates $T/12$, $5T/12$, $13T/12$, $17T/12$,...La durée de basculement $\Delta t = 60$ µs ne se voit pas ici.



2. Pour $T = 300$ µs, l'A.O. bascule aux dates 25 µs, 125 µs, 325 µs, 425 µs,.. Ici, la durée de basculement de 60 µs n'est plus négligeable : $\Delta t/T = 0{,}2$.



3. Pour $T = 30$ µs, $\Delta t/T = 2$: si $u_s = V_{sat}$ à $t = 0$, l'A.O.n'aura jamais le temps de basculer : $u_s = V_{sat} = \text{Cte}, \forall t$.

4. Rigoureusement, il faut que $\Delta t < T/2$ donc que $f < 1/2\Delta t$. Si $\Delta t = 60$ µs, $f < 8{,}3$ kHz.

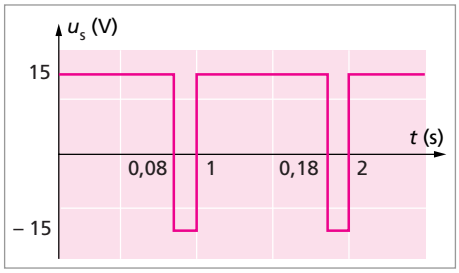
23 **1.a.** $i^+ = 0$ donc la loi du diviseur de tension s'applique dans la branche R_1, R_2 et s'écrit : $u_2 = 15\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

b. A.N. $u_2 = 4{,}3$ V et $u_s = -15$ V.

2.a. u_1 atteint $u_2 = 4$ V à la date $t_1 = 0{,}1.4/5 = 0{,}08$ s. Si $u_1 < 4$ V, $u_s = +15$ V et si $u_1 > 4$ V, $u_s = -15$ V.

b. τ = Rapport cyclique

$$= \frac{\text{durée haute}}{\text{période}} = 0{,}8.$$

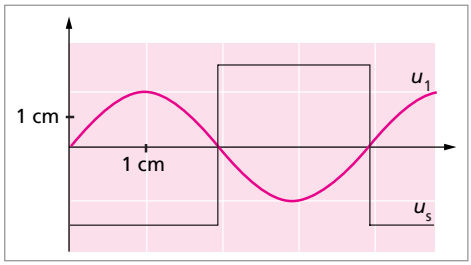


c. Durée en position haute $= Tu_2/5$

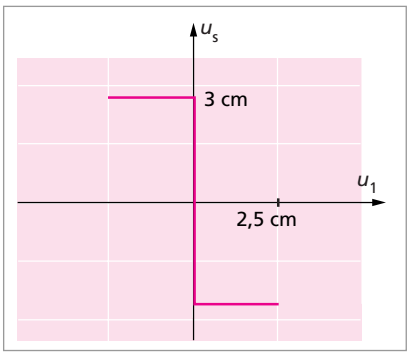
$$= 3R_1T/(R_1 + R_2)$$

d'où $\tau = \dfrac{3R_1}{R_1 + R_2}$. Avec $R_2 = 10$ kΩ, $0 < \tau < 1$ entraîne $0 < R_1 < 5$ kΩ.

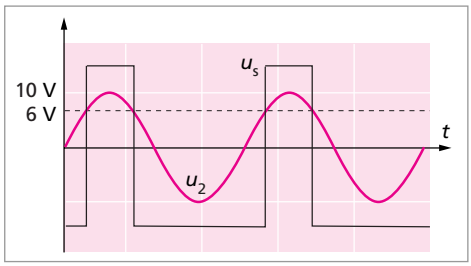
3.a.



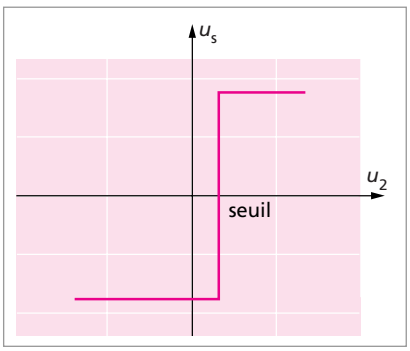
b.



4.a.



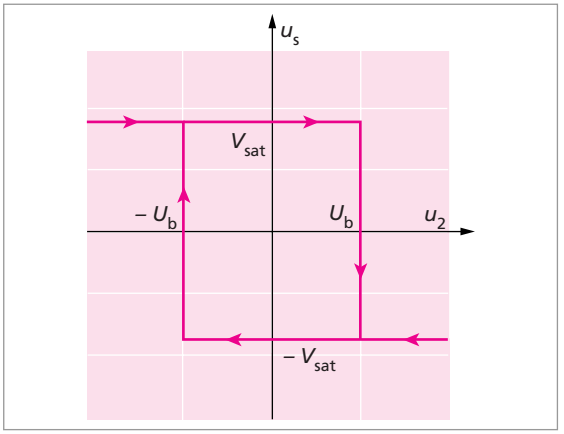
b.



24 **1.** $i^+ = 0$ donc la loi du diviseur de tension s'applique dans la branche R_1, R_2 et s'écrit : $u = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$.

2. Si $u_s = V_{sat}$, $u_d > 0$ or $u_d = u - u_e$ d'où $\dfrac{R_2 V_{sat}}{R_1 + R_2} > u_e$. Si $u_s = -V_{sat}$, $u_d < 0$ d'où $\dfrac{-R_2 V_{sat}}{R_1 + R_2} < u_e$. On obtient alors la caractéristique de transfert représentée sur la figure ci-contre.

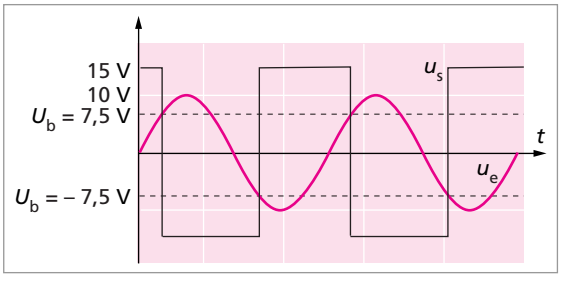
avec $U_b = \dfrac{R_2 V_{sat}}{R_1 + R_2}$.



3. On obtient un cycle d'hystérésis (2 valeurs possibles de u_s correspondent à une seule valeur de u_e).

4. $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $U_b = \dfrac{V_{sat}}{2} = 7{,}5$ V.

5. Ici, la durée de basculement de l'A.O. intervient moins : le basculement est plus net et il peut se régler à l'aide des résistances.



25 **1.** L'A.O.1 fonctionne en intégrateur inverseur : $u_{S1} = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int u_{S3}\,dt$.

2. Pour l'A.O.2 :

$$e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_{S2}, \qquad e^- = u_{S1}$$

Donc si $u_{S2} = +V_{sat}$, $e^+ - e^- > 0$ et $u_{S1} < \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. Inversement, si $u_{S2} = V_{sat}$, $u_{S1} > -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. L'A.O. fonctionne en déclencheur (bascule de Schmitt).

3. L'A.O.3 fonctionne en amplificateur inverseur : $u_{S3} = -\dfrac{R'_2}{R'_1} u_{S2}$.

4. – Si, à $t = 0$, $u_{S2} = +V_{sat}$, $u_{S1} < \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. Or $u_{S3} = -\dfrac{R'_2}{R'_1} V_{sat} \Longrightarrow u_{S1} = \dfrac{R'_2}{R'_1 RC} V_{sat} t$.

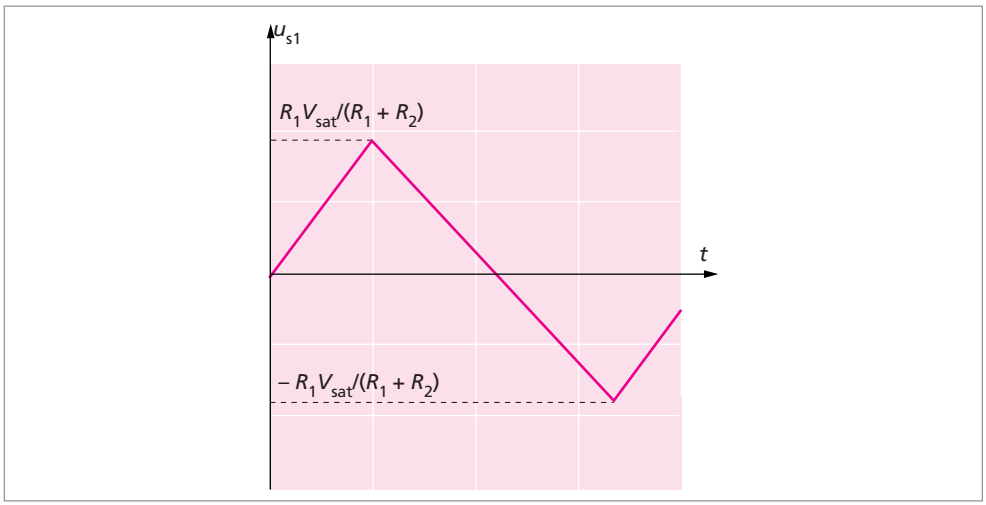
– Quand t croît, u_{S1} augmente jusqu'à $t = t_1$ où $u_{S1} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. On a alors $\dfrac{R'_2}{R'_1 RC} V_{sat} t_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R2} V_{sat}$ d'où $t_1 = \dfrac{R_1 R'_1 RC}{R'_2 (R_1 + R_2)}$. À cet instant, l'A.O.2 bascule $u_{S2} = -V_{sat} \Longrightarrow u_{S3} = +\dfrac{R'_2}{R'_1} V_{sat}$ et $u_{S1} = -\dfrac{R'_2}{R'_1 RC} V_{sat} t + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ en prenant comme nouvelle origine des temps à la date t_1.

– Quand t croît encore, u_{S1} décroît jusqu'à $t = t_2$ (comptée à partir de t_1) où $u_{S1} = -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. On a alors :

$$-\frac{R_1}{R_1 + R2} V_{sat} = -\frac{R'_2}{R'_1 RC} V_{sat} t_2 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

d'où $t_2 = \dfrac{2R_1 R'_1 RC}{R'_2(R_1 + R_2)}$. À cet instant, l'A.O.2 bascule à nouveau, $u_{S2} = -V_{sat}$ $\Longrightarrow u_{S3} = -\dfrac{R'_2}{R'_1} V_{sat} \Longrightarrow u_{S1} = \dfrac{R'_2}{R'_1 RC} V_{sat} t - \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.

– Quand t croît encore, u_{S1} augmente jusqu'à $t = t_3$ (comptée à partir de t_2) tel que $\dfrac{R_1}{R_1 + R2} V_{sat} = \dfrac{R'_2}{R'_1 RC} V_{sat} t_3 - \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ d'où $t_3 = t_2$, etc... et $T = t_2 + t_3 = 2t_2 = \dfrac{4R_1 R'_1 RC}{R'_2(R_1 + R_2)}$.

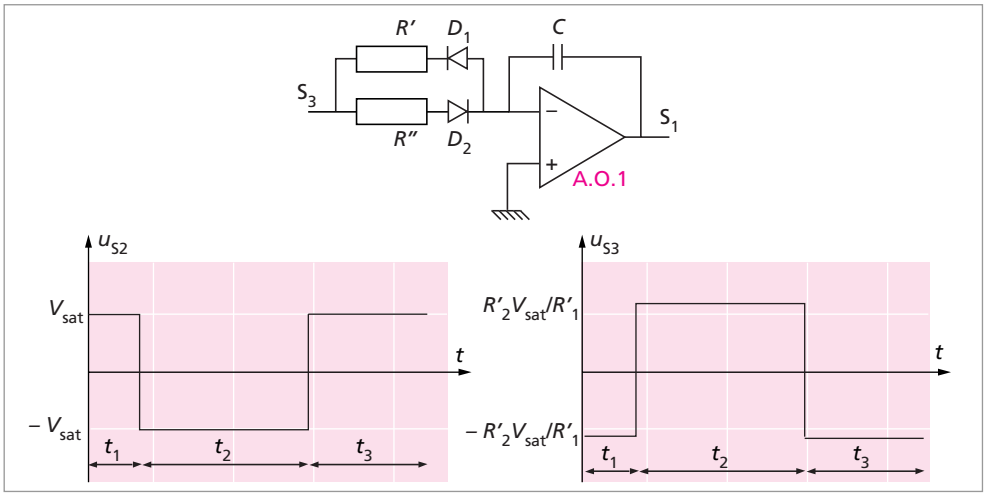


5.a. $7R_1 = 5R_2$

b. $6R'_2 = 5R'_1$

c. $RC = \dfrac{1}{1\,060}$ s.
On choisira $R_1 = 3{,}3\ \text{k}\Omega$, $R'_1 = 1{,}2\ \text{k}\Omega$ et $R = 470\ \Omega$.

6. Dans le montage précédent, on avait $t_1 = t_2$. La vitesse de montée et de descente étaient les mêmes et valaient $\dfrac{R'_2 V_{sat}}{RCR'_1}$. Pour modifier ces temps de montée et de descente sans toucher aux amplitudes, il faut modifier $1/RC$. Il faudrait donc que RC ait 2 valeurs différentes en montée et en descente. Ceci peut être réalisé si C se charge et se décharge dans 2 résistances différentes, d'où la modification suivante :



Pour la montée : $t'_3 = \dfrac{2R_1R'_1R'C}{R'_2(R_1+R_2)}$ ($D1$ est passante), pour la descente $t'_2 = \dfrac{2R_1R'_1R''C}{R'_2(R_1+R_2)}$ ($D2$ est passante). A.N. Avec $t'_3 = 5{,}3$ ms et $t'_2 = 0{,}53$ ms, $R'/R'' = 10$.

26 **1.a.** L'admittance vaut : $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}$

b. On calcule donc $\underline{Y}R = 1 + j\left(RC\omega_o\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{R}{L\omega_o}\dfrac{\omega_o}{\omega}\right) = 1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.

c. $\underline{Z} = \dfrac{R}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$.

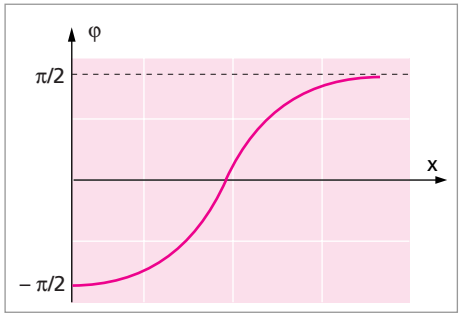
d. En BF, $x \ll 1$, $\underline{Z} \simeq j\dfrac{Rx}{Q} \simeq jL\omega$: le dipôle est inductif.

En HF, $x \gg 1$, $\underline{Z} \simeq -j\dfrac{R}{Qx} \simeq \dfrac{1}{jC\omega}$: le dipôle est capacitif.

2.a. $\underline{I}_o = \underline{Y}\underline{V}_o = \dfrac{V_o}{R}\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}$.

b. On cherche x_c tel que $I_o(x = x_c) = I_{o,\min}\sqrt{2} = \dfrac{V_o}{R}\sqrt{2}$. On a alors : $\dfrac{V_o}{R}\sqrt{1 + Q^2\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right)^2} = \dfrac{V_o}{R}\sqrt{2}$, soit $1 + Q^2\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right) = \pm 1$ dont les solutions sont $x_{c1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\Delta} - \dfrac{1}{Q}\right)$ et $x_{c2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\Delta} + \dfrac{1}{Q}\right)$ avec $\Delta = \dfrac{1}{Q^2} + 4 > \dfrac{1}{Q^2}$.

Elles correspondent aux fréquences de coupure et à la bande passante $f_2 - f_1 = \dfrac{f_o}{Q}$. On est en présence d'un filtre coupe-bande ou rejecteur.



c. $\tan\varphi = Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

d. On pose $x = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon = \dfrac{\delta\omega}{\omega_o}$. On obtient alors, au premier ordre en ε, $\underline{I} \simeq \dfrac{V_o}{R}(1 + 2jQ\varepsilon) \simeq \dfrac{V_o}{R}\left(1 + 2jQ\dfrac{\delta\omega}{\omega_o}\right)$.

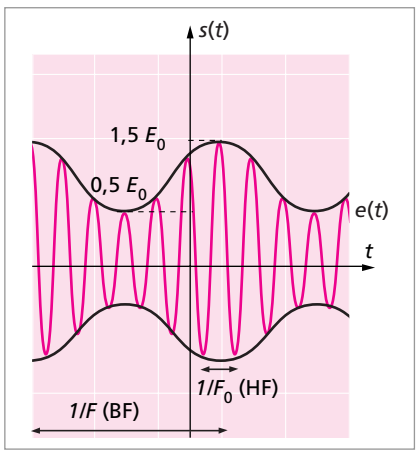
3.a. Le schéma bloc équivalent est le suivant $e(t) \longrightarrow$ [A] $\longrightarrow i(t) = Ae(t)$ avec $\underline{A} = \dfrac{\underline{i(t)}}{\underline{e(t)}}$.

b. $\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \underline{Z}\underline{A} = AR\left(A - 2jQ\dfrac{\delta\omega}{\omega_o}\right)$.

c. Pour $m = 1/2$,

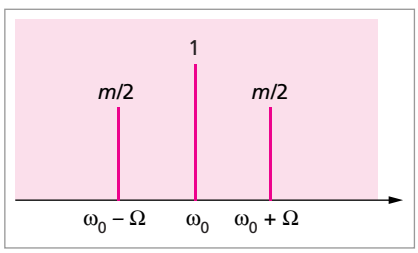
$$e(t) = E_o(1 + 0{,}5\cos\Omega t)\cos\omega_o t$$

dont l'amplitude varie entre $0{,}5E_o$ et $1{,}5E_o$:



d. Il faut utiliser un multiplieur.

e. $e(t) = E_o\left[\cos\omega_o t + \dfrac{m}{2}\cos(\Omega + \omega_o)t + \dfrac{m}{2}\cos(\Omega - \omega_o)t\right]$.



27 **1.a.** Le montage "diviseur de tension" et la loi du même nom conduisent à $\dfrac{\underline{v_2}}{\underline{v}} = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$.

b. $\underline{Z} = (C_1 s C_2) /\!/ L$ d'où $\underline{Z} = \dfrac{jL\omega(C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2) - LC_1C_2\omega^2}$.

c. $\dfrac{\underline{V}}{\underline{V_1}} = \dfrac{jL\omega(C_1 + C_2)}{[(C_1 + C_2) - LC_1C_2\omega^2]R + jL\omega(C_1 + C_2)}$.

d. $\underline{T} = \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{V}}\dfrac{\underline{V}}{\underline{V_1}} = \dfrac{1}{a + \dfrac{1}{jb\omega} + jd\omega}$ avec $a = 1 + \dfrac{C_1}{C_2}$ (sans unité), $b = \dfrac{LC_2}{R(C_1 + C_2)}$ en s) et $d = RC_1$ (en s).

2.a. Le théorème de Millann, appliqué entre E^- et la masse s'écrit : $\underline{v^-} = \dfrac{R_2\underline{v_e} + R_1\underline{v_s}}{R_1 + R_2}$.
Or $\underline{v^-} = \underline{T}\underline{v_s}$, d'où $\underline{v_e} = \left(\dfrac{\underline{T}(R_1 + R_2) - R_1}{R_2}\right)\underline{v_s}$.

b. $\underline{v_e} = 0$, $\underline{v_s} \neq 0$ si $\underline{T} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$ est un réel positif. Or la partie réelle de $\underline{T}$ vaut $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$ d'où $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{C_1}{C_2}$ et annuler la partie imaginaire de $\underline{T}$ conduit à $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{bd}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC'}}$.

3.a. $\underline{Z'_L} = L//C(s) = \dfrac{jL\omega}{1 - LC(s)\omega^2}$. Il suffit de remplacer $jL\omega$ par $\underline{Z'_L}$ dans $\underline{T}(j\omega)$ et on obtient $a' = a$, $b' = b$ et $d' = d + RC(s)\dfrac{C_1 + C_2}{C_2}$.

b. On utilise la même méthode que celle développée dans la question 2.b. : $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{b'd'}} = \dfrac{1}{\sqrt{L(C' + C_o)}}$.

c. Le développement limité de $C(t)$ s'écrit : $C(t) \simeq A_o S_o^n \left(1 + \dfrac{n\varepsilon}{S_o}\cos\alpha t\right)$ avec $A_o S_o^n = C_o$.

d. Dans l'expression de ω_o précédente, on remplace C_o par $C(t)$ et ω_o par $\omega(t)$. Il vient :

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{L(C' + C_o\left(1 + \dfrac{n\varepsilon}{S_o}\cos\alpha t\right)}} \simeq \omega_o\left(1 - \frac{LC_o n\varepsilon\cos\alpha t}{2S_o}\right)$$

On en déduit que $\Omega = \alpha$ et que $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_o} = \dfrac{LC_o n\varepsilon\omega_o^2}{2S_o} = \dfrac{C_o n\varepsilon}{2S_o(C' + C_o)}$.
$\omega(t)$ est la pulsation du signal modulé, ω_o est la pulsation de la porteuse et Ω est la pulsation du signal modulant.

e. Ondes radio : 30 kHz < f_o < 0,3 GHz ($f_o = \omega_o/2\pi$).
Ondes TV : 0,3 GHz < f_o < 3 GHz.

Télécommunications par satellites : $f_o \simeq 30$ GHz.
– On réalise l'accord sur la pulsation de la porteuse ω_o à l'aide d'un circuit bouchon $\{L, C_o\}$ où la capacité C_o est réglable ($C_o \simeq qq$ nF, $L \simeq 1$ mH).
– Voir les problèmes liés à l'A.O. dont la fréquence de coupure est inférieure à celle de la porteuse.
– On peut citer comme autre méthode de modulation, la modulation d'amplitude (voir résumé de cours).

28 **1.** L'A.O. est monté en suiveur. Il permet l'adaptation d'impédance : $Z_s = 0$, quelle que soit Z_e. De plus l'A.O. est idéal, donc $v^+ - v^- = U$.

2. Les intensités des courants valnt : $i_0 = \dfrac{A_o U_{réf} - U}{2^7 R}$, $i_1 = \dfrac{A_1 U_{réf} - U}{2^6 R}$, $i_2 = \dfrac{A_2 U_{réf} - U}{2^5 R}$, ..., $i_7 = \dfrac{A_7 U_{réf} - U}{2^0 R}$.

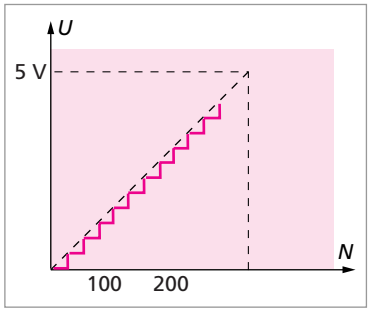
3. Comme $i^+ = 0$ on a $\sum i_k = 0$ d'où :

$$\frac{U_{réf}}{R}\left[\frac{A_o}{2^7} + \frac{A_1}{2^6} + \frac{A_2}{2^5} + ... + \frac{A_7}{2^0}\right] = \frac{U}{R}\left[\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + ... + \frac{1}{2^0}\right].$$

En multipliant les 2 membres par 2^7, il vient : $U_{réf}[A_o + A_1 2^1 + ... + A_7 2^7] = U[2^0 + 2^1 + ... + 2^7]$.
Le 2e crochet vaut 255 et le 1er vaut N. Finalement : $U = U_{réf}\dfrac{N}{255}$.

4. Ce convertisseur est un 8 bits (= 1 octet). Il permet de convertir une grandeur binaire, codée sur un octet et donc comprise entre 0 et 255, en une valeur analogique. Le MSB correspond à A_7 (interrupteur d_7). Le LSB correspond à A_0 (interrupteur d_0).

5. Le quantum correspond au LSB : $A_o = 1$, tous les autres poids A_k étant nuls. $U_{min} = \dfrac{U_{réf}}{255} = 19{,}6$ mV. $U_{max} = 5$ V et $0 < N < 255$. On obtient la marche d'escalier suivante où la hauteur de chaque marche vaut 29,6 mV.



6. Les problèmes liés à ce montage sont les suivants :
– trouver un lot de résistances telles que $R_k = 2^k R$;
– R_k et $U_{réf}$ ne doivent pas varier avec la température (alimentation stabilisée, précision des résistances) ;
– l'A.O. utilisé est réel et donc limité ;
– les interrupteurs ne sont pas parfaits (résistance non nulle quand ils sont fermés).

29 **1.** Ce montage n'utilise que deux types de résistances. De plus, quelle que soit la valeur des bits, le courant circulant dans ces résistances est toujours le même.

2. Au nœud 1 : $\dfrac{v_2 - v_1}{R} + \dfrac{A_3 U_{\text{réf}} - v_1}{2R} = 0$

Au nœud 2 : $\dfrac{v_3 - v_2}{R} + \dfrac{v_1 - v_2}{R} + \dfrac{A_2 U_{\text{réf}} - v_2}{2R} = 0$

Au nœud 3 : $\dfrac{v_4 - v_3}{R} + \dfrac{v_2 - v_3}{R} + \dfrac{A_1 U_{\text{réf}} - v_3}{2R} = 0$

Au nœud 4 : $\dfrac{-v_4}{2R} + \dfrac{v_3 - v_4}{R} + \dfrac{A_1 U_{\text{réf}} - v'}{2R} = 0.$

3. Par substitutions successives, en partant de v_4, on obtient :

$$v_1 = \frac{U_{\text{réf}}}{16}(A_0 2^0 + A_1 2^1 + A_2 2^2 + A_3 2^3) = \frac{U_{\text{réf}} N}{16}.$$

4. $v_1 = \dfrac{U_{\text{réf}} N}{2^4}$ donc si on effectue une conversion à n bits, on aura $v_1 = \dfrac{U_{\text{réf}} N}{2^n}$. L'A.O. étant monté en suiveur, $U = v_1$ d'où $U = \dfrac{U_{\text{réf}} N}{2^n}$.

5. Pour $n = 8$, le quantum correspond à $N = 1$ et vaut donc :

$$U_q = \frac{U_{\text{réf}}.1}{2^8} = \frac{U_{\text{réf}}}{256}.$$

6. Quand $N = \sum_{k=0}^{7} 2^7 = 255$, alors $U = \dfrac{U_{\text{réf}}.255}{256} = 0,996 U_{\text{réf}}$.

7. Même réponse que pour la 1re question de l'exercice précédent.

30 **1.** L'A.O. est idéal, donc $v^+ = v^- = 0$, $i^- = 0$: c'est le même courant d'intensité i qui traverse R et C :

$$i = \frac{U_{\text{réf}}}{R} \qquad \text{et} \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_{\text{C}}}{\mathrm{d}t}$$

avec $U_{\text{C}} = -U_{\text{r}}$ d'où $i = -C\dfrac{\mathrm{d}U_{\text{r}}}{\mathrm{d}t}$.

De plus $\dfrac{U_{\text{réf}}}{R} = -C\dfrac{\mathrm{d}U_{\text{r}}}{\mathrm{d}t}$ d'où :

$$U_{\text{r}} = -\frac{U_{\text{réf}}}{RC}t.$$

On rappelle que $U_{\text{réf}} < 0$ donc $U_{\text{r}} > 0$.

2. Pour le comparateur du haut : si $U_{\text{r}} < U$, alors $a = 0$ ($U_{\text{a}} = 0$ V), et si $U_{\text{r}} > U$, alors $a = 1$ ($U_{\text{a}} = 15$ V).

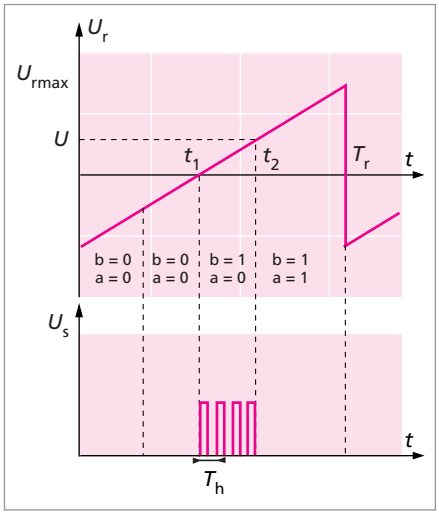
Pour le comparateur du bas : si $U_{\text{r}} < 0$, alors $b = 0$ ($U_{\text{b}} = 0$ V), et si $U_{\text{r}} > 0$, alors $b = 1$ ($U_{\text{b}} = 15$ V).

Le basculement du comparateur du haut se fait à la date T telle que $U = -\dfrac{U_{\text{réf}} T}{RC}$, soit à la date $T = RC\left|\dfrac{U}{U_{\text{réf}}}\right|$.

3.

	a	b	c	d
$t < t_1$	0	0	0	0
$t_1 < t < t_2$	0	1	1	1
$t_2 < t < T_r$	0	1	0	0

4. Figure ci-contre.



5. La durée du comptage vaut :

$$t_2 - t_1 = NT_h$$

Or la pente de la rampe s'écrit :

$$p = \frac{U}{t_2 - t_1} = \frac{2U_{rmax}}{T_r}$$

En comparant les 2 résultats, il vient $\frac{U}{NT_h} = \frac{2U_{rmax}}{T_r}$ soit $N = \frac{1}{2}\frac{U}{U_{rmax}}\frac{T_r}{T_h}$ qui est bien proportionnel à U.

6. Pour $N = 1$, on obtient $U_{min} = 2U_{rmax}\frac{T_h}{T_r}$.

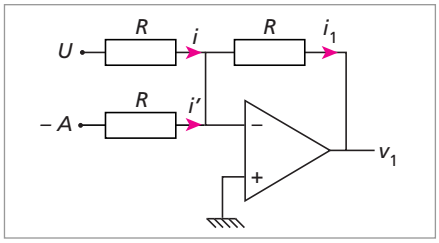
7. On peut citer les défauts de stabilité de $U_{réf}$ et U. De plus un A.O. non idéal implique une durée de commutation non nulle. En conclusion, la conversion est relativement rapide mais manque de précision. On compense en fait l'imprécision des composants (R, C) en utilisant un CAN double rampe.

31 Exemples de conversion en 3 bits :

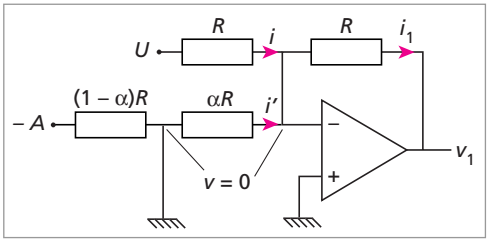
Si $U = 5{,}7$: à la 1re étape : $5{,}7 > 4 \Longrightarrow A = 1$ et $\underline{A} = 4$, à la 2e étape : $(5{,}7-4) = 1{,}7 < 2 \Longrightarrow B = 0$ et $\underline{B} = 0$, à la 3e étape : $(5{,}7-4-0) = 1{,}7 > 1 \Longrightarrow C = 1$. Le nombre s'écrit [101], c'est-à-dire de la même façon que "5" en base 10. La conversion entraîne une erreur $\Delta U = 0{,}7$ V. Si $U = 7{,}2$, on obtient par le même raisonnement [111] équivalent à "7" en base 10, d'où $\Delta U = 0{,}2$ V. Si $U = 2{,}3$, on obtient par le même raisonnement [010] équivalent à "2" en base 10, d'où $\Delta U = 0{,}3$ V.

Fonctionnement du convertisseur :

1. Si $U \geqslant \underline{A}$, C_1 donne $S_1 = A = 1$ quand I_1 est ouvert et $\underline{A} = 4$.
Si $U < \underline{A}$, C_1 donne $S_1 = A = 0$ quand I_1 est fermé et $\underline{A} = 0$.
Si I_1 est ouvert : $i_1 = i + i'$ ce qui s'écrit encore $-\frac{v_1}{R} = \frac{U}{R} - \frac{\underline{A}}{R}$ d'où $v_1 = -(U - \underline{A})$.



Si I_1 est fermé : $i' = 0$ et $i_1 = i$ d'où $v_1 = -U$.
En résumé, $v_1 = -(U - \underline{A})$, quelle que soit la valeur de A.



2. 2e étape : si $-\underline{B} \geqslant v_- = v_1$ c'est-à-dire $-\underline{B} \geqslant -(U - \underline{A}) \Longrightarrow U - \underline{A} \geqslant \underline{B}$ $\Longrightarrow S_2 = B = 1$ et $v_2 = -(v_1 + \underline{B}) = U - (\underline{A} + \underline{B})$ (I_2 ouvert).
Si $-\underline{B} < v_- = v_1$ c'est-à-dire $U < \underline{A} + \underline{B} \Longrightarrow S_2 = B = 0$ (I_2 fermé) d'où et $v_2 = -v_1 = U - \underline{A}$. En résumé, $v_2 = U - (\underline{A} + \underline{B})$, quelle que soit la valeur de B.

3. 3e étape : on obtient de même $v_3 = -(U - \underline{A} - \underline{B} - \underline{C})$.
Attention : il faut bien noter que c'est $-\underline{B}$ qui est relié à la borne + de l'A.O. appelée C_2.

Chapitre 5

Ondes

Ce chapitre traite des propriétés des ondes, et plus particulièrement des ondes électromagnétiques et acoustiques. La première partie présente les notions sur les ondes à connaître absolument. Ces notions permettent de retrouver les résultats obtenus pour des cas particuliers. Les ondes acoustiques seront principalement développées dans les exercices. La partie cours présente simplement les principaux résultats.

1. Introduction

1.1. Équations d'ondes
1.2. Propagation unidimensionnelle (ondes planes)
1.3. Dispersion

2. Ondes électromagnétiques dans le vide

2.1. Équations de Maxwell dans le vide
2.2. Propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide
2.3. Détection des ondes centimétriques

3. Ondes électromagnétiques dans la matière

3.1. Équations de Maxwell dans les milieux matériels
3.2. Conditions de passage
3.3. Exemples de milieux matériels
3.4. Réflexion et transmission (incidence normale)
3.5. Onde « basse fréquence » dans un métal. Épaisseur de peau
3.6. Pression de radiation

4. Ondes acoustiques dans un fluide parfait

4.1. Équation d'ondes
4.2. Impédance acoustique caractéristique (ou itérative). Réflexion, transmission (incidence normale)
4.3. Ultrasons

5. L'effet Doppler

5.1. La source *S* et le récepteur *R* ont des mouvements colinéaires
5.2. Cas général non relativiste
5.3. L'onde se réfléchit sur R avant d'être captée par S
5.4. Effet Doppler relativiste. Décalage vers le rouge

1. Introduction

Cette partie, où sont présentées les notions de base sur les ondes, est à connaître absolument.

1.1. Équations d'ondes

Dans tout ce qui suit, nous nous intéresserons à des phénomènes de propagation. Ceux-ci sont décrits par des grandeurs qui dépendent à la fois de $\vec{r}$ et de t et qui satisfont, dans le cas d'un milieu non dispersif, à l'équation de d'Alembert.
Par exemple, $p(\vec{r},t)$ et $\overrightarrow{E}(\vec{r},t)$ étant respectivement des grandeurs scalaires et vectorielles, nous aurons à considérer des équations de la forme :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = V^2 \Delta p \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = V^2 \Delta \overrightarrow{E} \tag{2}$$

où V est une constante. Remarquons que les équations ci-dessus étant linéaires, elles satisfont au théorème de superposition : toute combinaison linéaire, à coefficients constants, de solutions est elle-même une solution. À noter que, dans (2), chacune des composantes de $\overrightarrow{E}$ satisfait à une équation de la forme (1).

Exemple : en 3 dimensions, (2) équivaut donc à :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z$$

1.2. Propagation unidimensionnelle (ondes planes)

Si l'on se restreint, pour l'instant, à la propagation en 1 dimension (par exemple suivant l'axe des x) d'une grandeur scalaire, (1) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

(c'est le cas, par exemple, pour une onde plane, les surfaces d'onde étant, en l'occurence, des plans d'onde d'équation x = constante.)

On montre que le changement de variable $u = t - x/V$, $v = t + x/V$ conduit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \, \partial v} = 0$$

de solution générale : $p(u, v) = f(u) + g(v)$

soit $p(x, t) = f(t - x/V) + g(t + x/V)$

Chaque terme, f ou g, représente une onde progressive qui **se propage**, sans se déformer, à la célérité V, respectivement dans le sens des x croissants ou décroissants. Le point d'abscisse x reproduit le mouvement de O avec le retard x/V, temps qu'il faut à l'onde pour se propager de O en x. Les fonctions f et g sont déterminées par les **conditions aux limites** (sources, réflexions éventuelles,...)

Soit une source émettant en $x = 0$ un signal **sinusoïdal** qui se propage dans le sens des x croissants. En l'absence de réflexion, on aura $g = 0$ et l'on pourra écrire :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \mathcal{R}e(a.\mathrm{e}^{i\omega(t-x/V)}) \\ &= \mathcal{R}e(a.\mathrm{e}^{i(\omega t - k\,x)}) = \mathcal{R}e(a.\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\,.\,\vec{x})}) \end{aligned} \qquad (3)$$

$\vec{k}$ est le **vecteur d'onde**, normal aux plans d'onde (x = constante), et dirigé, ici, dans le sens des x croissants. Son module est :

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

avec $\lambda = V.T$; λ, longueur d'onde, est la distance parcourue par l'onde pendant une période de vibration.
La relation $k = \omega/V$, avec V constante, exprime que k est proportionnel à ω. Elle est caractéristique d'un milieu **non dispersif**.

Remarques :
– $\mathcal{R}e$ (partie réelle de...) sera parfois sous-entendu. **Attention**, toutefois, quand on s'occupe d'énergie ou de puissance. Il faut, alors, instamment revenir aux grandeurs **réelles**.

– Dans l'éq. (3), la constante a devant l'exponentielle (l'amplitude complexe) peut être prise réelle avec un choix convenable des origines (de temps et d'espace).
Cependant, il faut remarquer que si l'on considère simultanément plusieurs ondes, celles-ci peuvent être déphasées entre elles. On ne pourra pas, a priori, considérer comme réelles **toutes** les amplitudes. Voir l'équation ci-dessous. (Si a est réelle, $a.\mathrm{e}^{i\theta}$ ne l'est pas en général).
– Dans le cas d'une onde plane sinusoïdale se propageant dans une direction quelconque $\vec{k}$, (3) s'écrira :

$$p(\vec{r}, t) = \mathcal{R}e\left(a.\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\,.\,\vec{r})}\right)$$

Si l'on envisage, maintenant, une réflexion totale en $x = L$, on aura :

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \mathcal{R}e\left(a.\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\,.\,\vec{x})} + a.\mathrm{e}^{i\theta}.\mathrm{e}^{i(\omega t + \vec{k}\,.\,\vec{x})}\right) \\ &= 2a.\cos(\omega t + \theta/2).\cos(kx + \theta/2) \end{aligned}$$

(θ est le déphasage qui prend en compte les conditions aux limites en $x = L$). $p(x,t)$ représente alors une **onde stationnaire** (on n'a **pas de propagation** car pas de terme en $t \pm x/V$).

Dans le cas où l'on a réflexion totale à la fois en $x = 0$ et $x = L$, le régime stationnaire (**résonant**) ne pourra s'établir que pour certaines valeurs de ω (**pulsations propres** ou **pulsations de résonance**). Les fréquences admissibles sont donc quantifiées.

1.3. Dispersion

Dans un milieu dispersif, V dépend de ω si bien qu'une onde non monochromatique se déforme lors de sa propagation. Cela se traduira mathématiquement par le fait que ω **n'est pas proportionnel à** k. La fonction $\omega(k)$ est appelée relation de dispersion.
On distinguera alors les vitesses :

$$\textbf{Vitesse de phase} \quad : \quad \boxed{V_\phi = \frac{\omega}{k}} \tag{4}$$

$$\textbf{Vitesse de groupe} \quad : \quad \boxed{V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}} \tag{5}$$

V_g (**vitesse de groupe**) représente, en général, la **vitesse de propagation de l'énergie**. V_g ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière. Dans un milieu **non dispersif**, ω est proportionnel à k ce qui implique $V_\phi = V_g$.
Concernant les ondes lumineuses, la dispersion se traduit par le fait que l'indice n dépend de λ. La vitesse de phase est $V_\phi = c/n$ (c est la vitesse de la lumière dans le vide).
Enfin, dans certains cas, on rencontrera la relation :

$$V_g.V_\phi = \text{constante} = (V_0)^2 \tag{6}$$

Le lecteur est invité, en utilisant les définitions (4) et (5), à chercher quelle est la relation de dispersion qui conduit à (6).

2. Ondes électromagnétiques dans le vide

2.1. Équations de Maxwell dans le vide

L'espace considéré est caractérisé par les constantes ϵ_0 (permittivité diélectrique du vide) et μ_0 (perméabilité magnétique du vide). Il comporte des densités volumiques de charge $\rho(\vec{r}, t)$ et de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

Les quatre **équations de Maxwell** s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && (7)\\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} && (8)\\ \operatorname{div} \overrightarrow{B} &= 0 && (9)\\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{B} &= \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) && (10) \end{aligned}$$

où $\epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ est le **courant de déplacement**.

(7) et (10) sont, respectivement, les formes locales des théorèmes de Gauss et d'Ampère généralisé. (8) est la loi de l'induction de Faraday. Enfin, (9) traduit la conservation du flux magnétique.
Des équations ci-dessus, l'on déduit l'**équation de continuité** (conservation de la charge électrique) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{j} = 0 \qquad (11)$$

Avec les relations d'analyse vectorielle, on établit l'**équation de conservation de l'énergie** :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{P} + \overrightarrow{j} . \overrightarrow{E} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad (12)$$

où W est la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (13)$$

et $\overrightarrow{P}$ le vecteur de **Poynting** :

$$\overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} \qquad (14)$$

Le module de $\overrightarrow{P}$ s'exprime en W/m^2.

Propriété : Le flux de $\overrightarrow{P}$ à travers une surface fermée Σ est égal à la puissance pénétrant dans le volume intérieur τ.

Il faut donc penser à utiliser le vecteur de **Poynting** quand on étudie la propagation d'énergie ou de puissance (voir les exercices 2, 3, 4).

2.2. Propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide

À partir des équations (7) à (10) avec $\rho = 0$ et $\overrightarrow{j} = \vec{0}$, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ vérifient les équations de propagation :

$$\Delta \overrightarrow{E} = \epsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{15}$$

$$\Delta \overrightarrow{B} = \epsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} \tag{16}$$

et que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ se propagent à la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \, \mu_0}}$$

Des ondes planes sont solutions de (15) et (16).
Considérons une telle **onde plane** se propageant sans se déformer ni s'atténuer (son amplitude ne décroît pas au cours de la propagation) selon l'axe Oz dans le sens $z > 0$ (vecteur unitaire : $\vec{n}$). On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ et $\vec{n}$ forment un trièdre trirectangle direct et que l'on a les relations :

$$\begin{aligned} E &= c \, B \\ \overrightarrow{B} &= \frac{\vec{n} \wedge \overrightarrow{E}}{c} \end{aligned}$$

Propriété : Les ondes électromagnétiques (et notamment les ondes lumineuses) planes sont transversales.

On définit l'**impédance itérative** (ou **caractéristique**) du vide par :

$$Z_0 = \frac{\mu_0 E}{B} = \mu_0 \, c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Z_0 s'exprime en ohms ($Z_0 = 376 \ \Omega$).

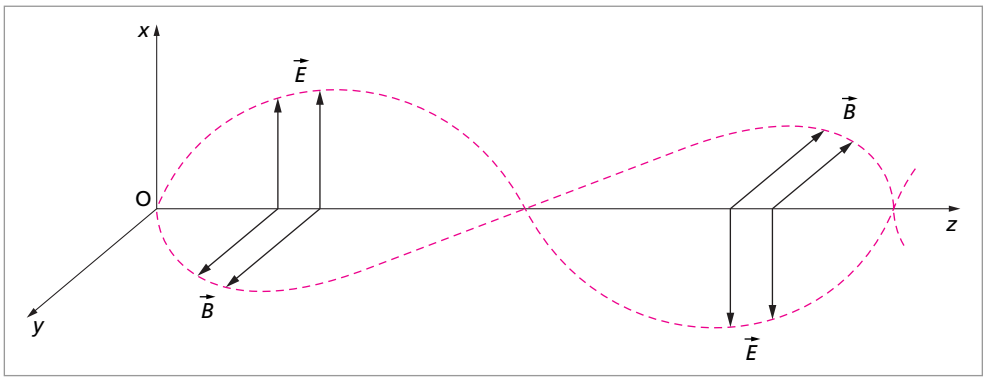
Pour une **onde plane sinusoïdale** se propageant selon Oz, on a pour $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}(\vec{r},t) \quad : \quad E_x &= E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi) \\
E_y &= E_{0y}\cos(\omega t - kz + \psi) \\
E_z &= 0 \\
\overrightarrow{B}(\vec{r},t) \quad : \quad B_x &= -\frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kz + \psi) \\
B_y &= \frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - kz + \phi) \\
B_z &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}}$$

On distingue :

– **la polarisation rectiligne** : $\phi = \psi \ (\text{mod. } \pi)$; $E_y/E_x = \text{cste}$; le vecteur $\overrightarrow{E}$ a une direction constante dans le temps et dans l'espace. (Voir la figure ci-dessous où l'onde est représentée à un certain instant t.)



– **la polarisation circulaire ou elliptique** : $\phi = \psi + \frac{\pi}{2} \ (\text{mod. } \pi)$;

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$

L'extrémité de $\overrightarrow{E}$, en un point donné $\vec{r}$, décrit une ellipse (deux sens de parcours sont possibles correspondant à une polarisation droite ou gauche). Si $E_{0x} = E_{0y}$, la polarisation est circulaire.

D'une manière générale, l'intensité I d'une onde électromagnétique est la puissance moyenne qui traverse un élément de surface d'onde d'aire unité :

$$I = \frac{\langle d\Pi \rangle}{ds}$$

(dΠ désigne la puissance qui traverse l'élément de surface d'onde d'aire ds ; $\langle \ldots \rangle$ désigne la moyenne temporelle).

Exemple : en utilisant le vecteur de Poynting, on obtient, pour une onde plane :

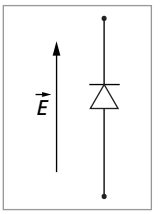
$$I = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 \, c} = \frac{c \langle B^2 \rangle}{\mu_0}$$

et, pour une onde plane sinusoïdale :

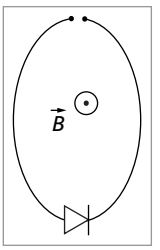
$$I = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2 \, \mu_0 \, c}$$

2.3. Détection des ondes centimétriques

Le détecteur de champ $\overrightarrow{E}$ est rectiligne, de longueur $\approx \lambda/2$. La diode joue le rôle de redresseur. L'intensité du signal reçu est maximale lorsque l'antenne est parallèle à $\overrightarrow{E}$.



Détecteur de champ $\overrightarrow{B}$: l'intensité est maximale lorsque le plan de l'antenne est perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$.



➜ **Voir exercices 1 à 3**

3. Ondes électromagnétiques dans la matière

Il est indispensable d'avoir étudié la partie 2 avant d'aborder celle-ci.

Le passage aux milieux matériels met en jeu des propriétés nouvelles. En effet, ces milieux peuvent se polariser sous l'action d'un champ $\overrightarrow{E}$ (chaque élément de volume dv soumis à $\overrightarrow{E}$ devient un dipôle de moment électrique $\overrightarrow{P}\,$dv ; $\overrightarrow{P}$ est le vecteur polarisation) ou, encore, être conducteurs,... Les conséquences peuvent être importantes quant à la propagation des ondes électromagnétiques : on verra même que, dans certains cas, la propagation est impossible.

L'interaction entre les ondes lumineuses et la matière est à la base de la couleur des corps. Un exemple frappant est la diffusion Rayleigh, dont l'amplitude est en λ^{-4}, de la lumière du Soleil par les molécules de l'air atmosphérique qui montre que :

– les faibles λ sont les plus diffusés d'où la couleur bleue du ciel ;

– les grands λ sont les plus transmis d'où la couleur rouge du soleil couchant...

Dans ce qui suit, on considèrera des milieux matériels non magnétiques (la perméabilité magnétique μ sera prise égale à $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI), homogènes (ϵ, la permittivité diélectrique, est indépendante de $\vec{r}$), linéaires et isotropes.

On introduit les vecteurs :

– $\overrightarrow{D}$: déplacement électrique ;

– $\overrightarrow{H}$: excitation magnétique.

Pour des milieux **linéaires et isotropes**, on a les relations de proportionnalité entre vecteurs :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D} &= \epsilon\, \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{B} &= \mu\, \overrightarrow{H} \end{aligned}$$

ϵ est une constante réelle ou complexe (dans un sens à préciser par la suite). Pour un milieu non absorbant, ϵ est réelle et positive. H s'exprime en A/m et D en C/m^2.

3.1. Équations de Maxwell dans les milieux matériels

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{D} &= \rho && (17) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} && (18) \\ \operatorname{div} \overrightarrow{B} &= 0 && (19) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{H} &= \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} && (20) \end{aligned}$$

(à comparer avec les équations (7) à (10)).

3.2. Conditions de passage

Si l'espace considéré présente une surface (s) de discontinuité séparant deux milieux (1) et (2), les équations précédentes conduisent aux relations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}_{t1} &= \overrightarrow{E}_{t2} && (21) \\ \overrightarrow{B}_{n1} &= \overrightarrow{B}_{n2} && (22) \\ \overrightarrow{D}_{n2} - \overrightarrow{D}_{n1} &= \sigma_s\, \vec{n} && (23) \\ \overrightarrow{H}_{t2} - \overrightarrow{H}_{t1} &= \overrightarrow{j_s} \wedge \vec{n} && (24) \end{aligned}$$

où σ_s est la densité surfacique de charge au point considéré et $\vec{j}_s$ le vecteur courant surfacique. $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à (s), orienté de (1) vers (2). $\overrightarrow{E}_{t1}$ est la composante de $\overrightarrow{E}$ tangente à (s) dans le milieu (1), $\overrightarrow{B}_{n1}$ la composante de $\overrightarrow{B}$ normale à (s) dans le milieu (1), ...

La relation (21) exprime la continuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$.
La relation (22) exprime la continuité de la composante normale de $\overrightarrow{B}$.

Exemple : pour des milieux non magnétiques et en l'absence de charges et de courants en surface, on a :

$$\overrightarrow{B}_1 = \overrightarrow{B}_2 \quad , \quad \overrightarrow{E}_{t1} = \overrightarrow{E}_{t2} \quad \text{et} \quad \epsilon_1 \overrightarrow{E}_{n1} = \epsilon_2 \overrightarrow{E}_{n2} \tag{25}$$

Exemple : lors du passage d'un milieu diélectrique dans un métal, les conditions aux limites usuelles sont les suivantes : $\overrightarrow{E}$ est soit nul soit normal à la surface du métal.

3.3. Exemples de milieux matériels

Diélectrique parfait

$$\rho = \sigma_s = 0 \quad , \quad \vec{j} = \vec{j}_s = \vec{0} \quad , \quad \mu = \mu_0 \quad , \quad \epsilon = \epsilon_0 \, \epsilon_r$$

ϵ_r est la permittivité relative du diélectrique. Dans un tel milieu, les ondes électromagnétiques se propagent à la célérité c' :

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \, \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \, \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

L'indice n du milieu est donc :

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

Le vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ étant égal au moment dipolaire par unité de volume, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D} &= \epsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{P} &= \chi \, \epsilon_0 \overrightarrow{E} \\ \epsilon_r &= 1 + \chi \end{aligned}$$

(χ est la susceptibilité diélectrique du milieu). En général, χ dépendra de ω : un tel milieu sera **dispersif**.
Les diélectriques parfaits sont une bonne approximation de bon nombre d'isolants usuels lorsque ceux-ci ne sont pas chargés (par frottement, par exemple). Pour les corps gazeux, dans les conditions usuelles, ϵ_r est voisin de 1 tout en étant supérieur à 1.
Enfin, pour l'essentiel (hormis la dispersion), ce qui a été dit pour la propagation d'une onde progressive dans le vide reste valable pour les diélectriques parfaits (remplacer la célérité c par $c' = c/n$, l'impédance caractéristique Z_0 par $Z = Z_0/n$,... les ondes planes sont encore transversales avec un trièdre $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \vec{n})$ trirectangle direct,... même expression (14) pour le vecteur de Poynting, ...).

Métal non magnétique

$$\rho = 0 \quad , \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{(Loi d'Ohm)} \quad , \quad \mu = \mu_0$$

γ est la conductivité. Pour un **métal parfait** : $\gamma = \infty$. Cela implique notamment qu'à l'intérieur d'un tel milieu $\vec{E}$ est nul afin que le vecteur courant $\vec{j}$ reste fini. Une autre conséquence de $\gamma = \infty$ est une résistivité nulle donc pas de pertes par effet Joule : **un métal parfait sera un réflecteur parfait.**

Pour les métaux réels, on distingue nettement deux types de comportements suivant la fréquence :

– à « basse fréquence » (ondes radio, infrarouge et même domaine visible), **les effets de conductivité dominent** (rôle important des électrons de conduction). On peut prendre, dans ce cas, $\epsilon \approx \epsilon_0$ (on néglige les effets de polarisation). Pour les ondes radio (voire jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^4 à 10^5 MHz ; ne pas se laisser abuser par l'expression « basse fréquence »), on peut faire l'approximation du métal parfait. Il est bien connu qu'à « basse fréquence » les métaux ont un pouvoir réflecteur élevé.

– à plus haute fréquence (domaine ultraviolet et au-delà), **les effets de polarisation vont être importants** : les oscillations forcées des électrons liés aux ions du réseau cristallin vont jouer un rôle prépondérant. Cela conduit à une diminution notable du pouvoir réflecteur : bon nombre de métaux deviennent transparents dans l'ultraviolet.

3.4. Réflexion et transmission (incidence normale)

On suppose l'espace constitué de deux diélectriques parfaits :

– le milieu (1) d'indice n_1 et occupant la partie $x < 0$,

– le milieu (2) d'indice n_2 et occupant la partie $x > 0$.

Nous allons considérer le phénomène de réflexion-transmission d'une onde plane sinusoïdale arrivant du milieu (1), sous incidence normale, sur le plan $x = 0$ séparant les deux milieux. De plus, on se limite à une onde polarisée rectilignement, une onde quelconque pouvant toujours être décomposée en deux ondes ainsi polarisées. On se propose de calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance.

Par définition, R est le **rapport entre la puissance moyenne réfléchie** par un élément d'aire de la surface de discontinuité **et la puissance moyenne incidente** sur le même élément d'aire.
La définition est analogue pour T.

> ***Remarque :*** on pourra écrire « R = intensité de l'onde réfléchie / intensité de l'onde incidente ». En revanche, écrire « T = intensité de l'onde transmise / intensité de l'onde incidente » n'est valable que sous incidence normale. Pourquoi ?

Les ondes se propagent suivant l'axe des x. Les champs incidents $(\overrightarrow{E}_1,\ \overrightarrow{B}_1)$ sont colinéaires, respectivement, à Oy et Oz. Par symétrie, les champs réfléchis $(\overrightarrow{E}'_1,\ \overrightarrow{B}'_1)$ et transmis $(\overrightarrow{E}_2,\ \overrightarrow{B}_2)$ auront les mêmes polarisations. Les célérités des ondes dans les deux milieux sont $c_1 = c/n_1$ et $c_2 = c/n_2$.

En n'écrivant que les composantes non nulles, on a :

$$\begin{aligned} \text{onde incidente} \qquad E_{1y} &= a_1 . \cos(\omega t - k_1 x) \\ B_{1z} &= \frac{a_1}{c_1} . \cos(\omega t - k_1 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde réfléchie} \qquad E'_{1y} &= a'_1 . \cos(\omega' t + k'_1 x + \phi'_1) \\ B'_{1z} &= -\frac{a'_1}{c_1} . \cos(\omega' t + k'_1 x + \phi'_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde transmise} \qquad E_{2y} &= a_2 . \cos(\omega'' t - k_2 x + \phi_2) \\ B_{2z} &= \frac{a_2}{c_2} . \cos(\omega'' t - k_2 x + \phi_2) \end{aligned}$$

(les 3 ondes étant planes, les 3 trièdres « $(\overrightarrow{E},\ \overrightarrow{B},\ \vec{k})$ » doivent être trirectangles directs, ce qui explique le signe $-$ pour B'_{1z}).

Ici, **tous** les champs sont **tangents** à la surface de discontinuité (le plan $x = 0$). Les milieux étant non magnétiques, les conditions de passage, équations (25), impliquent, purement et simplement, **la continuité des vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$** soit :

$$\begin{aligned} E_{1y} + E'_{1y} &= E_{2y} \\ B_{1z} + B'_{1z} &= B_{2z} \end{aligned}$$

et ceci, pour $x = 0$, $\forall t$.
On en déduit, immédiatement, que :

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad \text{et} \quad k_1 = k'_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \qquad k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

En passant aux amplitudes complexes, on a :

$$\begin{aligned} a_1 + \underline{a'_1} &= \underline{a_2} \\ \frac{1}{c_1}(a_1 - \underline{a'_1}) &= \frac{\underline{a_2}}{c_2} \end{aligned}$$

(les amplitudes des champs incidents sont choisies réelles avec, de plus, $a_1 > 0$).
On trouve facilement :

$$\begin{aligned} \underline{a'_1} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} . a_1 \\ \underline{a_2} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} . a_1 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \underline{a_1'} &= \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2}.\ a_1\ e^{i\phi_1'} \\ \text{avec}\quad \phi_1' &= 0 \quad \text{si} \quad n_1 > n_2 \\ \phi_1' &= \pi \quad \text{si} \quad n_1 < n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a_2} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.\ a_1\ e^{i\phi_2} \\ \text{avec}\quad \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

On observe que :

- **la transmission s'effectue sans changement de phase** ($\phi_2 = 0$)
- $\overrightarrow{E}_1$ et $\overrightarrow{E}_1'$ **sont en opposition de phase si** $n_1 < n_2$
- $\overrightarrow{B}_1$ et $\overrightarrow{B}_1'$ **sont en opposition de phase si** $n_1 > n_2$.

Les intensités des ondes sont :

- onde incidente : $a_1^2/(2\mu_0 c_1)$
- onde réfléchie : $(a_1')^2/(2\mu_0 c_1)$
- onde transmise : $a_2^2/(2\mu_0 c_2)$

On en déduit immédiatement les coefficients R et T **sous incidence normale** :

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{26}$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{27}$$

On voit que R et T sont invariants dans l'échange $1 \longleftrightarrow 2$ c'est-à-dire si l'onde incidente est dans le milieu 2 au lieu du milieu 1. Enfin, on vérifie la conservation de l'énergie :

$$R + T = 1 \tag{28}$$

3.5. Onde « basse fréquence » dans un métal. Épaisseur de peau

On suppose $\epsilon \approx \epsilon_0$ (on néglige les effets de polarisation). À l'aide des équations de Maxwell dans le milieu métallique, on montre que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\gamma\overrightarrow{E} + \epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right) \tag{29}$$

$$\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\left(\gamma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \epsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right) \tag{30}$$

Cette dernière équation est une nouvelle équation d'ondes qui n'est pas de type d'Alembert mais qui reste néanmoins linéaire. En régime sinusoïdal, on a :

$$\overrightarrow{E} \sim \mathrm{e}^{i\omega t} \quad , \quad \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = i\,\omega \overrightarrow{E} \quad , \quad \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \overrightarrow{E}$$

(30) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Delta \overrightarrow{E} &= i\,\gamma\,\omega\,\mu_0\,\overrightarrow{E} - \epsilon_0\,\mu_0\,\omega^2 \overrightarrow{E} \\ \text{soit} \quad \Delta \overrightarrow{E} &= -\,\epsilon'\,\mu_0\,\omega^2\,\overrightarrow{E} \\ \text{avec} \quad \epsilon' &= \epsilon_0 - i\frac{\gamma}{\omega} \end{aligned} \tag{31}$$

Par comparaison avec le vide ($\epsilon'_{\text{vide}} = \epsilon_0$), on voit que le métal a une constante diélectrique complexe : c'est un milieu **absorbant**. Dans le domaine de basses fréquences considéré, on a :

$$\gamma \gg \omega\epsilon_0 \tag{32}$$

On peut négliger le dernier terme de l'éq.(31), ce qui conduit à :

$$\Delta \overrightarrow{E} = i\,\gamma\,\omega\,\mu_0\,\overrightarrow{E}$$

Pour une onde plane polarisée suivant Ox et se propageant dans le sens $z'z$, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= i\,\gamma\,\omega\,\mu_0\,E_x = \nu^2 E_x \\ \text{d'où} \quad E_x &= \left(A.\mathrm{e}^{-\nu z} + B.\mathrm{e}^{+\nu z}\right)\mathrm{e}^{i\omega t} \\ \text{avec} \quad \nu &= \sqrt{(i\gamma\omega\mu_0)} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).\sqrt{(\gamma\omega\mu_0)} \end{aligned}$$

Le terme en $B.\mathrm{e}^{+\nu z}$ est à écarter car il correspond à une onde d'amplitude croissant indéfiniment lors de sa propagation. Finalement :

$$E_x = A\,\mathrm{e}^{-z/d}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - z/d)} \tag{34}$$

$$\text{avec} \quad d = \sqrt{\frac{2}{\gamma\omega\mu_0}} \tag{35}$$

Ainsi, l'onde ne pourra pas se propager dans la « masse » du conducteur : elle s'éteindra sur une distance de l'ordre de d. d est appelée **épaisseur de peau**.

Conséquence : on voit que plus ω est grand (tout en satisfaisant à (32)), plus d est faible. Ainsi, un courant de fréquence suffisamment élevée circulera à la surface des conducteurs (effet de peau). Dans ces conditions, on peut supprimer le « cœur » du conducteur et ne garder que l'« enveloppe ». De plus, pour minimiser les pertes par rayonnement, on utilise des câbles coaxiaux formés de deux conducteurs cylindriques en influence totale et parcourus par des courants rigoureusement égaux et de sens opposés.

3.6. Pression de radiation

Dans ce paragraphe, on considère la réflexion totale d'une onde plane sinusoïdale sur un métal parfait. On se place en **incidence normale**.
Les conditions aux limites (incidence normale, $\overrightarrow{E}$ tangent à la surface du métal parfait donc nul sur cette surface) impliquent que $\overrightarrow{E}$ subit un déphasage de π à la réflexion. En avant du métal, il se forme un système d'ondes stationnaires (plans nodaux de $\overrightarrow{E}$ séparés de $\lambda/2$, nœuds de $\overrightarrow{E}$ = ventres de $\overrightarrow{B}$ ...). En particulier, si $\overrightarrow{E}$ est nul à la surface du métal, $\overrightarrow{B}$ ne l'est pas.
Cela entraîne, notamment, l'existence de courants en surface qui, eux-mêmes, seront soumis à des forces de Laplace dirigées normalement à la surface : l'onde exerce sur le conducteur une pression dite **pression de radiation**.

Cela se comprend bien si l'on considère l'onde incidente comme formée de photons (énergie $h\nu$, quantité de mouvement $h\nu/c$) qui rebondissent de manière parfaitement élastique à la surface du métal. À chaque choc élastique sur la paroi, celle-ci recevra la quantité de mouvement $2h\nu/c$. n étant le nombre de photons incidents par unité de volume, 1 m^2 de paroi sera frappé, en 1 seconde, par nc photons, la quantité de mouvement reçue par la paroi étant $(nc)(2h\nu/c)$. Ainsi l'expression de la pression de radiation (variation de la quantité de mouvement de la paroi par seconde et par m^2) est :

$$P_{rad} = 2nh\nu \qquad \text{pour un métal parfait sous incidence normale}$$

Remarque : $nh\nu$ étant la densité d'énergie de l'onde incidente (et aussi de l'onde réfléchie dans le cas d'une réflexion totale), P_{rad} est la somme des densités d'énergie des ondes incidente et réfléchie. Avec un coefficient de réflexion égal à R, on a (sous incidence normale) :

$$P_{rad} = nh\nu(1 + R)$$

(pour un métal parfait, on a $R = 1$).

➜ **Voir exercices 4 à 9**

4. Ondes acoustiques dans un fluide parfait

Les propriétés de ces ondes seront largement développées en exercices. Nous nous contenterons, ici, de rappeler quelques résultats.

Les ondes acoustiques sont longitudinales. En effet, un fluide parfait se caractérise par son absence de viscosité. Les ondes transversales ne peuvent pas s'y propager. Considérons une onde acoustique plane se propageant dans un tuyau de section constante S_0 et d'axe $x'x$.

4.1. Équation d'ondes

Les ingrédients pour établir l'équation d'onde sont, *de manière directe ou déguisée*, au nombre de trois :
– **la relation fondamentale de la dynamique** appliquée à une petite tranche de fluide (les forces agissant sur cette tranche résultant de la surpression p liée au passage de l'onde) ;
– **l'équation de continuité** (conservation de la matière) ;
– **l'équation d'état** qui spécifie la nature des échanges thermiques ayant lieu dans le fluide. Il est raisonnable de considérer que l'évolution de chaque tranche de fluide se fait à entropie constante. En effet, la transmission d'une surpression est un phénomène propagatif (rapide) tandis que les échanges thermiques sont des processus diffusifs (lents).

De plus, on fait l'**approximation acoustique** :
– la surpression p, la vitesse acoustique u ainsi que leurs dérivées sont des quantités petites (*ne pas confondre u avec la célérité* c *de l'onde*) ;
– les variations relatives de la masse volumique ρ du fluide sont petites.

Dans ces conditions, on aboutit pour la surpression p à l'équation d'ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{35}$$

$$\text{où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \tag{36}$$

$$\text{et} \quad \chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \tag{37}$$

χ_S est le coefficient de compressibilité adiabatique, ρ_0 la masse volumique du fluide au repos et S l'entropie. Remarquons que l'on obtiendrait la même équation d'ondes pour la vitesse acoustique u et le déplacement acoustique ψ. (36) permet d'obtenir l'expression de la vitesse du son dans un gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \tag{38}$$

(γ est le rapport des chaleurs massiques C_P/C_V, R est la constante molaire des gaz parfaits, T_0 la température du gaz au repos et M la masse molaire).

Enfin, la solution générale des équations de propagation pour u et p s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= f(t - x/c) + g(t + x/c) \\ p &= \rho_0 c \left(f(t - x/c) - g(t + x/c) \right) \end{aligned}$$

Pour une onde progressive, seul l'un des deux termes, f ou g, intervient. Le rapport de p au **débit volumique** $S_0 u$ est alors constant et a pour expression $\dfrac{p}{S_0 u} = \pm \dfrac{\rho_0 c}{S_0}$, le signe $\pm$ étant lié au sens de propagation de l'onde.

4.2. Impédance acoustique caractéristique (ou itérative). Réflexion, transmission (incidence normale)

L' impédance caractéristique Z_c est égale au rapport $\left|\frac{p}{S_0 u}\right|$ pour une onde progressive. D'après ce qui précède, on a donc :

$$Z_c = \frac{\rho_0 \, c}{S_0} \tag{39}$$

Lors du passage d'un tuyau dans un autre, les conditions aux limites sont : **la continuité des surpressions et celle des débits volumiques.**

On en déduit les coefficients R et T de réflexion et de transmission en puissance :

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \tag{40}$$

$$T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{41}$$

$$R + T = 1 \tag{42}$$

(Z_1 et Z_2 sont les impédances caractéristiques des 2 tuyaux).

(40) et (41) sont à comparer à (26) et (27). En fait, il s'agit de la même chose. Se souvenir de la relation entre l'indice de réfraction n et l'impédance Z ($Z = \sqrt{(\mu_0/\epsilon)} = Z_0/n$) et réécrire (26) et (27) en termes d'impédances.

4.3. Ultrasons

On nomme ainsi les ondes acoustiques de fréquence f supérieure à 20 kHz. Leur faible longueur d'onde permet d'en faire des faisceaux fins très directifs (la notion de rayon prend de plus en plus de sens au fur et à mesure que λ diminue, les effets de diffraction devenant négligeables).

Exemple de générateur d'ultrasons : *la cellule piézoélectrique* dont l'élément de base est une lame de quartz qui, placée dans un champ électrique rapidement variable, effectue des oscillations mécaniques forcées, engendrant des vibrations longitudinales (acoustiques) de fréquence élevée. L'effet piézoélectrique étant *réversible*, une cellule piézoélectrique peut aussi bien jouer le rôle de récepteur d'ultrasons.

Exemples d'utilisation des ultrasons : échographie, sondage sous-marin (SONAR), détection des défauts internes dans un solide, ...

➜ **Voir exercices 10 à 13**

5. L'effet Doppler

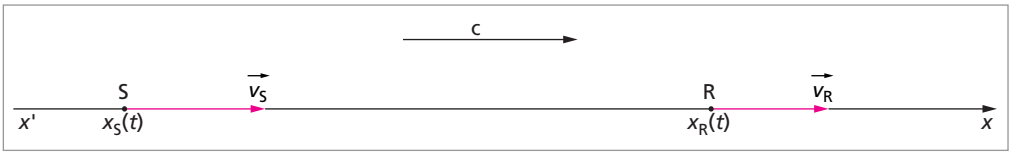
Cette partie, plus spécialisée, peut être sautée en première lecture.

L'effet Doppler se manifeste lorsqu'une source S, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v_S}$, émet un signal de fréquence N_0 ($T_0 = 1/N_0$). Le récepteur, R, animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_R}$, reçoit le signal qui a, alors, la fréquence N à la réception ($T = 1/N$).

On considèrera d'abord l'effet Doppler non relativiste. Par exemple, pour une onde sonore se propageant dans l'air avec la célérité c. (Dans tout ce qui suit, quel que soit le sens de propagation de l'onde, on prendra c > 0).

5.1. La source *S* et le récepteur *R* ont des mouvements colinéaires

On considère la situation décrite par la figure ci-dessous (v_R et v_S sont algébriques et inférieures à c) :



À l'instant $t = 0$: $\overline{SR} = d$, $x_S(0) = 0$, $x_R(0) = d$
À l'instant t : $x_S(t) = v_S.t$, $x_R(t) = d + v_R.t$

Soit un signal émis à $t = t_0$ par S et reçu à t'_0 par R. On a *la relation très importante* :

$$c(t'_0 - t_0) = x_R(t'_0) - x_S(t_0) = d + v_R.t'_0 - v_S.t_0 \qquad (43)$$

On considère les deux cas $t_0 = 0$ et $t_0 = T_0$ pour déduire la période T du signal reçu par R.

i) $t_0 = 0$, $t'_0 = t_1$; (43) s'écrit $c.t_1 = d + v_R.t_1$, soit $t_1 = d/(c - v_R)$.

ii) $t_0 = T_0$, $t'_0 = t_2$; (43) s'écrit $c(t_2 - T_0) = d + v_R.t_2 - v_S.T_0$. Donc :
$t_2 = d/(c - v_R) + T_0.(c - v_S)/(c - v_R)$.

Ce qui conduit à : $$T \equiv t_2 - t_1 = T_0 \left(\frac{c - v_S}{c - v_R} \right) \qquad (44)$$

et à la fréquence de l'onde reçue par R : $$N = N_0 \left(\frac{c - v_R}{c - v_S} \right) \qquad (45)$$

Remarque : si l'onde se propage dans le sens des x décroissants, il suffit de changer c en $-c$ dans les formules ci-dessus (avec toujours c > 0).

Si $|v_R|, |v_S| \ll$ c, alors on peut écrire :

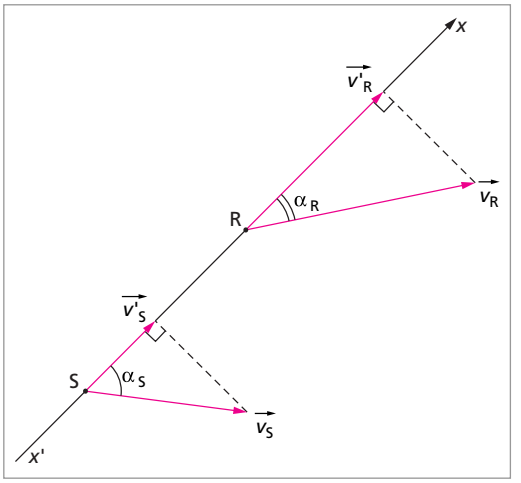
$$\frac{N - N_0}{N_0} \equiv \frac{\Delta N}{N_0} = \left(\frac{v_S - v_R}{\text{c}}\right) \tag{46}$$

Si, en plus $v_R = 0$, alors $\Delta N/N_0 = v_S/\text{c} > 0$ si $v_S > 0$, ce qui signifie que le récepteur percevra une fréquence N plus élevée que la fréquence émise N_0 si la source se rapproche du récepteur, le contraire ayant lieu si S s'éloigne de R.

Au moment où S croisera R, ce dernier percevra un brusque changement de fréquence ($\Delta N/N_0$ passant de v_S/c à $v_S/(-\text{c})$).

5.2. Cas général non relativiste

Dans le cas général, les relations (45) et (46) restent valables à condition de remplacer les vitesses par leurs projections sur SR.



$$N = N_0 \left(\frac{\text{c} - v'_R}{\text{c} - v'_S}\right)$$

$$v'_R = \|\vec{v}_R\| \cos\alpha_R$$

$$v'_S = \|\vec{v}_S\| \cos\alpha_S$$

v'_R et v'_S sont **algébriques**. Pour $v_R = 0$ et $\|\vec{v}_S\| \ll$ c, on a :

$$N = N_0 \frac{\text{c}}{\text{c} - \|\vec{v}_S\| \cos\alpha_S}$$

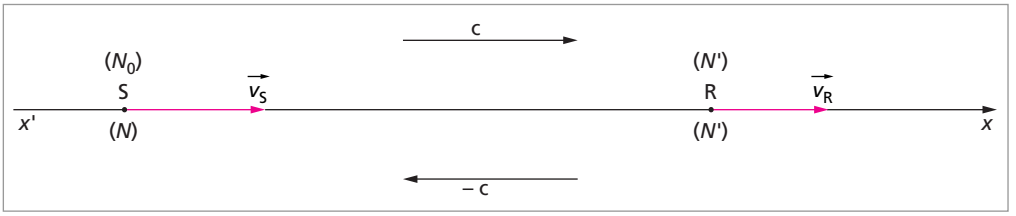
$$= N_0 \frac{1}{1 - (\|\vec{v}_S\| \cos\alpha_S)/\text{c}} \approx N_0 \left(1 + \frac{\|\vec{v}_S\|}{\text{c}} \cos\alpha_S\right)$$

D'où :

$$\frac{\Delta N}{N_0} \approx \frac{\|\vec{v}_S\|}{\text{c}} \cos\alpha_S \tag{47}$$

5.3. L'onde se réfléchit sur R avant d'être captée par S

S émet une onde de fréquence N_0 ; l'onde reçue (puis réémise) par R a une fréquence N' ; finalement, l'onde reçue par S a une fréquence N (voir la figure ci-dessous). On calcule N en fonction de N_0, c, v_R et v_S.



Fréquence N' de l'onde captée (puis réémise) par R :

$$N' = N_0 \left(\frac{\mathrm{c} - v_R}{\mathrm{c} - v_S} \right)$$

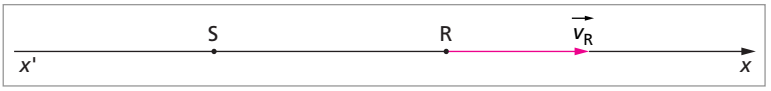
Fréquence N de l'onde captée par S :

$$N = N' \left(\frac{-\mathrm{c} - v_S}{-\mathrm{c} - v_R} \right) = N_0 \left(\frac{\mathrm{c} + v_S}{\mathrm{c} + v_R} \right) \left(\frac{\mathrm{c} - v_R}{\mathrm{c} - v_S} \right)$$

$$|v_R|, |v_S| \ll \mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N}{N_0} \approx 2 \left(\frac{v_S - v_R}{\mathrm{c}} \right)$$

L'effet est doublé à cause de la réflexion. (Comparer avec l'éq.(46)).

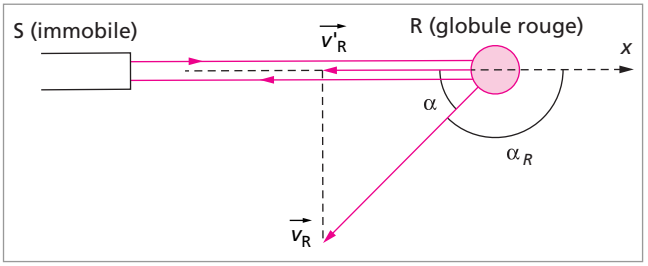
Exemple : Si S est immobile, alors $\Delta N/N_0 = -\,2v_R/\mathrm{c}$. Cette quantité est négative lorsque R s'éloigne de S.



Application

Le VÉLOCIMÈTRE SANGUIN à EFFET DOPPLER

Le dispositif est décrit sur la figure ci-dessous.



$$v'_R = \|\vec{v}_R\| \cos\alpha_R = -\|\vec{v}_R\| \cos\alpha$$

La source S, immobile, émet des ultrasons qui se réfléchissent sur les globules rouges R en mouvement (vitesse $\vec{v}_R$) avant d'être captés par S.

$$\frac{\Delta N}{N_0} = -\,\frac{2v'_R}{\mathrm{c}} = \frac{2\|\vec{v}_R\| \cos\alpha}{\mathrm{c}}$$

Cette quantité est positive si l'angle α est aigu, c'est-à-dire si R se rapproche de S.

L'angle α étant connu, la mesure de $\Delta N/N_0$ permet d'avoir accès à $\|\vec{v}_R\|$ et donc de connaître la vitesse des globules rouges.

5.4. Effet Doppler relativiste. Décalage vers le rouge

En reprenant les notations de la figure p. 401, on considère une source S en mouvement avec la vitesse $\vec{v}_S$, le récepteur R étant immobile. S émet une lumière de fréquence N_0 et de célérité c.

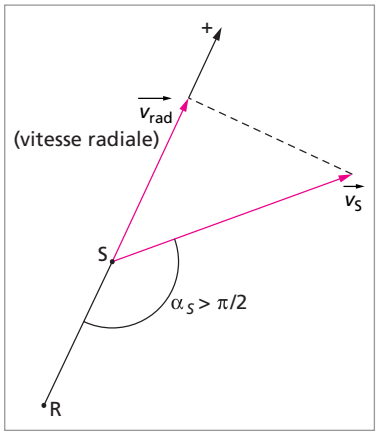
Dans le cas où $\|\vec{v}_S\| \ll c$ et $\alpha_S \neq \pi/2$, la formule non relativiste (47) reste valable :

$$\frac{\Delta N}{N_0} \approx \frac{\|\vec{v}_S\|}{c} \cos \alpha_S \tag{48}$$

Passant aux longueurs d'onde, avec $\lambda = \frac{c}{N}$, on obtient :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx -\frac{\Delta N}{N} \approx -\frac{\Delta N}{N_0} \approx -\frac{\|\vec{v}_S\|}{c} \cos \alpha_S = \frac{v_{rad}}{c} \tag{49}$$

v_{rad} est la vitesse radiale de la source (v_{rad} est *algébrique*). Si v_{rad} est positive (voir figure ci-contre), alors la source lumineuse (par exemple, l'étoile) s'éloigne de R et la relation (49) conduit à $\Delta\lambda > 0$. Ainsi, dans ce cas, on a un décalage vers les grandes longueurs d'ondes dit « *décalage vers le rouge* » ou encore « *red shift* ». Ce décalage, effectivement observé par les astrophysiciens, est un des supports expérimentaux de la théorie de l'expansion de l'univers.



➜ **Voir exercice 14**

ÉNONCÉS

Exercice 1 Onde électromagnétique plane

On considère le vide en l'absence de toute charge et de tout courant.

1. Écrire les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les vecteurs champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$.

2. On s'intéresse aux vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ ne dépendant spatialement que de la coordonnée z, c'est-à-dire aux ondes planes.

2.a. Écrire l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit $\overrightarrow{E}$. La solution de cette équation est la somme de deux termes ; montrer qu'ils correspondent à deux ondes progressives se propageant en sens contraires. Calculer la vitesse c de propagation de ces ondes.

2.b. On considère une de ces ondes progressives. Montrer qu'elle est transversale, que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux et que le trièdre $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \vec{c})$ est direct ($\vec{c}$ est le vecteur vitesse de l'onde).

2.c. On suppose $\overrightarrow{E}$ de la forme :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 . \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - ct)\right)$$

($\overrightarrow{E}_0$ étant dirigé suivant l'axe Ox). Montrer que $\overrightarrow{B}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_0 . \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - ct)\right)$$

($\overrightarrow{B}_0$ étant dirigé suivant l'axe Oy). Quelle relation y a-t-il entre ϵ_0, μ_0, E_0 et B_0 ? Calculer B_0 et λ pour $E_0 = 10^2$ V.m^{-1} et une fréquence $f = 10^{10}$ Hz.

Exercice 2 Onde électromagnétique plane. Énergie

Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, polarisée rectilignement ($\overrightarrow{E}$ est parallèle à Oz) se propage dans le vide, dans la direction Ou du plan xOy ($\widehat{(Ox, Ou)} = \alpha$). Les variations de E_z au point O sont représentées par : $E_z = E_0 \cos(\omega t)$.

1. Écrire les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ et des vecteurs champ électrique $\overrightarrow{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t)$ en un point $\vec{r}$ quelconque à l'instant t.
Soit Z_0 l'impédance itérative du vide : $Z_0 = \mu_0 E/B$. Exprimer Z_0 en fonction de μ_0 et ϵ_0. Calculer numériquement Z_0.

2. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique $\mathrm{d}W(\vec{r}, t)/\mathrm{d}v$ ainsi que sa valeur moyenne au cours du temps $\langle \mathrm{d}W/\mathrm{d}v \rangle$.

3. Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\overrightarrow{P}(\vec{r}, t)$ puis son module $P(\vec{r}, t)$ ainsi que la valeur moyenne $\langle P \rangle$ de celui-ci au cours du temps. Comparer $\langle P \rangle$ et $\langle \mathrm{d}W/\mathrm{d}v \rangle$. Interprétation physique.

Exercice 3 Interférences. Énergie

Soient deux ondes électromagnétiques Ond_1 et Ond_2, planes, polarisées rectilignement, se propageant dans le vide, dans deux directions Ou_1 et Ou_2 du plan xOy ($(\widehat{Ox, Ou_1}) = -(\widehat{Ox, Ou_2}) = \theta$).
En un point $\vec{r}$ quelconque, les composantes non nulles des champs électriques $\overrightarrow{E}_1(\vec{r}, t)$ et $\overrightarrow{E}_2(\vec{r}, t)$ de ces deux ondes sont données, respectivement, par :

$$E_{1z} = E_0 . \cos(\omega t - \vec{k}_1 . \vec{r}) \quad \text{pour } Ond_1 \tag{50}$$

$$E_{2z} = E_0 . \cos(\omega t - \vec{k}_2 . \vec{r}) \quad \text{pour } Ond_2 \tag{51}$$

On désignera par k le module commun des vecteurs $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ et l'on posera $k\cos(\theta) = \alpha$ et $k\sin(\theta) = \beta$.

1. Déterminer les composantes de $\vec{k}_1$ et $\overrightarrow{B}_1$ (champ magnétique de l'onde Ond_1) ainsi que les composantes de $\vec{k}_2$ et $\overrightarrow{B}_2$ (onde Ond_2).

2.a. Calculer les composantes du champ électrique $\overrightarrow{E}(\vec{r}, t)$ résultant de la superposition de ces deux ondes. Calculer la moyenne dans le temps du carré du module de $\overrightarrow{E}$. On notera $\langle E^2 \rangle$ cette moyenne. Quelles sont les surfaces $\langle E^2 \rangle$ = constante ?

2.b. On suppose que la fréquence des ondes se trouve dans le domaine visible. L'œil étant sensible à $\langle E^2 \rangle$, montrer que l'on peut observer des franges d'interférences dans un plan perpendiculaire à Ox. Calculer dans ces conditions l'interfrange i en fonction de θ et λ.

2.c. Calculer la vitesse de phase V_ϕ. Commenter ?

3. Calculer les composantes de $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t)$, champ magnétique de l'onde résultante. Discuter la polarisation de ce vecteur.

4.a. Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\overrightarrow{P}(\vec{r}, t)$.

4.b. Étudier le transfert d'énergie à travers une portion d'un plan perpendiculaire à Oz, puis d'un plan perpendiculaire à Oy.

4.c. Calculer la puissance moyenne $\langle W \rangle$ qui traverse un domaine d'aire S, dont les dimensions sont grandes devant l'interfrange i, et qui est situé dans un plan perpendiculaire à Ox.

4.d. Calculer la valeur moyenne, dans le temps et dans l'espace, de la densité d'énergie. Calculer la vitesse de propagation V_E de l'énergie. Quelle relation y a-t-il entre V_E et V_ϕ ?

Exercice 4 Réflexion. Réfraction. Formules de Fresnel

Cet exercice, plus délicat, peut être sauté en première lecture.

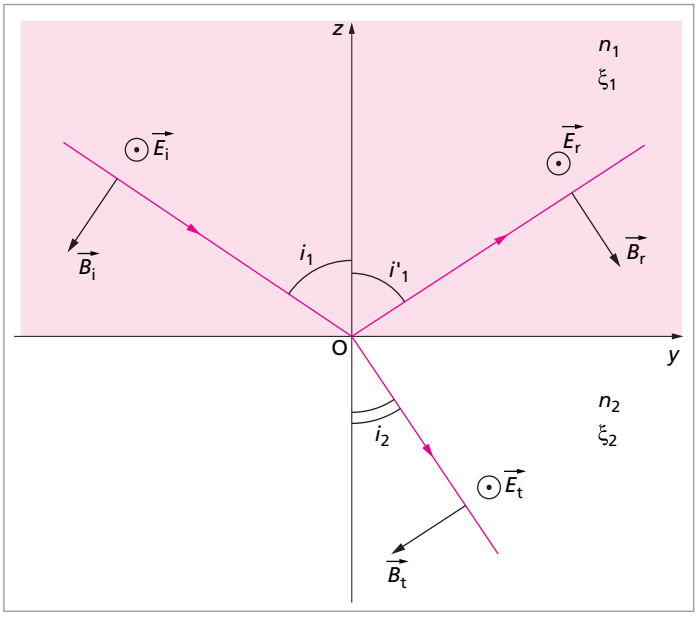
On considère deux milieux diélectriques parfaits, isotropes, homogènes et indéfinis de constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2, de perméabilités magnétiques égales à μ_0, séparés par une surface S (le plan xOy) non chargée.

1. Exprimer les indices n_1 et n_2 de ces deux milieux en fonction de ϵ_0, ϵ_1 et ϵ_2.
Une onde électromagnétique incidente, plane, monochromatique et de pulsation ω, de champ électrique :

$$\overrightarrow{E}_i = \overrightarrow{E}_i^0 \, . \, e^{i(\omega t - \vec{k} \, . \, \vec{r})} \quad , \quad \overrightarrow{E}_i^0 \quad \text{réel} \quad ,$$

tombe sur S avec l'angle d'incidence i_1.

2. On suppose d'abord que l'onde est polarisée rectilignement et que le vecteur $\overrightarrow{E}_i$ est normal au plan d'incidence. On admettra (par raison de symétrie) que les directions de propagation des ondes incidente, réfléchie et transmise sont coplanaires et que les vecteurs champ électrique, $\overrightarrow{E}_r$, de l'onde réfléchie, et $\overrightarrow{E}_t$, de l'onde transmise, sont normaux au plan d'incidence (voir figure ci-dessous).

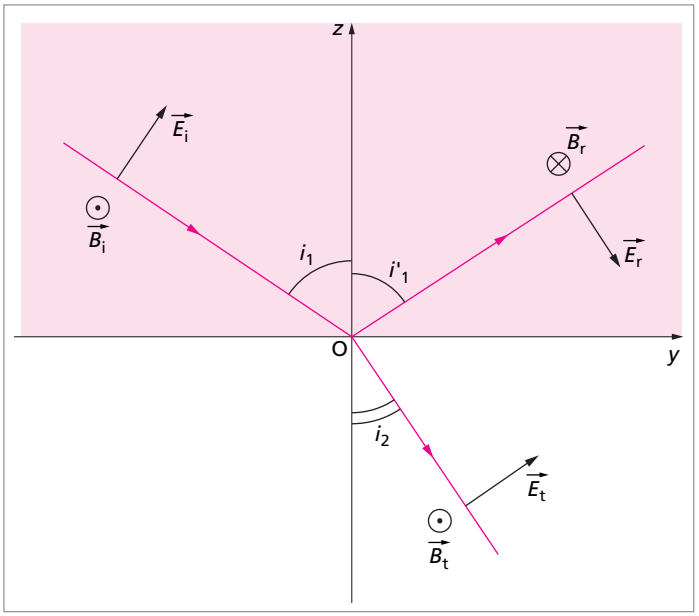


2.a. Écrire les conditions de passage pour les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en un point d'abscisse y quelconque.

2.b. En déduire les relations entre les angles i_1, i'_1 et i_2. Donner les expressions des rapports des amplitudes E_r^0/E_i^0 et E_t^0/E_i^0 du champ électrique en fonction de i_1, i_2, n_1 et n_2.

2.c. Calculer les rapports des modules des vecteurs de Poynting $(R_r/R_i)_\perp$ et $(R_t/R_i)_\perp$ en $z = 0$. En déduire les rapports $(P_r/P_i)_\perp$ et $(P_t/P_i)_\perp$ des puissances électromagnétiques réfléchie et transmise à la puissance incidente (ces rapports sont appelés coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie). Indiquer graphiquement les variations de ces coefficients en fonction de i_1 dans le cas $n_1 < n_2$.

3. Reprendre la question 2 avec les polarisations indiquées sur la figure ci-dessous.



On désignera les coefficients de réflexion et de transmission, respectivement, par $(P_r/P_i)_{\|}$ et par $(P_t/P_i)_{\|}$. Que se passe-t-il lorsque $\tan(i_1) = n_2/n_1$? Conséquence pour de la lumière naturelle tombant sur S sous cette incidence ?

4. Que deviennent les coefficients de réflexion et de transmission sous incidence normale ?

Exercice 5 Dispersion de la lumière

On se propose d'étudier un modèle schématique expliquant l'origine de la dispersion de la lumière dans un milieu transparent, macroscopiquement neutre, constitué de noyaux (très lourds) et d'électrons. On admettra que seuls ces derniers sont susceptibles de subir des actions de la part d'un champ électromagnétique, leur mouvement restant toutefois non relativiste.

En l'absence de champ électrique, pour un élément de volume dv d'un tel milieu, le barycentre des charges négatives coïncide avec celui des charges positives ; sous l'action d'un champ $\vec{E}$, cette coïncidence cesse : le milieu se polarise et l'élément de volume devient un dipôle de moment électrique $\vec{P}\,dv$; $\vec{P}$ est le vecteur polarisation. On rappelle que, ϵ_0 étant la permittivité du vide, ϵ la permittivité absolue du milieu, on a, pour un diélectrique parfait, la relation

$$\epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Les milieux considérés sont suffisamment dilués pour que le champ qui agit sur une particule soit le champ électrique de l'onde, ce qui revient à négliger le champ local créé par l'entourage, éventuellement polarisé.

1. Une onde électromagnétique se propage dans un milieu isolant, homogène et isotrope. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur un électron de charge $-e$ et de vitesse $\overrightarrow{v}$. Montrer que le terme dû au champ magnétique est négligeable vis-à-vis de celui dû au champ électrique. Dans la suite, on considèrera que la force se réduit au seul terme dû au champ électrique.

2. On considère un plasma, gaz sous faible pression et totalement ionisé ; les actions sur une particule dues aux autres particules s'annulent en moyenne, de sorte qu'un électron peut être considéré comme libre ; il n'y a aucune force de frottement ou d'amortissement.

a. Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron (masse m_e) dans un champ électrique $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 \cos \omega t$; la position de l'électron sera définie par son déplacement $\vec{r}$.

b. Intégrer et donner l'expression de $\vec{r}$ en fonction du temps.

c. Sachant qu'il y a N électrons libres par unité de volume, donner l'expression du vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$. En déduire l'expression de l'indice n en fonction de la pulsation ω de l'onde. On posera :

$$\omega_P^2 = \frac{N\mathrm{e}^2}{m_e \epsilon_0}$$

d. Étudier les variations de n avec ω. Envisager les cas où $\omega > \omega_P$ et donner la signification de ω_P ou de $\nu_P = \omega_P / 2\pi$.

Connaît-on un milieu naturel dans lequel la propagation des ondes électromagnétiques donne lieu aux phénomènes étudiés ici ?

Application Numérique : calculer le nombre N d'électrons libres par mètre cube dans un plasma pour lequel $\nu_P = 20$ MHz. Préciser les longueurs d'onde des ondes pouvant se propager dans ce milieu.

3. On considère maintenant un gaz formé de molécules non polaires. On admet que tout se passe comme si certains électrons avaient une position d'équilibre et étaient rappelés vers elle par une force :

$$\vec{f} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$$

On néglige tout frottement ou amortissement.

a. Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un tel électron sous l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 \cos \omega t$.

b. Considérer la solution correspondant aux oscillations forcées et donner l'expression de $\vec{r}$ en fonction du temps t.

c. En admettant que le milieu contient N électrons par unité de volume vibrant ainsi, calculer le vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ et en déduire l'indice n.

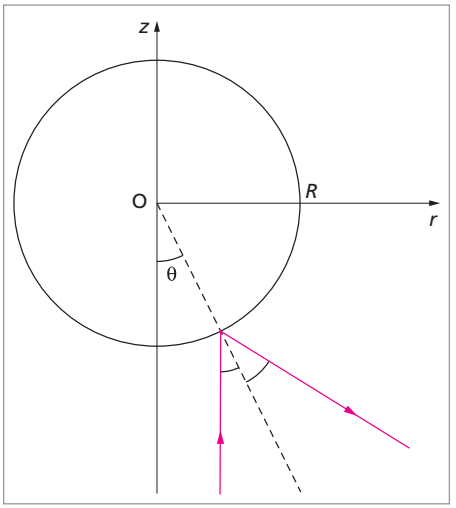
d. Tracer la courbe représentant les variations de n^2 avec la pulsation ω. Discuter les résultats suivant les différentes valeurs de ω.

e. On considère le cas $\omega \approx \omega_0$; quelle force supplémentaire faut-il prendre en compte si l'on veut que le modèle reste « réaliste » ?

f. Comment varie, expérimentalement, l'indice n avec la fréquence de l'onde ? Que savez-vous de l'indice d'un cristal pour les rayons X ?

Exercice 6 Lévitation d'une sphère dans un faisceau laser. Pression de radiation

Une bille parfaitement conductrice (rayon R, masse m) est placée dans un faisceau laser homogène se propageant suivant la verticale ascendante. On désigne par E l'éclairement du faisceau, c'est-à-dire la puissance lumineuse traversant l'unité de surface, et par N le nombre de photons par unité de volume.
La bille est supposée immobile et les chocs photon-bille sont supposés élastiques.



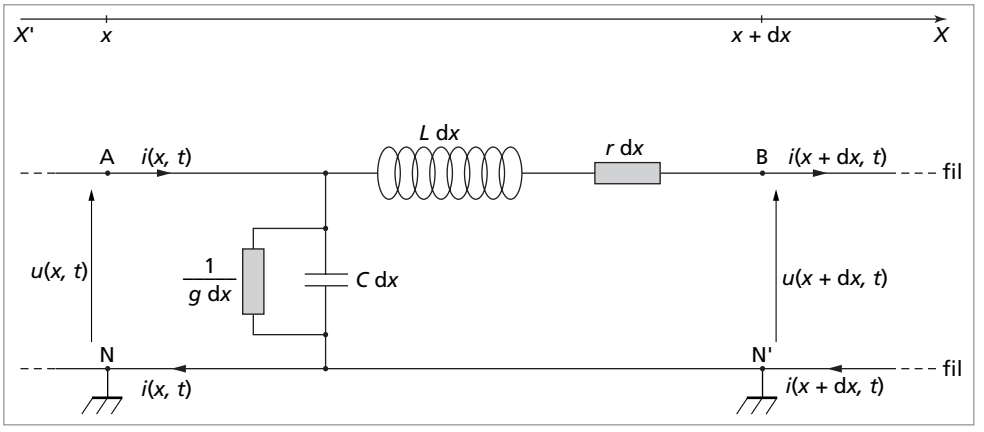
1. Calculer la quantité de mouvement cédée par un photon à la bille lors d'un choc (voir figure ci-contre). En déduire la pression exercée par le faisceau sur un élément de surface de la bille

2. Quelle est la force exercée par le faisceau sur la bille ?

3. Quel doit être le rayon d'une bille d'aluminium (masse volumique $\rho = 2{,}7.10^3$ kg/m^3) lévitant dans un faisceau laser de puissance 1 W et de section 1 mm^2 ?

Exercice 7 Équation des télégraphistes

On considère une ligne de longueur D, parcourue par un courant haute fréquence, dont la longueur d'onde λ est du même ordre de grandeur que D. Dans ces conditions on ne peut plus négliger les phénomènes de propagation : à un instant donné, l'intensité n'est plus la même en tous les points de la ligne. Soit un point d'abscisse x. On désignera par $i(x, t)$ l'intensité et par $u(x, t)$ la tension entre ce point et une masse de référence.
On modélise une portion de ligne de longueur dx selon le schéma ci-dessous.



L'ensemble est caractérisé par les grandeurs suivantes :

- r : résistance par unité de longueur ;
- L : inductance par unité de longueur ;
- C : capacité par unité de longueur ;
- g : conductance à travers l'isolant par unité de longueur (le courant de fuite pour une portion de longueur dx est : $i_f(x,t) = g.\mathrm{d}x.u(x,t)$).

Une ligne sans pertes sera caractérisée par : $r = g = 0$.

1. En appliquant la loi d'Ohm à un instant t entre A et B, montrer que l'on a la relation :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{52}$$

En utilisant la loi des condensateurs ainsi que la loi des nœuds, montrer que :

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + \mathrm{C}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{53}$$

Éliminer i entre les deux équations précédentes. En déduire l'équation différentielle satisfaite par u.

Dans toute la suite, on considèrera une ligne sans pertes.
Montrer que, dans ce cas, on a :

$$L\,\mathrm{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{54}$$

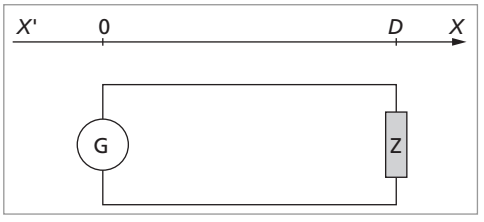
2. Le générateur **G** qui alimente la ligne étant un générateur de tension sinusoïdale, vérifier que les solutions de l'équation (54) peuvent être mises sous la forme :

$$i = i_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} + i_1 \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} \tag{55}$$

$$u = \rho i_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} - \rho i_1 \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} \tag{56}$$

Calculer ρ ainsi que la vitesse de propagation V des signaux dans la ligne. Donner une interprétation physique des deux termes apparaissant dans chacune des relations (55) et (56).

3. L'extrémité de la ligne de longueur D est fermée sur une impédance complexe Z.
Calculer $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en fonction de i_0, ρ, Z, ω, k et D.



Calculer $Z(x)$ (impédance « ramenée en x ») : $Z(x) = u(x,t)/i(x,t)$.

Donner les expressions de $Z(x)$ dans les trois cas suivants :

- $Z = \infty$ (ligne ouverte en D) ;
- $Z = 0$ (ligne court-circuitée en D) ;
- Z purement imaginaire ($Z = iY$) (ligne fermée sur une impédance purement réactive).

Montrer que, dans chacun de ces cas, la ligne est le siège d'ondes stationnaires. Interpréter énergétiquement.

Existe-t-il une valeur particulière R de Z telle que $Z(x)$ ne dépende pas de x ? Montrer que, dans ce cas, l'un des termes de chacune des relations (55) et (56) est nul. Donner une interprétation physique de ce résultat.

On envisage le cas où la ligne alimente un récepteur d'impédance $R' = \alpha R$, $\alpha = 0{,}1$. Montrer qu'en utilisant un transformateur on peut éviter toute réflexion nuisible (on réalise, ainsi, une adaptation d'impédance). Calculer le rapport de transformation du transformateur à utiliser.

4. La ligne électrique est constituée d'un câble coaxial composé de deux cylindres conducteurs (sans résistance), de même axe et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), séparés par un isolant de permittivité diélectrique relative ϵ_r et de perméabilité magnétique égale à μ_0.

4.a. Calculer L et C.

4.b. Calculer numériquement la vitesse de propagation V de l'« onde de courant » ainsi que l'impédance caractéristique (ou itérative) R. On donne $R_2 = 3R_1$ et $\epsilon_r = 2{,}25$.

4.c. Quel est l'intérêt de prendre un câble coaxial alors qu'on aurait pu aussi bien réaliser la ligne à l'aide de deux fils parallèles extérieurs l'un à l'autre ?

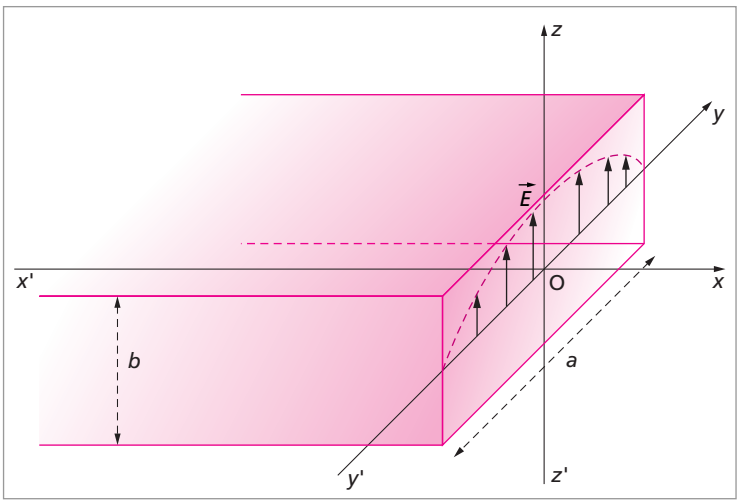
Exercice 8 Ondes électromagnétiques. Guide d'ondes

On considère un tuyau à section rectangulaire (guide d'ondes) dont les parois sont parfaitement conductrices.

À l'intérieur de ce guide d'ondes, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ satisfait à l'équation :

$$\Delta \overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{57}$$

(c est la célérité de la lumière dans le vide).



On s'intéresse aux ondes, de pulsation ω, se propageant dans la direction $x'x$ et telles que $E_x = 0$ (ondes transversales électriques). De plus, nous nous limiterons uniquement à l'étude de la composante E_z (on pose $E_y = 0$).
Les conditions aux limites imposent que $\overrightarrow{E}$, sur une paroi conductrice, est soit nul soit normal à cette paroi.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{E}$ de composantes :

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = 0$$

$$\text{et} \quad E_z = E_0 \cos(n\pi y/a) \cos(\omega t - k'_n x) \quad , \quad \text{avec } n \text{ entier impair} \tag{58}$$

$$\text{ou} \quad E_z = E_0 \sin(n\pi y/a) \cos(\omega t - k'_n x) \quad , \text{ avec } n \text{ pair} \tag{59}$$

satisfait à ces conditions aux limites.

On parlera, alors, de *mode transversal-électrique* TE_{n0}. Dans ce qui suit, on va s'intéresser au mode TE_{10}.

2. En utilisant les équations (57), (58) et (59), déterminer k'_1 en fonction de ω, c et a.
Montrer que seules les ondes de pulsation ω supérieure à une certaine valeur ω_{c1} peuvent se propager selon le mode TE_{10}. Déterminer ω_{c1} (pulsation de coupure du mode considéré).
Calculer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g. Quelle relation y a-t-il entre v_ϕ, v_g et c ?
Tracer, sur un même graphique, les courbes représentant les variations de v_ϕ et de v_g en fonction de ω.

3. Comment faut-il choisir la dimension a du guide afin que, ω étant fixée, seul le mode TE_{10} se propage à l'exclusion de tous les autres modes TE_{n0} avec $n \geqslant 2$?

Exercice 9 Vitesse de phase. Vitesse de groupe

Ces notions sont abordées, ici, en prenant l'exemple des ondes électromagnétiques. Toutefois, les conclusions de l'exercice ont un caractère tout à fait général.

Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, est quasi-monochromatique. Son spectre est centré en ω_0 avec un étalement $\Delta\omega$. On considère $\Delta\omega \ll \omega_0$.
Cette onde se propage suivant l'axe Ox dans un milieu linéaire, homogène, isotrope, dispersif mais non absorbant. La relation de dispersion est $\omega = \omega(k)$ avec $\omega_0 = \omega(k_0)$.
On peut décrire cette onde comme la superposition d'ondes planes monochromatiques de même amplitude, de vecteurs d'onde de normes comprises entre $(k_0 - \Delta k/2)$ et $(k_0 + \Delta k/2)$ avec $\Delta k \ll k_0$. On suppose, de plus, ces ondes en phase à $t = 0$.

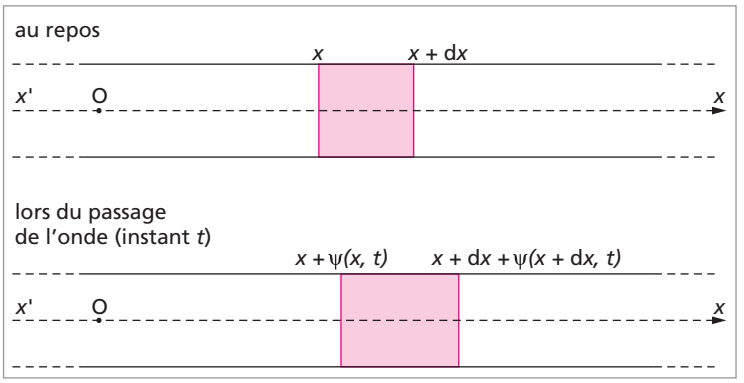
1. Exprimer, en notation complexe, le champ électrique de l'onde résultante. À l'aide d'un développement limité de la relation de dispersion autour de $k = k_0$, exprimer ω en fonction de k_0, de $k' = k - k_0$, de v_ϕ et de v_g.

2. Calculer l'intensité de cette onde. Montrer qu'à un instant t l'onde est localisée dans l'espace. Calculer son étendue spatiale Δx et montrer que la vitesse de propagation de l'énergie est la vitesse de groupe.

Exercice 10 Propagation d'ondes acoustiques dans un fluide (d'après Capes 1994)

On néglige l'action de la pesanteur ainsi que toute viscosité ou frottement.

1. Propagation d'une onde acoustique dans un tuyau de section constante contenant un fluide unique.



Un tuyau cylindrique de section constante S, d'axe $x'x$, contient un fluide qui, au repos, est à la pression P_0 et à la température T_0 ; sa masse volumique est ρ_0.
On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x + dx$ (voir figure ci-dessus). Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x : soit $\psi(x, t)$ ce déplacement à l'instant t ; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant t entre les plans $x + \psi(x, t)$ et $x + dx + \psi(x + dx, t)$. On notera de façon comparable :

- $u(x, t)$, la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t ;
- $p(x, t)$, la surpression liée au passage de l'onde en x à t ; ainsi la pression s'écrira $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$;
- $\rho(x, t)$, la masse volumique du fluide à l'abscisse x, à l'instant t.

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes ; ainsi le déplacement $\psi(x, t)$, la surpression $p(x, t)$, la variation de la masse volumique $\rho(x, t) - \rho_0$ et leurs dérivées peuvent être considérés comme des infiniments petits du premier ordre. On négligera dans la suite tous les infiniments petits d'ordre supérieur ou égal à deux (*approximation acoustique*).

1.a. En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir, en précisant la loi utilisée, que :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

1.b. L'évolution de la portion de fluide considérée est supposée isentropique.

1.b.α. Justifier brièvement cette hypothèse.

1.b.β. On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique d'un fluide est défini par :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$$

où V est le volume du fluide et P sa pression ; pour le fluide contenu dans le tuyau cylindrique, on supposera que χ_S est une constante. Montrer que l'on peut écrire :

$$p = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

1.c.α. En utilisant les résutats des questions 1.a) et 1.b), établir l'équation vérifiée par la grandeur $\psi(x, t)$.

1.c.β. Quelle est la solution générale de cette équation ?

1.c.γ. Montrer que l'on peut interpréter chacun des deux termes intervenant dans la réponse 1.c.β) comme des ondes planes progressives se propageant à la célérité c (vitesse du son).
Donner l'expression de c.

1.d. Montrer que les grandeurs $p(x, t)$ et $u(x, t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\psi(x, t)$.

1.e.α. Le fluide est de l'air considéré comme un gaz parfait :

- de $\gamma = C_p/C_v = 1{,}40$;
- de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1} ;
- de température $T_0 = 293$ K.

La constante molaire des gaz parfait est $R = 8{,}32$ J.mol^{-1}.K^{-1}.
Donner l'expression de c en fonction de γ, R, T_0 et M.

1.e.β. *Application numérique :* calculer c.

1.f. On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω qu'on représente en notation complexe par :

$$\underline{\psi_1}(x, t) = A_1\, e^{i(\omega t - kx)}$$

où A_1 est une constante et k un réel positif (module du vecteur d'onde).
On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'y a aucune onde réfléchie se superposant à $\underline{\psi_1}$.

1.f.α. Dans quel sens se propage cette onde ? Déterminer l'expression de k en fonction de ω et c, et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de 1 kHz.

1.f.β. Exprimer alors $\underline{p_1}(x, t)$ et $\underline{u_1}(x, t)$, représentations complexes de la surpression et de la vitesse acoustique.

1.f.γ. On appelle résistivité acoustique R, la grandeur caractéristique du milieu définie par :

$$R = \rho_0 \, c$$

Montrer que le rapport $\frac{\underline{p_1}}{\underline{u_1}}$ s'exprime simplement en fonction de R.

1.g. Soit l'onde :

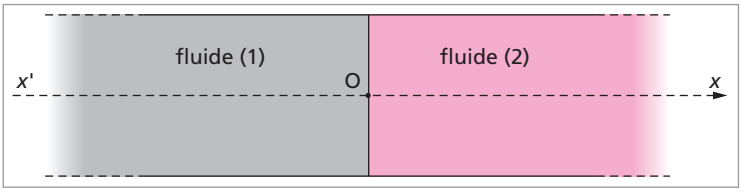
$$\underline{\psi_1'} = A_1' \, e^{i(\omega t + kx)} \quad ,$$

$\underline{p_1'}$ et $\underline{u_1'}$ étant les ondes de surpression et de vitesse associées (notations complexes).

Exprimer le rapport $\frac{\underline{p_1'}}{\underline{u_1'}}$ en fonction de la résistivité acoustique R du milieu.

2. Réflexion et transmission dans un tuyau de section constante contenant deux fluides.

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions.



La région (1) ($x < 0$) contient un fluide (1) de résistivité acoustique $R_1 = \rho_1 c_1$.
La région (2) ($x > 0$) contient un fluide (2) de résistivité acoustique $R_2 = \rho_2 c_2$.
La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en O à l'axe $x'x$. Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par :

$$\underline{p_1} = p_{01} \, e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

(onde de surpression d'amplitude p_{01}). À l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1), $\underline{p_1'}$, et à une onde transmise dans le milieu (2), $\underline{p_2}$.
On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitude respective p_{01}' et p_{02}.

On précise que dans le plan $x = 0$ il y a continuité de la pression (donc de la surpression p) et du débit volumique $S.u$ c'est-à-dire ici continuité de la grandeur u car la section S du tuyau est constante.

2.a. Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation ω que l'onde incidente.

2.b. Exprimer $\underline{p_1'}$ et $\underline{p_2}$ (notations complexes).

2.c. En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de R_1 et R_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions ($r_{12} = p_{01}'/p_{01}$, $t_{12} = p_{02}/p_{01}$).

2.d. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance.
On peut calculer pour chacune de ces trois ondes une puissance acoustique transportée, définie par :

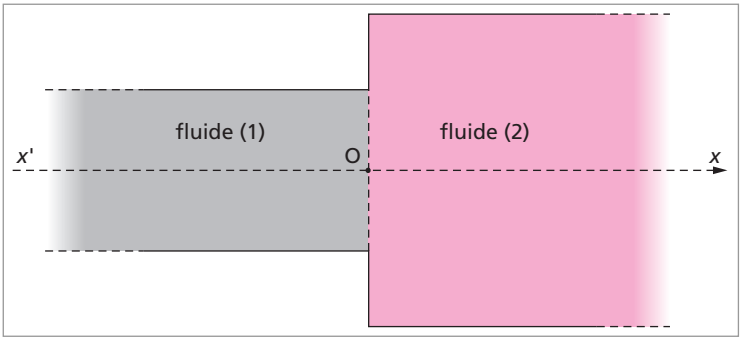
$$P = |p.u|\ S \qquad (S \text{ est la section du tuyau})$$

2.d.α. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T, relatifs aux puissances acoustiques.

2.d.β. Quelle remarque (prévisible) peut-on faire au sujet de R et T ?

2.e. *Application numérique.* Le milieu (1) est de l'air, le milieu (2) est de l'eau. On prendra respectivement : $R_1 = 4{,}50.10^2$ uSI et $R_2 = 1{,}40.10^6$ uSI.
Déterminer numériquement R et T. Commenter.

3. *Réflexion et transmission dûes à un changement de section dans un tuyau sonore*



Soit un tuyau sonore composé de deux parties cylindriques de même axe $x'x$, de sections respectives S_1 et S_2, raccordées par la surface perpendiculaire en O à l'axe $x'x$.
Les deux parties cylindriques sont remplies respectivement des fluides (1) et (2).
Par définition, on appellera impédance caractéristique du milieu i, la grandeur $Z_i = R_i/S_i$, rapport de la résistivité acoustique du milieu par la section correspondante.
On considère une onde plane acoustique incidente $\underline{p_1}$ (notation complexe) se propageant dans le milieu (1) dans le sens des x positifs. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\underline{p'_1}$ et à une onde transmise $\underline{p_2}$, à l'interface entre les deux milieux.

3.a. En écrivant les conditions de continuité (cf. 2)), déterminer, en fonction de Z_1 et Z_2, les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12}, relatifs aux amplitudes des surpressions.

3.b. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T, relatifs aux puissances acoustiques.

3.c. En supposant que les fluides (1) et (2) sont identiques, y a-t-il réflexion à l'interface entre les deux milieux ?
Si oui, calculer r_{12} et t_{12} et préciser s'il y a changement de phase.

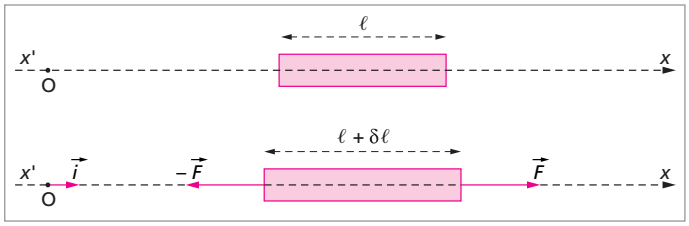
3.d. Dans le cas où les deux fluides sont de nature différente, retrouve-t-on les résultats du 2) si $S_1 = S_2$?

Exercice 11 Propagation du son dans un barreau métallique

Dans ce qui suit, on négligera le poids ainsi que les frottements.

1. *Question préliminaire : Loi de Hooke*

Un barreau métallique cylindrique, d'axe $x'Ox$, de surface de section S, a une longueur au repos ℓ. Il s'allonge de $\delta\ell$ lorsqu'il est soumis à deux forces opposées $\overrightarrow{F}$ et $-\overrightarrow{F}$ appliquées à ses faces terminales (voir figure ci-dessous).

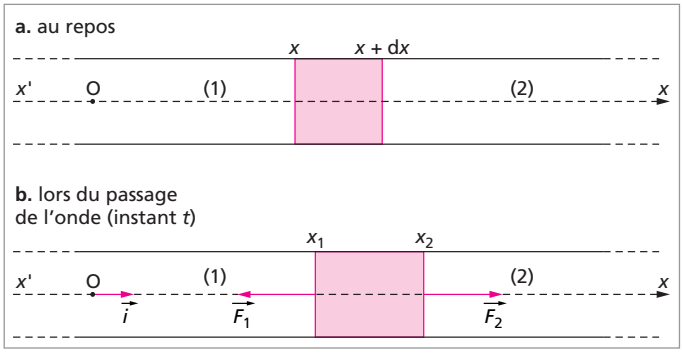


On note $\overrightarrow{F} = F\,\vec{\imath}$. Pour F suffisamment faible, la variation relative de longueur $\delta\ell/\ell$ est reliée à F par la Loi de Hooke :

$$\frac{\delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \tag{60}$$

où E est une constante appelée module de Young (E dépend de la nature du métal constituant le barreau). En quelle unité SI s'exprime le module de Young E ?

2. Pour calculer la vitesse du son dans un barreau métallique cylindrique homogène très long, d'axe $x'Ox$, de surface de section S, on étudie l'évolution d'une tranche du barreau sous l'effet de la perturbation sonore. **(1)** désigne la partie du barreau située à gauche de la tranche, **(2)** la partie située à droite de la tranche.



Au repos (Figure **a** ci-dessus), la tranche a une longueur dx. Elle est comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. La masse volumique, dans ce cas, est constante et égale à ρ_0. À l'instant t, sous l'effet de la perturbation sonore (Figure **b**), la tranche est comprise entre les plans x_1 et x_2 avec $x_1 = x + \psi(x, t)$ et $x_2 = x + dx + \psi(x + dx, t)$. $\psi(x, t)$ est le déplacement acoustique. La masse volumique en x à l'instant t est $\rho(x, t)$. La partie **(1)**

exerce sur la tranche une force $\overrightarrow{F_1}$. De même, la partie **(2)** exerce sur la tranche une force $\overrightarrow{F_2}$. On a $\overrightarrow{F_1} = -F(x_1, t)\ \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{F_2} = +F(x_2, t)\ \vec{\imath}$.
On se place dans le cadre de l'approximation acoustique. De plus, la surface de section S ne dépend ni de x ni de t.

2.a. Exprimer la masse de la tranche en fonction de ρ_0, S et dx. À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, établir une relation entre $\partial^2\psi/\partial t^2$ et une dérivée de F.

2.b. Calculer la variation relative de longueur de la tranche lors du passage de l'onde. À l'aide de la Loi de Hooke, établir une relation entre F et une dérivée de ψ.

2.c. Déduire des questions précédentes, l'équation de propagation satisfaite par ψ. Donner l'expression de la célérité, c, du son dans le barreau en fonction de E (module de Young) et de ρ_0.

Application numérique : calculer c, en m/s, pour un barreau en acier ($E = 2.10^{11}$ SI, $\rho_0 = 8$ g/cm^3).

Exercice 12 Ondes acoustiques. Énergie. Réflexion totale

On reprend les notations de l'exercice 10. On considère dans un premier temps une onde plane progressive (absence de réflexion).

1. Montrer que l'on peut définir une densité volumique d'énergie cinétique $e_c(x, t)$ due à l'onde par :

$$e_c(x, t) = \rho_0 . u(x, t)^2/2$$

L'énergie potentielle correspond au travail des forces de surpression lorsqu'on passe de l'état où le fluide est au repos à un état où la surpression est p.
Montrer alors que la densité volumique d'énergie potentielle $e_p(x, t)$ de l'onde est :

$$e_p(x, t) = \chi_S . p(x, t)^2/2$$

Attention : ces expressions de l'énergie ne sont pas correctes en notation complexe. Donc, dans les relations ci-dessus, $u(x, t)$ et $p(x, t)$ sont réelles.

Montrer que, pour une onde harmonique, les densités d'énergie cinétique et potentielle sont égales.
Montrer que l'énergie acoustique $e(x, t)$ satisfait à l'équation d'onde et, donc, qu'elle se propage à la vitesse c.
Donner l'expression de la puissance $\Pi(x, t)$ transportée par l'onde par unité de surface normale à la direction de propagation.

2. On considère, maintenant, un tuyau fermé à droite en $x = L$ et infiniment long vers la gauche. Une onde harmonique, incidente, progressant dans le sens des x croissants subit donc une réflexion en $x = L$. On suppose la réflexion *totale*.
Donner les expressions, pour $x \leqslant L$, du déplacement acoustique $\underline{\psi}(x, t)$ et de la surpression acoustique $\underline{p}(x, t)$ (notations complexes).

Définir les nœuds de déplacement ; combien vaut la distance entre deux nœuds consécutifs ? Montrer que les nœuds de déplacement sont des ventres de pression et réciproquement.

3. On envisage, maintenant, le cas d'un tuyau fermé à droite (en $x = L$) et ouvert à gauche (en $x = 0$).
En utilisant les expressions du 2), montrer que la condition supplémentaire en $x = 0$ implique une *quantification des fréquences admissibles par la cavité*. Donner l'expression de ces fréquences.

4. Reprendre la question 3) dans le cas où le tuyau est :

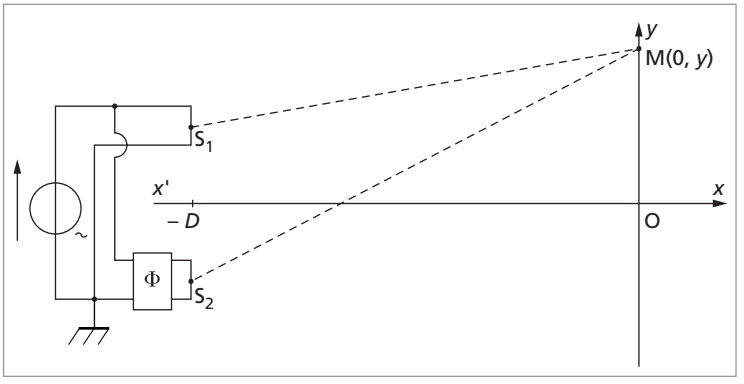
- ouvert aux deux bouts,
- fermé aux deux bouts.

Exercice 13 Interférences avec ultrasons

On dispose de cellules piézo-électriques pour engendrer des ultrasons. Ces mêmes cellules peuvent également servir à les détecter.

1.a. Lorsqu'on applique une tension sinusoïdale de fréquence $f = 40{,}0$ kHz à une cellule piézo-électrique, on observe devant la cellule une émission d'onde plane progressive sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = 0{,}85$ cm. En déduire la vitesse de propagation c des ultrasons produits dans l'air.

1.b. On considère deux émetteurs connectés en parallèle à un générateur idéal de tension délivrant une tension sinusoïdale de fréquence $f = 40{,}0$ kHz. Le circuit déphaseur (noté Φ sur le schéma) n'est pas connecté pour l'instant.



Ces deux émetteurs, situés en S_1 ($x = -D, y = a/2$) et S_2 ($x = -D, y = -a/2$), sont supposés ponctuels et émettent sensiblement dans la même direction. On déplace une troisième cellule, jouant le rôle de détecteur, perpendiculairement à cette direction, le long de l'axe Oy.
On supposera que les deux ondes arrivant au point M de coordonnées $(x = 0, y)$ sont des ondes planes progressives de même amplitude se propageant selon S_1M et S_2M.

Les distances $a = 10{,}0$ cm et $|y|$ étant petites devant la distance $D = 1{,}50$ m, montrer que l'on peut observer un phénomène d'interférence en déplaçant le détecteur le long de Oy. En déduire l'expression littérale et numérique de l'interfrange i.

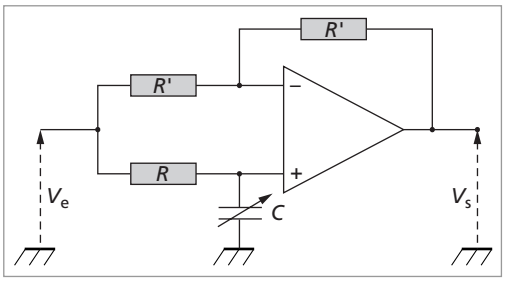
1.c. On intercale entre les bornes de sortie du générateur idéal de tension, délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω, et celles d'entrée de l'émetteur S_2 un opérateur électrique idéal, appelé déphaseur, dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \exp(j\Phi)$$

(V_s et V_e en notations complexes).

Quelle en sera l'action sur le phénomène d'interférence observé lorsque $\Phi = -\pi/2$?

2. Pour réaliser ce circuit déphaseur on propose le montage décrit sur la figure ci-contre.



2.a. En admettant que l'amplificateur opérationnel utilisé soit idéal, exprimer la fonction de transfert harmonique $H(j\omega) = V_s/V_e$.

2.b. Montrer que l'on a réalisé ainsi un circuit déphaseur dont le déphasage Φ peut être ajusté par action sur la valeur de la capacité C du condensateur. Calculer C pour que l'on ait $\Phi = -\pi/2$ lorsque $R = 1{,}00$ kΩ et $R' = 10{,}0$ kΩ.

Exercice 14 Effet Doppler. Interférences

1. Un haut-parleur (H.P.) est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence N_0 constante. On étudie la propagation du son émis dans l'air (la célérité du son est appelée c).

Au repos, la membrane du H.P. est située dans le plan vertical $x = 0$. À l'instant t, son élongation est $\psi(0, t) = a\sin(2\pi N_0 t)$.

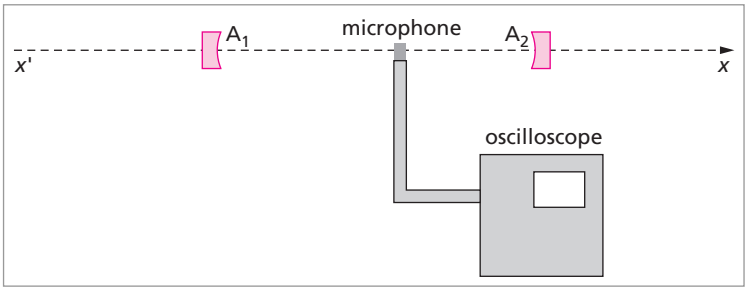
Donner l'expression de l'élongation du point M situé à l'abscisse x sur l'axe $x'x$. À quelle condition le point M vibre-t-il en phase avec la source ?

Indiquer une méthode de mesure de c utilisant un H.P., un microphone et un oscilloscope.

2. Le H.P., toujours soumis à la tension de fréquence N_0, est maintenant porté par un véhicule en mouvement de translation suivant l'axe $x'x$. Le véhicule s'approche de M à la vitesse constante $v = 20$ m/s. Donner l'expression de la fréquence N' du son reçu en M en fonction de N_0, v et c. Calculer N' avec $N_0 = 1\,000$ Hz et c $= 340$ m/s. Que deviendrait l'expression de N' si la source s'éloignait de M ? Donner l'expression de N' lorsque le véhicule et le récepteur M sont tous les deux en mouvement sur l'axe $x'x$,

respectivement avec des vitesses de valeurs algébriques v et v' (par rapport à $x'x$ supposé fixe). Comment s'appelle le phénomène étudié ? Citer un autre domaine de la physique où il apparaît.

3. On s'intéresse, maintenant, aux interférences sonores réalisées à l'aide de deux H.P. identiques placés face à face et alimentés par la même source de tension sinusoïdale de fréquence N. On négligera la réflexion des ondes sonores.



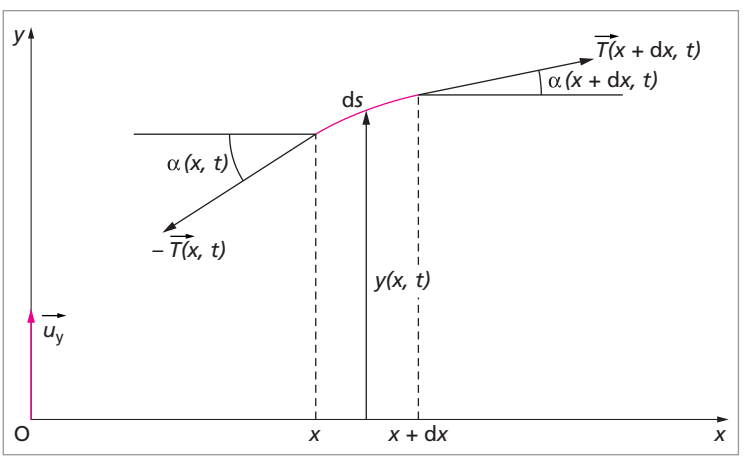
Les membranes A_1 et A_2 des deux H.P. ont, au repos, les abscisses respectives $x_1 = 0$ et $x_2 = d$. On suppose $d \gg \lambda$. Les déplacements algébriques, sur l'axe $x'x$, des membranes A_1 et A_2 autour de leurs positions au repos sont notés $\psi_1(A_1, t)$ et $\psi_2(A_2, t)$.

3.a. Qu'observe-t-on sur l'écran de l'oscilloscope au cours d'une excursion assez large du microphone sur l'axe $x'x$?

3.b. Déterminer $\psi(M, t)$ définissant l'état vibratoire d'un point M du segment A_1A_2, d'abscisse x, sachant que $\psi_1(A_1, t) = a\sin(2\pi Nt)$. Montrer qu'il existe deux familles de points dont l'état vibratoire est particulier.

Quelle distance i sépare deux de ces points consécutifs appartenant à la même famille ? Déterminer c sachant que $N = 1250$ Hz et $i = 13{,}8$ cm.

Exercice 15 Vibrations transversales d'une corde. Stroboscope



Dans cet exercice, on se propose d'étudier la propagation de vibrations transversales de faible amplitude le long d'une corde sans raideur, de longueur L et de masse linéique μ. L'élongation transversale d'un point M de la corde sera notée $y(x, t)$. La force de tension en ce point sera notée $\overrightarrow{T}$. On négligera le poids et la résistance de l'air. De plus, on supposera que :

$$|y| \ll L \quad , \quad \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$$

Cette dernière condition signifie que l'angle α reste petit.

1. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un élément de la corde de longueur ds (d$s \approx$ dx) dont on suppose le mouvement purement transversal.
Montrer que $T \cos\alpha$ est indépendant de x. En négligeant la dépendance en t de cette quantité, on notera $T \cos\alpha \equiv T_0$ ($\approx T$ au vu des hypothèses faites ci-dessus).
Établir l'équation de propagation à laquelle satisfait $y(x, t)$.
Donner, en fonction de T_0 et de μ, l'expression de la célérité V des ondes transversales se propageant le long de la corde.
2. La corde, horizontale, est reliée à un vibreur dont l'extrémité a un mouvement vertical d'élongation :

$$y(0, t) = a.\sin(2\pi N_0 t)$$

Une onde progressive se propage alors le long de la corde dans le sens des $x > 0$. On néglige toute réflexion.
2.a. Donner l'expression de $y(x, t)$.
2.b. On éclaire alors la corde avec un stroboscope émettant N éclairs par seconde. Décrire ce que l'on observe dans les cas suivants où k est un entier positif :

– $N_0 = kN$

– $N_0 = kN + \delta$ avec $\delta \ll N$.

Calculer, dans ce dernier cas, la fréquence apparente ν du phénomène ainsi que la célérité de propagation apparente V' de l'onde.

Exercice 16 Onde longitudinale sur une file d'atomes

On considère une file de particules identiques de masse m situées à l'équilibre aux points d'abscisse $x_n = na$ (n est un entier relatif) sur l'axe $x'x$. On désignera par $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire de cet axe. Ces particules peuvent effectuer des déplacements suivant l'axe Ox et l'on appelle u_n la valeur algébrique du déplacement de la particule n. On suppose qu'il existe entre particules voisines (adjacentes) des forces élastiques proportionnelles à l'allongement de la distance les séparant (coefficient de proportionnalité α).

1. Donner l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la particule $n + 1$ sur la particule n.

2. Écrire l'équation différentielle du mouvement de la particule n.

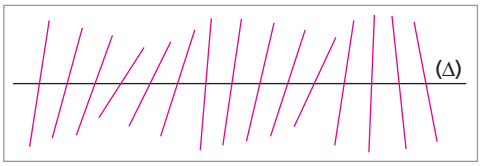
3. Chercher les solutions de cette équation sous la forme d'une onde progressive, soit :

$$u_n = u.\mathrm{e}^{i(\omega t - kx_n)}$$

Donner l'expression de la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.
Montrer que l'on peut se limiter pour l'étude de $\omega(k)$ à $-\pi/a < k \leqslant +\pi/a$.
Tracer la courbe $\omega(k)$ dans ce domaine.

4. Soient v_ϕ et v_g les vitesses de phase et de groupe.
Tracer les courbes $v_\phi(k)$ et $v_g(k)$. Discuter.

Exercice 17 Ondoscope (d'après Capes 2001)



Un ondoscope est une association de tiges régulièrement espacées et couplées par un fil de torsion horizontal. Par construction de l'appareil, les tiges restent perpendiculaires au fil de torsion. Les tiges peuvent tourner autour de l'axe fixe (Δ) horizontal qui passe par leur centre. L'axe (Δ) est confondu avec le fil de torsion. On note J_Δ le moment d'inertie d'une tige par rapport à (Δ). On désigne par C la constante de torsion de chaque portion du fil de torsion qui est comprise entre deux tiges consécutives. On indice par n l'ordre d'une tige sur l'axe (Δ). La situation « de repos » de l'ondoscope est définie de la façon suivante :

- la torsion du fil est nulle sur chacune de ses portions ; par conception de l'ondoscope, toutes les tiges sont alors coplanaires ;
- le plan qui contient alors toutes les tiges garde une direction fixe dans le référentiel d'étude qu'est le laboratoire.

On note θ_n l'écart angulaire de la tige n par rapport à sa position « au repos » et l'on néglige les frottements.

1. Établir que l'équation différentielle vérifiée par le pendule n s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta}_n = -\Omega^2 \left(2\,\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1} \right) \qquad (61)$$

Exprimer Ω en fonction de J_Δ et C. On supposera que le pendule n n'est pas situé à une extrémité de l'échelle.

2. Soit a la distance constante qui sépare deux tiges consécutives sur l'axe (Δ). On choisit l'origine des abscisses de sorte que l'abscisse sur (Δ) du n-ième pendule ait pour expression $x_n = n\,a$. On cherche pour les élongations des solutions de la forme $\theta_n(t) = A\,\cos(kna - \omega t)$, k et ω étant des réels, ω étant positif.

2.a. À quoi correspondent les solutions de ce type ? On pourra distinguer les situations où k est positif et où k est négatif.

2.b. On pose $\theta_n = A\exp[j(kna - \omega t)]$, avec $j^2 = -1$. En reportant les expressions de θ_n, θ_{n-1} et θ_{n+1} dans l'équation différentielle établie à la question **1**, établir la relation de dispersion donnant ω en fonction de Ω, a et k.

2.c. Quel est le domaine accessible aux valeurs de ω ?

2.d. À quelle amplitude peut-on restreindre les variations de k, et pourquoi ?

2.e. Tracer la courbe représentant les variations de ω en fonction de k. La variable k décrira l'intervalle centré en 0 et de largeur l'amplitude déterminée à la question précédente.

3. L'ondoscope n'étant pas infini, quel est le problème qui se pose si l'on veut exposer à une classe des oscillations répondant à la fonction $\theta_n(t) = A \cos(kna - \omega t)$? Comment procéder pour résoudre cette difficulté ?

4. L'ondoscope comporte $N + 1$ tiges, numérotées de 0 à N. Dans cette question et cette question seulement, on bloque les tiges de numéro 0 et N, de sorte que $\theta_0 = \theta_N = 0$. On cherche les solutions pour $\theta_n(t)$ sous la forme :

$$\theta_n(t) = A \cos(kna - \omega t) + B \cos(kna + \omega t + \phi),$$

avec k et ω réels positifs.

4.a. À quoi correspondent physiquement chacune des deux composantes de $\theta_n(t)$?

4.b. Utiliser la condition limite portant sur θ_0 pour donner la valeur de ϕ et la relation entre A et B.

4.c. On veut écrire $\theta_n(t)$ sous la forme $\theta_n(t) = f(t)\, g(na)$. Expliciter les fonctions $f(t)$ et $g(na)$. Préciser la nature des ondes harmoniques qui peuvent alors exister.

4.d. Utiliser la condition limite sur θ_N pour déterminer les valeurs possibles de k. Exprimer ces valeurs de k en fonction d'un entier relatif p. Combien de ces valeurs de k sont situées dans l'intervalle utile défini au *2.d* ?

4.e. La relation de dispersion établie au *2.b* est-elle toujours valable ? Pourquoi ? Donner les valeurs de ω correspondant aux valeurs possibles de k.

4.f. Décrire les oscillations de l'ondoscope pour $p = 1, 2, 3$ et N ($N > 3$). Sur l'exemple de $N = 10$, tracer θ_n en fonction de n à un instant d'élongation maximale pour la tige n°1. On demande un tracé pour chaque valeur de p mentionnée ci-dessus.

5. On continue de supposer le système non amorti.

5.a. Nommer les différentes contributions à l'énergie mécanique totale de l'ondoscope. Le système évoluant sans excitation extérieure, que peut-on dire de l'énergie mécanique totale du système ?

5.b. La tige N est maintenant bloquée. On appelle pulsations propres de l'ondoscope les pulsations déterminées à la question **4.e**. Qu'observerait-on si l'on débloquait la tige 0 et qu'on l'excitait avec une pulsation égale à l'une des pulsations propres ?

6. Est-ce bien ce que l'on observe dans la réalité en réalisant l'expérience précédemment décrite ? Pourquoi ?

7. Comment pourrait-on procéder pour mettre en évidence les phénomènes de réflexion et de transmission liés à un changement du milieu de propagation ? Avec quel autre domaine de la physique proposeriez-vous une analogie ?

SOLUTIONS

1 **CONSEIL : Cet exercice, ainsi que les deux suivants, ne peuvent être abordés de manière fructueuse qu'après l'étude de la partie 2.**

1. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0 \tag{62}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{63}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \tag{64}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{65}$$

Appliquons l'opérateur $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ sur les deux membres de (63).
Avec la relation $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\operatorname{div} - \Delta$ on obtient l'équation d'onde :

$$\Delta \overrightarrow{E} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{66}$$

de même, (65) conduit à $\Delta \overrightarrow{B} = \epsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}$ (67)

2.a. $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de z et t. (66) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial z^2} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{68}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\ ;\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\ ;\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Solution générale :

$$E_x = f(t - z/c) + g(t + z/c) \quad \text{avec la célérité} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}} \tag{69}$$

De même pour E_y, E_z, B_x, B_y, B_z. Le premier (resp. deuxième) terme dans (69) correspond à une onde progressive se propageant sans se déformer à la célérité c dans le sens z croissant (resp. décroissant).

2.b. On ne considère que l'onde se propageant dans le sens z croissant.

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

On en déduit que E_z ne dépend pas de z. De plus, comme E_z est fonction de la variable $(t - z/c)$, E_z ne dépendra pas, non plus, de t. On a donc $E_z = 0$ ($E_z = \text{Cte} \neq 0$ supposerait une distribution statique de charges pour produire ce champ uniforme stationnaire, ce qui est exclu d'après l'énoncé).

Pour des raisons analogues, on aura $B_z = 0$. *L'onde est transversale*. D'autre part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{70}$$

En posant $u \equiv t - z/\text{c}$ et $E'_y = \dfrac{\text{d}E_y}{\text{d}u}$, etc. . . , (70) s'écrit :

$$\frac{1}{\text{c}}E'_y = -B'_x \quad ; \quad -\frac{1}{\text{c}}E'_x = -B'_y \tag{71}$$

D'où, en intégrant : $E_y = -\text{c}B_x$, $E_x = \text{c}B_y$. (La constante d'intégration est prise à 0, vu l'absence de toute charge et de tout courant).
Finalement : $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{B} = E_xB_x + E_yB_y = \text{c}B_yB_x - \text{c}B_xB_y = 0$. On a donc $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}$.
En posant $\vec{\text{c}} = \text{c}\ \overrightarrow{u_z}$ ($\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire de $z'z$), on montre facilement que $\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B} = B^2\,\vec{\text{c}}$. On en conclut que *le trièdre* $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \vec{\text{c}})$ *est orthogonal direct*.

2.c. On a :

$$E_x = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{\text{c}}(z - \text{c}t)\right) \qquad E_y = 0$$

D'où :

$$B_x = -\frac{1}{\text{c}}E_y = 0 \qquad B_y = \frac{1}{\text{c}}E_x = \frac{E_0}{\text{c}}\cos\left(\frac{\omega}{\text{c}}(z - \text{c}t)\right)$$

$$B_0 = \frac{E_0}{\text{c}} = \sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}\ E_0 = 0{,}33.10^{-6}\ \text{T} \quad , \quad \lambda = \frac{\text{c}}{f} = 3\ \text{cm}$$

2 Dans cet exercice, on désigne par $\vec{n}$ le vecteur de composantes ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 0). De même, $\overrightarrow{n'}$ désigne le vecteur de composantes ($\sin\alpha$, $-\cos\alpha$, 0). Enfin, $\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire de $z'z$.

1. On a $\vec{k} = k\vec{n}$ avec $k = \omega/\text{c}$. De plus $\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\ \overrightarrow{u_z}$. Enfin :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} = \frac{E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}{\text{c}}\ \overrightarrow{n'}$$

On a $B = E/\text{c}$, d'où $Z_0 = \mu_0 E/B = \mu_0\text{c} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\ \Omega$.

2. La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit :

$$\frac{\text{d}W(\vec{r}, t)}{\text{d}v} = \frac{\epsilon_0 E(\vec{r}, t)^2}{2} + \frac{B(\vec{r}, t)^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

Or, $\left\langle \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \right\rangle_T = 1/2$. D'où $\left\langle \dfrac{\text{d}W}{\text{d}v} \right\rangle = \epsilon_0 E_0^2/2$.

3. Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\overrightarrow{P}(\vec{r}, t) = \frac{\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \wedge \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0} = \frac{E(\vec{r}, t)^2}{\mu_0\ \text{c}}\,\vec{n}$$

Son module est égal à :

$$P(\vec{r},t) = \frac{E(\vec{r},t)^2}{\mu_0\ c} = \frac{E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}{\mu_0 c}$$

D'où :

$$\langle P\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = c\,\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = c\left\langle \frac{dW}{dv}\right\rangle$$

Interprétation physique : soit ds un élément infinitésimal de surface d'onde et dϕ le flux de $\overrightarrow{P}$ à travers ds. $\overrightarrow{P}$ étant orthogonal à la surface d'onde, on a $\langle d\phi\rangle = \langle P\rangle\, ds = c\left\langle \frac{dW}{dv}\right\rangle ds$. D'autre part, l'énergie transportée par l'onde se propage à la célérité c. Pendant la durée dt, une quantité d'énergie égale à (c dt ds)(dW/dv) traverse ds. (cd$s$) $\langle dW/dv\rangle$ est donc la puissance moyenne traversant ds. Elle est égale au flux moyen du vecteur de Poynting à travers ds. Cela souligne l'importance du vecteur de Poynting pour les calculs d'énergie.

3 **1.** Les composantes de $\vec{k}_1$ sont (α, β, 0). Celles de $\vec{k}_2$ sont (α, $-\beta$, 0). De plus, on a $\overrightarrow{B}_i = \dfrac{\vec{k}_i \wedge \overrightarrow{E}_i}{\omega}$, avec $i = 1$ ou 2. On en déduit les composantes de $\overrightarrow{B}_1$ et $\overrightarrow{B}_2$:

$$\overrightarrow{B}_1 \quad : \quad B_{1x} = \frac{\beta}{\omega}E_0\cos(\omega t - \alpha x - \beta y), \quad B_{1y} = \frac{-\alpha}{\omega}E_0\cos(\omega t - \alpha x - \beta y),\ B_{1z} = 0$$

$$\overrightarrow{B}_2 \quad : \quad B_{2x} = -\frac{\beta}{\omega}E_0\cos(\omega t - \alpha x + \beta y), \quad B_{2y} = \frac{-\alpha}{\omega}E_0\cos(\omega t - \alpha x + \beta y),\ B_{2z} = 0$$

2.a. L'équation d'ondes étant linéaire, le théorème de superposition conduit à : $\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E}_1(\vec{r},t) + \overrightarrow{E}_2(\vec{r},t)$. On en déduit la seule composante non nulle de $\overrightarrow{E}$:

$$E_z = E_{1z} + E_{2z} = E_0\left(\cos(\omega t - \alpha x - \beta y) + \cos(\omega t - \alpha x + \beta y)\right) = 2E_0\cos(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x)$$

La moyenne temporelle de $E^2(\vec{r},t)$ s'écrit :

$$\left\langle E^2\right\rangle = \left\langle 4E_0^2\cos^2(\beta y)\cos^2(\omega t - \alpha x)\right\rangle_T = 2E_0^2\cos^2(\beta y)$$

(rappelons que $\left\langle \cos^2(\omega t - \alpha x)\right\rangle_T = 1/2$). Les surfaces $\left\langle E^2\right\rangle$ = constante sont les surfaces y = cst, c'est-à-dire les plans parallèles à xOz.

2.b. Dans un plan perpendiculaire à Ox (c'est-à-dire un plan x = cst) si l'on fait varier y, $\left\langle E^2\right\rangle$ passera par des maxima (obtenus pour $\cos^2(\beta y) = 1$) et des minima (obtenus pour $\cos^2(\beta y) = 0$). Les franges brillantes correspondent donc à $\beta y = m\pi$ (m est un entier relatif) et l'interfrange i est égal à

$$i = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{k\sin\theta} = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

2.c. D'après la question **2.a**, on a

$$E_z = 2E_0\cos(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x)$$

ce qui montre que l'on a une propagation dans le sens des x croissants. En écrivant le terme $\cos(\omega t - \alpha x)$ sous la forme $\cos\left(\omega(t - x/V_\phi)\right)$, on en déduit la vitesse de phase :

$$V_\phi = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{c}{\cos\theta} > c$$

Le fait que V_ϕ soit supérieure à c ne pose pas de problème théorique. La grandeur qui a un sens physique, ici, est la vitesse de propagation de l'énergie, V_E. On verra que $V_E < c$.

3. $\overrightarrow{B}(\vec{r},t) = \overrightarrow{B}_1(\vec{r},t) + \overrightarrow{B}_2(\vec{r},t)$. D'où les composantes de $\overrightarrow{B}(\vec{r},t)$:

$$B_x = 2\frac{\beta}{\omega}E_0 \sin(\beta y)\sin(\omega t - \alpha x) \quad , \quad B_y = -2\frac{\alpha}{\omega}E_0 \cos(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x) \quad , \quad B_z = 0$$

On a encore propagation dans le sens des x croissants et l'on observe que :

$$\left(\frac{B_x}{2\frac{\beta}{\omega}E_0 \sin(\beta y)}\right)^2 + \left(\frac{B_y}{2\frac{\alpha}{\omega}E_0 \cos(\beta y)}\right)^2 = 1$$

On a une polarisation elliptique (en un point donné, l'extrémité de $\overrightarrow{B}$ *parcourt, en général, une ellipse). Cas particuliers* :

i) $\beta \sin(\beta y) = \alpha \cos(\beta y) \implies$ polarisation circulaire ;

ii) $\sin(\beta y) = 0 \implies B_x = 0 \implies$ polarisation rectiligne suivant Oy ;

iii) $\cos(\beta y) = 0 \implies B_y = 0 \implies$ polarisation rectiligne suivant Ox ;

4.a. $\overrightarrow{P}(\vec{r},t) = \dfrac{\overrightarrow{E}(\vec{r},t) \wedge \overrightarrow{B}(\vec{r},t)}{\mu_0}$. D'où les composantes de $\overrightarrow{P}(\vec{r},t)$:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{4\alpha E_0^2}{\mu_0 \omega}\cos^2(\beta y)\cos^2(\omega t - \alpha x) \\ P_y &= \frac{4\beta E_0^2}{\mu_0 \omega}\cos(\beta y)\sin(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x)\sin(\omega t - \alpha x) \\ P_z &= 0 \end{aligned}$$

4.b. $\overrightarrow{P}(\vec{r},t)$ étant perpendiculaire à Oz, il n'y a pas de transfert d'énergie à travers une portion de plan perpendiculaire à Oz.

Considérons, maintenant, une portion, d'aire ds, d'un plan perpendiculaire à Oy. La puissance traversant ds sera donnée par le flux de $\overrightarrow{P}$ à travers ds soit P_yds. En prenant la moyenne temporelle, avec $\langle \cos(\omega t - \alpha x)\sin(\omega t - \alpha x)\rangle = \langle (1/2)\sin(2\omega t - 2\alpha x)\rangle = 0$, on a donc $\langle P_y \mathrm{d}s \rangle = 0$. On en déduit qu'il n'y a pas non plus de transfert d'énergie dans la direction Oy. On retrouve bien le fait que la propagation se fait selon Ox.

4.c.

$$\langle W \rangle = \left\langle \iint_S P_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z \right\rangle_T = \frac{2\alpha E_0^2}{\mu_0 \omega} \iint_S \cos^2(\beta y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

On utilise $\langle \cos^2(\omega t - \alpha x)\rangle_T = 1/2$. De plus, les dimensions du domaine étant grandes devant l'interfrange, on peut remplacer $\cos^2(\beta y)$ par sa valeur moyenne, c'est-à-dire $1/2$,

dans l'intégrale restante. D'où, finalement :

$$\langle W \rangle = \frac{\alpha E_0^2\, S}{\mu_0 \omega} = \frac{\cos\theta\, E_0^2\, S}{\mu_0 c}$$

4.d.

$$\left\langle \frac{dW}{dv} \right\rangle = (\epsilon_0/2)\left\langle E^2 \right\rangle + \left\langle B^2 \right\rangle /(2\mu_0)$$

En moyennant sur le temps et l'espace, on a $\left\langle \cos^2(\ldots) \right\rangle = \left\langle \sin^2(\ldots) \right\rangle = 1/2$. D'autre part, comme $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$, $k = \omega/c$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on obtient $\left\langle \frac{dW}{dv} \right\rangle = \epsilon_0 E_0^2$. D'après la dernière question de l'exercice corrigé en 2, on a :

$$\langle W \rangle = V_E S \left\langle \frac{dW}{dv} \right\rangle$$

soit $\cos\theta E_0^2 S/(\mu_0 c) = V_E S \epsilon_0 E_0^2$. D'où :

$$V_E = c\cos\theta \ < \ c \qquad ; \qquad V_E . V_\phi = c^2$$

4 **CONSEIL : Il est indispensable d'étudier la partie 3 et, notamment, les conditions de passage en 3.2. avant d'aborder cet exercice.**

1. Par définition, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\ \mu_0}}$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1\ \mu_0}} = \frac{c}{n_1}$ et $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2\ \mu_0}} = \frac{c}{n_2}$. On en déduit :

$$n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \qquad ; \qquad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}$$

Dans les questions 2) et 3), on utilisera la continuité de $\overrightarrow{B}$ (milieux non magnétiques en l'absence de courant) à la traversée du plan xOy soit

$$\overrightarrow{B}_i + \overrightarrow{B}_r = \overrightarrow{B}_t \quad \forall t \quad \text{en tout point du plan } xOy \tag{72}$$

2.a. Les champs électriques $\overrightarrow{E}_i$, $\overrightarrow{E}_r$, $\overrightarrow{E}_t$ sont colinéaires à Ox et donc parallèles au plan xOy de séparation des deux milieux. On aura donc, par continuité de la composante tangentielle :

$$\overrightarrow{E}_i + \overrightarrow{E}_r = \overrightarrow{E}_t \quad \forall t \quad \text{en tout point du plan } xOy \tag{73}$$

2.b. Si ω' et ω'' désignent les pulsations des ondes réfléchie et transmise et $\vec{k}'$ et $\vec{k}''$ leurs vecteurs d'onde respectifs, on peut réécrire (73) en termes d'amplitudes complexes :

$$E_i^0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E_r^0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E_t^0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)} \quad \forall t, y \tag{74}$$

Cette relation étant vraie quel que soit t, on en déduit que $\omega = \omega' = \omega''$. De même, (74) étant vraie $\forall y$, on a $k_y = k'_y = k''_y$.
Or $k_y = (\omega/c_1)\sin i_1$, $k'_y = (\omega/c_1)\sin i'_1$ et $k''_y = (\omega/c_2)\sin i_2$. (On suppose les angles i_1, i'_1 et i_2 compris entre 0 et $\pi/2$).

$k_y = k'_y \implies i_1 = i'_1$.
$k_y = k''_y \implies \sin i_1/c_1 = \sin i_2/c_2$ soit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. On retrouve les lois de Descartes. Remarquons que (74) se réduit à :

$$E_i^0 + E_r^0 = E_t^0 \tag{75}$$

Examinons maintenant les conséquences de la relation (72). En projection sur Oy, on a :

$$-B_i^0 \cos i_1 + B_r^0 \cos i_1 = -B_t^0 \cos i_2 \tag{76}$$

De plus, $B_i^0 = E_i^0/c_1 = E_i^0 n_1/c$, $B_r^0 = E_r^0/c_1 = E_r^0 n_1/c$ et $B_t^0 = E_t^0/c_2 = E_t^0 n_2/c$. En remplaçant B_i^0, B_r^0 et B_t^0 dans (76), on obtient :

$$n_1 \cos i_1(-E_i^0 + E_r^0) = -n_2 \cos i_2 \; E_t^0 \tag{77}$$

À partir des deux équations (75) et (77), on obtient :

$$\frac{E_r^0}{E_i^0} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad ; \quad \frac{E_t^0}{E_i^0} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}$$

2.c. On a, pour le vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{R}_i = \frac{\overrightarrow{E}_i \wedge \overrightarrow{B}_i}{\mu_0} \quad \text{soit, en module :} \quad R_i = \frac{E_i^0 B_i^0}{\mu_0} = \frac{\left(E_i^0\right)^2}{\mu_0 c_1}$$

De même $R_r = \dfrac{\left(E_r^0\right)^2}{\mu_0 c_1}$ et $R_t = \dfrac{\left(E_t^0\right)^2}{\mu_0 c_2}$. On en déduit :

$$\left(\frac{R_r}{R_i}\right)_\perp = \left(\frac{E_r^0}{E_i^0}\right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}\right)^2$$

$$\left(\frac{R_t}{R_i}\right)_\perp = \left(\frac{E_t^0}{E_i^0}\right)^2 \times \left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \frac{n_2}{n_1} \frac{4n_1^2 \cos^2 i_1}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2}$$

La puissance traversant un élément de surface s du plan xOy est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface. On a $P_i = R_i \cos i_1 \; s$, $P_r = R_r \cos i_1 \; s$, $P_t = R_t \cos i_2 \; s$. D'où les coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

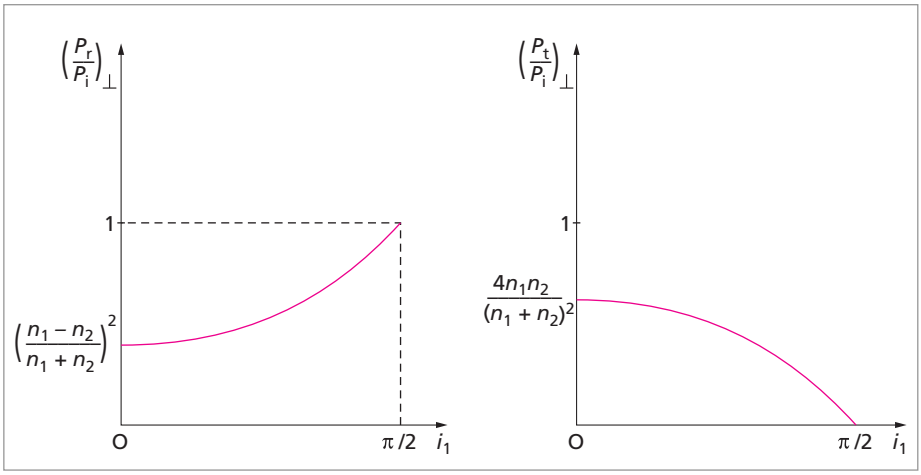
$$\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\perp = \left(\frac{R_r}{R_i}\right)_\perp = \left(\frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}\right)^2$$

$$\left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\perp = \left(\frac{R_t}{R_i}\right)_\perp \times \left(\frac{\cos i_2}{\cos i_1}\right) = \frac{4n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2}$$

On a $\left(\dfrac{P_r}{P_i}\right)_\perp + \left(\dfrac{P_t}{P_i}\right)_\perp = 1$

D'après l'énoncé, on suppose $n_1 < n_2$. Pour toute valeur i_1 entre 0 et $\pi/2$, on aura une onde réfléchie et une onde transmise. $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ conduit à

$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \sqrt{1 - (n_1^2/n_2^2)\sin^2 i_1}$. On reporte $\cos i_2$ dans les expressions de $\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\perp$ et $\left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\perp$ et on obtient les courbes suivantes :



On observe que, sous incidence normale, le coefficient de réflexion en puissance est égal à $((n_1 - n_2)/(n_1 + n_2))^2 \approx 0{,}04$ pour le dioptre air-verre. (L'air et le verre sont deux milieux transparents dont les indices sont du même ordre de grandeur ; la puissance électromagnétique est presque intégralement transmise).

3. La relation (72), qui traduit la continuité de $\overrightarrow{B}$, conduit à

$$B_i^0 - B_r^0 = B_t^0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{E_i^0}{c_1} - \frac{E_r^0}{c_1} = \frac{E_t^0}{c_2} \quad \Longrightarrow \quad n_1(E_i^0 - E_r^0) = n_2 E_t^0 \qquad (78)$$

D'autre part, la composante de $\overrightarrow{E}$ suivant Oy est continue. Donc :

$$E_i^0 \cos i_1 + E_r^0 \cos i_1 = E_t^0 \cos i_2 \qquad (79)$$

Ces deux relations conduisent à :

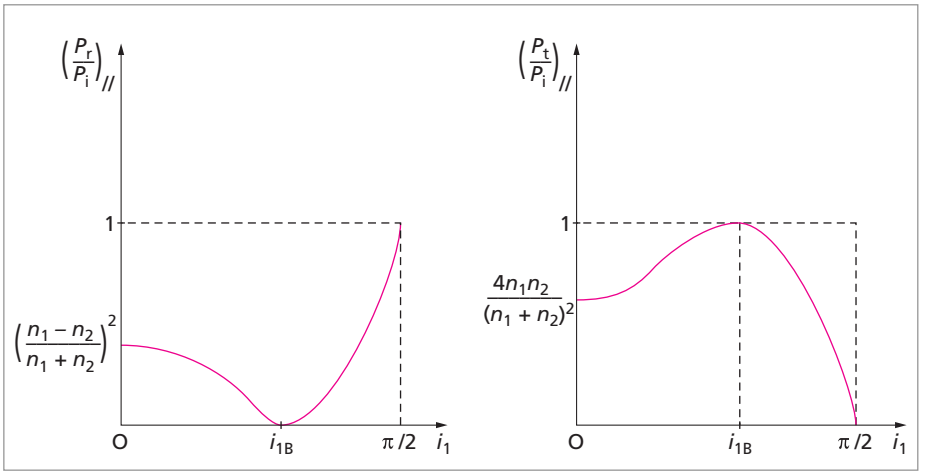
$$\frac{E_r^0}{E_i^0} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \quad ; \quad \frac{E_t^0}{E_i^0} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \qquad (80)$$

$$\left(\frac{R_r}{R_i}\right)_\parallel = \left(\frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{R_t}{R_i}\right)_\parallel = \frac{4n_1 n_2 \cos^2 i_1}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2}$$

$$\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\parallel = \left(\frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\parallel = \frac{4n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2}$$

On a, comme précédemment $\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\parallel + \left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\parallel = 1$

Si l'angle d'incidence i_1 prend la valeur i_{1B} avec $\text{tg}\ i_{1B} = n_2/n_1$ (et, également, $n_1 \sin i_{1B} = n_2 \sin i_2$) alors, on a : $\text{tg}\ i_{1B} = \sin i_{1B}/\sin i_2$. On en déduit $\sin i_2 = \cos i_{1B}$ et $\sin i_{1B} = \cos i_2$. D'où, dans ce cas $\left(\dfrac{P_r}{P_i}\right)_{\parallel} = 0$. Si de la lumière naturelle arrive sur S sous cette incidence (*dite de Brewster*), elle sera, après réflexion, polarisée rectilignement ($\vec{E}_r$ sera perpendiculaire au plan d'incidence).



4. Si $i_1 = i_2 = 0$, alors $\left(\dfrac{P_r}{P_i}\right)_{\perp} = \left(\dfrac{P_r}{P_i}\right)_{\parallel}$ et $\left(\dfrac{P_t}{P_i}\right)_{\perp} = \left(\dfrac{P_t}{P_i}\right)_{\parallel}$.
Sous incidence normale, on ne plus distinguer les directions $\perp$ et $\parallel$.

5 **CONSEIL : Cet exercice est à mettre en relation avec l'exercice 8 page 411 où un autre aspect de la dispersion des ondes électromagnétiques est discuté.**

1. Supposons qu'une onde électromagnétique plane agisse sur l'électron. Ce dernier, de charge $q = -e$ et de vitesse $\vec{v}$, est alors soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec $\|E\| = c'\|B\|$ (c' est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré). Or,

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|E\|} \leqslant \frac{\|\vec{v}\|.\|\vec{B}\|}{\|E\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{c'}$$

Ce rapport est très inférieur à 1 pour un électron non relativiste. On en déduit que, dans ces conditions, la force subie par l'électron se réduit à $\vec{F} = q\vec{E}$.

2.a. $\vec{r}$ étant le déplacement de l'électron dû à l'onde, on aura, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}_0 \cos \omega t \qquad (81)$$

2.b. En intégrant deux fois par rapport au temps et en supposant que $\vec{r}$ est nul en l'absence de l'onde, on obtient :

$$\vec{r} = \frac{e}{m_e\omega^2}\left(\overrightarrow{E}_0 \cos \omega t\right) = \frac{e}{m_e\omega^2}\overrightarrow{E} \tag{82}$$

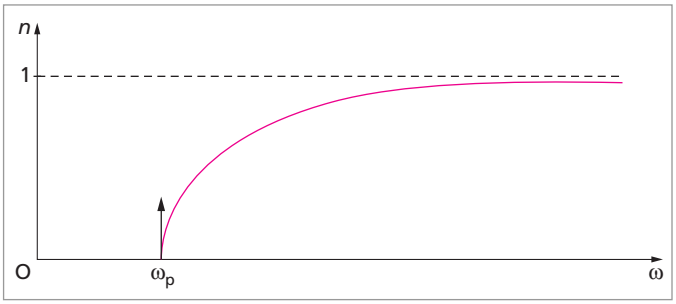
2.c. Le moment dipolaire de l'élément de volume $\mathrm{d}v$ est :

$$\overrightarrow{P}\,\mathrm{d}v = N\mathrm{d}v(-e)\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{P} = -\frac{N\mathrm{e}^2}{m_e\omega^2}\overrightarrow{E}$$

La relation $\epsilon\overrightarrow{E} = \epsilon_0\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$ conduit à $\epsilon = \epsilon_0 - \dfrac{N\mathrm{e}^2}{m_e\omega^2} = \epsilon_0\epsilon_r$. Utilisant la notation de l'énoncé, on obtient :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \quad \Longrightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$$

2.d. Seules les ondes de pulsation ω supérieure à ω_P peuvent se propager dans ce milieu. ω_P est la pulsation de coupure. $\nu_P = \omega_P/(2\pi)$ est la fréquence de coupure.



Un tel milieu se rencontre par exemple dans l'ionosphère terrestre.
A.N. : $N = 4{,}96.10^{12}$ électrons/m^3 ; $\lambda < 15$ m.

3.a. L'équation (81) devient, en présence de la force de rappel :

$$m_e\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m_e\omega_0^2\vec{r} - e\overrightarrow{E}_0 \cos \omega t \tag{83}$$

3.b. En oscillations forcées à la pulsation ω, on aura $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\vec{r}$. En reportant dans (83), on obtient après quelques calculs simples :

$$\vec{r} = \frac{e}{m_e(\omega^2 - \omega_0^2)}\left(\overrightarrow{E}_0 \cos \omega t\right) = \frac{e}{m_e(\omega^2 - \omega_0^2)}\overrightarrow{E} \tag{84}$$

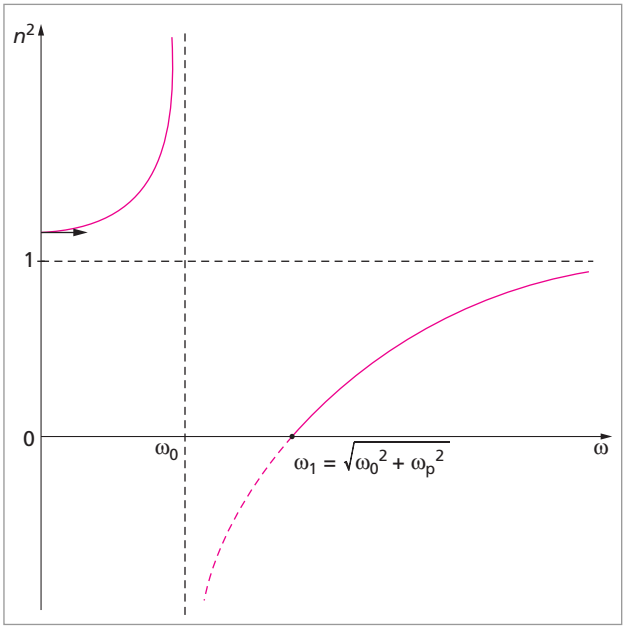
3.c.

$$\overrightarrow{P} = N(-e)\vec{r} = -\frac{N\mathrm{e}^2}{m_e(\omega^2 - \omega_0^2)}\overrightarrow{E}$$

En adoptant la même démarche qu'à la question **2.c**, on est conduit à un indice n :

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \tag{85}$$

3.d.



Les ondes de pulsation ω comprise entre ω_0 et ω_1 ne peuvent se propager dans ce milieu. De plus, quand $\omega \to \omega_0$, on a $n^2 \to \infty$ et la théorie n'est plus correcte.

3.e ω_0 est la pulsation propre du système. Quand $\omega \to \omega_0$, l'amplitude des oscillations des électrons devient de plus en plus grande, ainsi que l'énergie rayonnée par ces électrons (des particules chargées en mouvement accéléré perdent de l'énergie par rayonnement). Si l'on veut que le modèle reste réaliste, il faut rajouter un terme d'amortissement dans l'équation différentielle (83).

3.f. Pour le verre, on a, dans le domaine visible (lumière de longueur d'onde λ dans le vide), la relation : $n \approx a + b/\lambda^2$ (loi de Cauchy). Plus généralement, pour n^2, on observe expérimentalement, pour une onde de fréquence ν, une variation de la forme :

$$n^2 = a^2 + \left(\frac{b_1}{\nu_1^2 - \nu^2} + \frac{b_2}{\nu_2^2 - \nu^2} + \dots \right)$$

Cette formule généralise la relation (85).
Pour les rayons X, l'indice n d'un cristal est inférieur à 1 tout en en restant voisin.

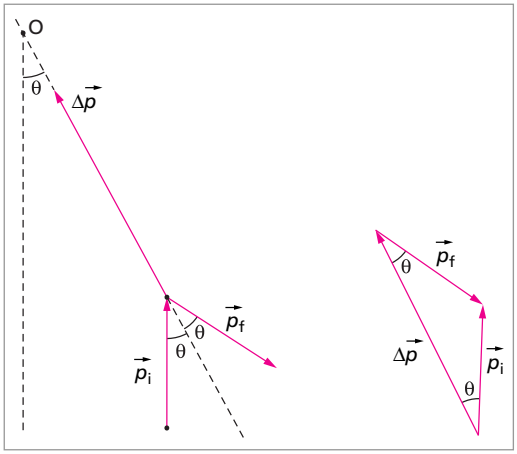
6 **CONSEIL : Il est souhaitable d'étudier la partie 3 et, notamment, le paragraphe 3.6. avant d'aborder cet exercice.**

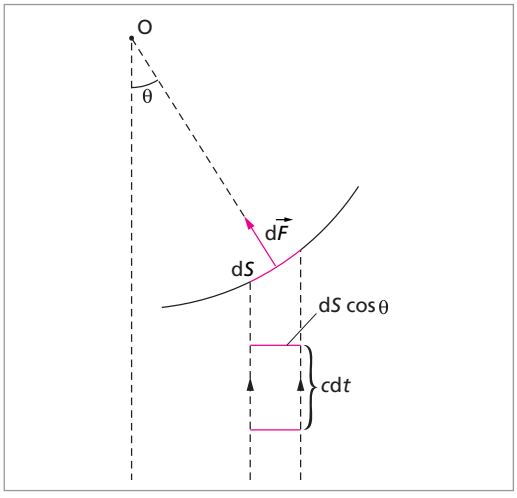
1. On a réflexion totale des photons à la surface de la bille parfaitement conductrice. En effet, l'onde électromagnétique associée ne peut se propager dans la « masse » du conducteur ; elle est donc totalement réfléchie.

Soient $\overrightarrow{p}_i$ et $\overrightarrow{p}_f$ les quantités de mouvement du photon avant et après réflexion et $\Delta\overrightarrow{p}$ la quantité de mouvement cédée par un photon à la bille. On a $\overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{p}_f + \Delta\overrightarrow{p}$. La bille étant immobile dans le faisceau et le choc étant élastique, on a : $p_i = p_f = h\nu/c$. D'après la figure ci-contre :

$$\Delta p = 2p_i \cos\theta = (2h\nu/c)\cos\theta.$$

Soit un élément de surface de la bille, d'aire dS (voir figure ci-contre). Le nombre de photons qui va frapper cet élément pendant dt est : $Nc\,dt\,dS\cos\theta$ (c'est le nombre de photons contenus dans le cylindre de hauteur $c\,dt$ et de base $dS\cos\theta$). La quantité de mouvement cédée à la bille sera : $Nc\,dt\,dS\cos\theta\,\Delta p = 2Nh\nu\,dS\cos^2\theta\,dt$. La force qui en résulte est normale à l'élément de surface et s'obtient en divisant par dt : $dF = 2Nh\nu\,dS\cos^2\theta$ d'où la pression cherchée : $P = dF/dS = 2Nh\nu\cos^2\theta$





2. La force totale $\overrightarrow{F}$ sera dirigée suivant Oz par symétrie. On doit donc projeter $d\overrightarrow{F}$ sur Oz et donc multiplier dF par $\cos\theta$ avant de sommer.

En utilisant la symétrie de révolution autour de Oz, on a la contribution de la couronne hachurée à la force totale (voir figure ci-contre) :

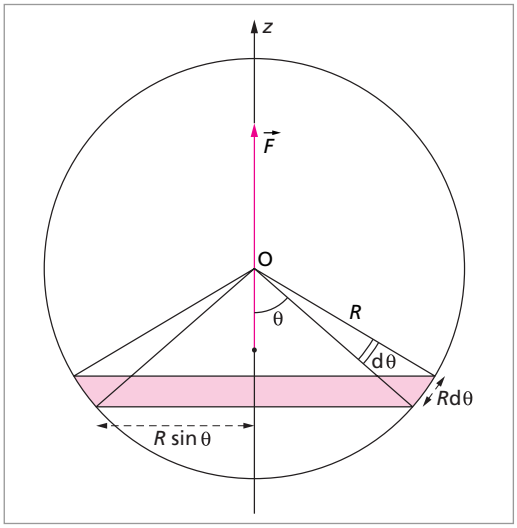
$$dF\cos\theta = 2Nh\nu\,dS\cos^3\theta$$

avec :

$$dS = (2\pi R\sin\theta)(R\,d\theta)$$

D'où, pour la force F, en supposant que la bille est toute entière dans le faisceau laser :

$$F = \int_0^{\pi/2} 4\pi R^2 Nh\nu\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$= \pi R^2 Nh\nu$$



$(\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = (-1/4)\left[\cos^4\theta\right]_0^{\pi/2} = +1/4)$.

3 À l'équilibre, on a $mg = F$ soit $(4/3)\pi R^3 \rho g = \pi R^2 N h\nu$. D'où :

$$R = \frac{3Nh\nu}{4\rho g} \tag{86}$$

De plus, désignant par $\mathcal{P}$ la puissance du faisceau laser et par s sa section, on a :

$$\mathcal{P} = Nh\nu cs \quad \Longrightarrow \quad Nh\nu = \frac{\mathcal{P}}{cs}$$

En reportant dans (86), on a finalement :

$$R = \frac{3\mathcal{P}}{4\rho g cs} = 9{,}4.10^{-2}\mu\text{m} \tag{87}$$

On vérifie que l'on a $\pi R^2 \ll s$: la bille est bien tout entière dans le faisceau laser.

7

1. La loi d'Ohm pour le dipôle AB s'écrit :

$$V_A - V_B = (r\,dx)i + (L\,dx)\frac{\partial i}{\partial t} \tag{88}$$

De plus, la loi des mailles conduit à :

$$V_A - V_B = u(x,t) - u(x + dx, t) \tag{89}$$

Les deux expressions de $V_A - V_B$ étant égales, on divise par dx qui est un infiniment petit et on obtient :

$$ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{u(x,t) - u(x + dx, t)}{dx} \tag{90}$$

Soit :

$$ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{91}$$

Loi des nœuds :

$$i(x,t) = i(x + dx, t) + i_f + i_C \tag{92}$$

avec $i_f = g\ dx\ u$. i_C est le courant pénétrant dans le condensateur par son armature supérieure. q est la charge de cette armature et donc :

$$i_C = \frac{\partial q}{\partial t} = C dx \frac{\partial u}{\partial t} \tag{93}$$

On reporte dans (92) et on obtient :

$$i(x,t) = i(x + dx, t) + g\ dx\ u + C dx \frac{\partial u}{\partial t} \tag{94}$$

D'où

$$gu + C\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i(x,t) - i(x + dx, t)}{dx} \tag{95}$$

Soit

$$gu + C\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} \tag{96}$$

Pour éliminer i entre les équations (91) et (96), on dérive les deux membres de (91) par rapport à x puis les deux membres de (96) par rapport à t. Ceci conduit à :

$$r\frac{\partial i}{\partial x} + L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{97}$$

$$g\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \tag{98}$$

On admet que $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$. On peut donc éliminer cette quantité entre les deux équations précédentes. Ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -r\frac{\partial i}{\partial x} + gL\frac{\partial u}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{99}$$

Finalement, avec (96), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rgu + (rC + gL)\frac{\partial u}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{100}$$

qui est l'équation cherchée.

Pour une ligne sans pertes, on a : $r = g = 0$. L'équation (100) devient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{101}$$

La même équation sera satisfaite par le courant i.

2. (101) est de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{102}$$

C'est une équation de propagation et V est la célérité des signaux dans la ligne :

$$V = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{103}$$

Les ondes étant harmoniques, $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont la superposition de deux termes, l'un fonction de $(\omega t - kx)$ (onde progressive se propageant dans le sens des x croissants), l'autre fonction de $(\omega t + kx)$ (onde progressive se propageant dans le sens des x décroissants). On aura donc :

$$i(x,t) = i_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} + i_1 \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} \tag{104}$$

$$u(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} + u_1 \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} \tag{105}$$

(k est le module du vecteur d'onde ; $k = \omega/V$). On reporte ces expressions dans (96) avec $g = 0$, on a :

$$iki_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} - iki_1 \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} = Ci\omega \left(u_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} + u_1 \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)}\right)$$

Par identification, on obtient :

$$ki_0 = C\omega u_0 \quad ; \quad -ki_1 = C\omega u_1$$

soit :

$$u_0 = \rho i_0 \quad ; \quad u_1 = -\rho i_1 \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{k}{\omega C} = \frac{1}{VC} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

D'où :

$$u(x,t) = \rho \left(i_0 e^{i(\omega t - kx)} - i_1 e^{i(\omega t + kx)} \right) \tag{106}$$

3.

$$Z \equiv Z(x = D) = \frac{u(D,t)}{i(D,t)} = \rho \left(\frac{i_0 e^{-ikD} - i_1 e^{+ikD}}{i_0 e^{-ikD} + i_1 e^{+ikD}} \right)$$

$$\text{D'où :} \qquad i_1 = i_0 \, e^{-2ikD} \left(\frac{\rho - Z}{\rho + Z} \right)$$

Soit, en reportant dans les expressions de $i(x,t)$ et de $u(x,t)$:

$$i(x,t) = i_0 e^{i(\omega t - kD)} \left(e^{-ik(x-D)} + \frac{\rho - Z}{\rho + Z} e^{+ik(x-D)} \right) \tag{107}$$

$$u(x,t) = \rho i_0 e^{i(\omega t - kD)} \left(e^{-ik(x-D)} - \frac{\rho - Z}{\rho + Z} e^{+ik(x-D)} \right) \tag{108}$$

$$Z(x) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)} = \rho \left(\frac{Z \cos(k(x-D)) - i\rho \sin(k(x-D))}{\rho \cos(k(x-D)) - iZ \sin(k(x-D))} \right) \tag{109}$$

- $Z = \infty \implies Z(x) = i\rho \operatorname{cotan}(k(x-D))$
- $Z = 0 \implies Z(x) = -i\rho \tan(k(x-D))$
- $Z = iY \implies Z(x) = i\rho \dfrac{Y - \rho \tan(k(x-D))}{\rho + Y \tan(k(x-D))}$

Montrons que, dans chaque cas, on a des ondes stationnaires c'est-à-dire que $\mathrm{Re}(i(x,t))$ se met sous la forme $f(t).g(x)$ (pas de terme de propagation).

- $Z = \infty \implies \dfrac{\rho - Z}{\rho + Z} = -1$. D'où, avec (107),

$$\begin{aligned} i(x,t) &= i_0 e^{i(\omega t - kD)} (-2i) \sin(k(x-D)) \\ \mathrm{Re}(i(x,t)) &= 2 i_0 \sin(\omega t - kD). \sin(k(x-D)) \equiv f(t).g(x) \end{aligned}$$

- $Z = 0 \implies \dfrac{\rho - Z}{\rho + Z} = 1$. D'où :

$$\begin{aligned} i(x,t) &= i_0 e^{i(\omega t - kD)} 2 \cos(k(x-D)) \\ \mathrm{Re}(i(x,t))) &= 2 i_0 \cos(\omega t - kD). \cos(k(x-D)) \equiv f(t).g(x) \end{aligned}$$

- $Z = iY \implies \dfrac{\rho - Z}{\rho + Z} = \dfrac{\rho - iY}{\rho + iY} \equiv e^{-2i\theta}$. D'où :

$$\begin{aligned} i(x,t) &= i_0 e^{i(\omega t - kD)} \left(e^{-ik(x-D)} + e^{-2i\theta} e^{+ik(x-D)} \right) \\ &= i_0 e^{i(\omega t - kD - \theta)} \left(e^{-ik(x-D)+i\theta} + e^{+ik(x-D)-i\theta} \right) \\ &= i_0 e^{i(\omega t - kD - \theta)} (2 \cos(k(x-D) - \theta)) \\ \mathrm{Re}(i(x,t)) &= 2 i_0 \cos(\omega t - kD - \theta). \cos(k(x-D) - \theta) \equiv f(t).g(x) \end{aligned}$$

Dans aucun des cas, il n'y a de propagation. La ligne ne fournit aucune énergie à la charge. C'est logique car :

- $Z = \infty \quad \Longrightarrow$ rien n'est branché (ligne ouverte) ;
- $Z = 0 \quad \Longrightarrow$ ligne court-circuitée ; aucune charge n'est susceptible de consommer ;
- $Z = iY \quad \Longrightarrow$ une charge réactive (inductance pure ou condensateur parfait) ne consomme pas.

Dans les trois cas, on a réflexion totale.
Si $Z = \rho = R$, alors $Z(x) = \rho$; $Z(x)$ est indépendant de x. Dans ce cas, on a : $i_1 = 0$ et

$$i(x,t) = i_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad ; \quad u(x,t) = \rho\, i_0\, e^{i(\omega t - kx)} = \rho\, i(x,t)$$

On est exactement dans la situation opposée à la précédente. Ici, on a de la propagation et pas de réflexion. Seule subsiste l'onde progressive se propageant dans le sens x croissant. Tout se passe comme si la ligne était infiniment longue. L'impédance étant résistive, la ligne fournit de l'énergie à la charge.

Adaptation d'impédance : Si l'on ferme la ligne directement sur une impédance $R' \neq R$, on aura une réflexion. Pour éviter cela, on utilise un transformateur (supposé parfait). La ligne alimente alors le primaire de ce transformateur, le secondaire de celui-ci alimentant à son tour le récepteur d'impédance R'. On aura :

$$\frac{u_1}{i_1} = R \quad \text{au primaire} \quad ; \quad \frac{u_2}{i_2} = R' \quad \text{au secondaire}$$

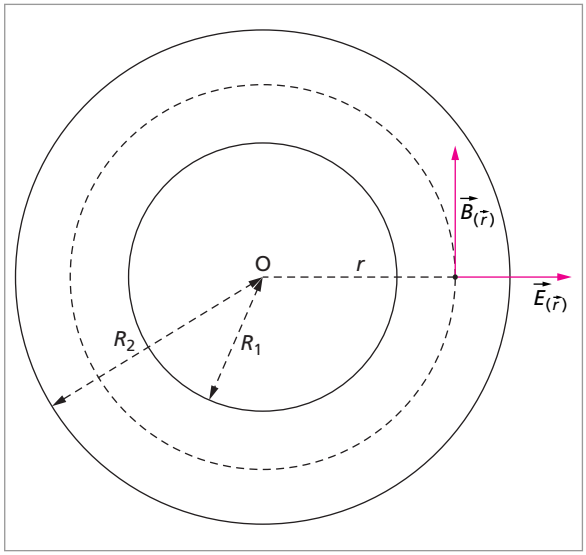
D'où $R'/R = (u_2/u_1)(i_1/i_2) = m^2$. En effet, pour un transformateur parfait, le rapport de transformation m est tel que $m = u_2/u_1 = i_1/i_2$. On en déduit : $m = \sqrt{R'/R} = \sqrt{\alpha} = 0{,}316$.

4.a. *Calcul de C* : la figure ci-contre représente les deux cylindres coaxiaux en vue de dessus. C est la capacité par unité de longueur d'un condensateur cylindrique infiniment long. On désigne par q la charge de l'armature interne par unité de longueur. $E(r)$ étant le champ électrique à la distance r de l'axe, on a, d'après le théorème de Gauss :

$$E(r) 2\pi r h = q h / \epsilon_0 \epsilon_r$$

d'où :

$$E(r) = q/(2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r) = -\partial V/\partial r.$$



Par intégration, on obtient la tension entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{q}{C} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ell\mathrm{n}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{110}$$

Calcul de L : l'armature interne étant parcourue par I et l'armature externe par $(-I)$, on aura un champ magnétique uniquement entre les armatures (théorème d'Ampère). D'après ce théorème, on a, entre les armatures : $B(r).2\pi r = \mu_0 I$. On en déduit l'énergie magnétique par unité de longueur :

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \int_{R_1}^{R_2}\frac{B^2(r)}{2\mu_o}2\pi r\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2}{2\mu_o}2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

4.b. A.N. $V = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0} = \mathrm{c}/\sqrt{\epsilon_r} = 2.10^8$ m.s^{-1}. $R = \sqrt{L/C} = 43{,}9\ \Omega$.

4.c. Avec un câble coaxial, on évite les pertes par rayonnement.

8 **CONSEIL : On met en évidence, ici, qu'un guide d'ondes est dispersif à cause des parois. C'est une des causes de la dispersion rencontrée dans les fibres optiques.**

1. Sur une paroi conductrice, $\overrightarrow{E}$ doit être soit nul soit perpendiculaire à la paroi. $\overrightarrow{E}$ étant vertical, il est perpendiculaire aux parois horizontales. Les conditions aux limites imposent donc uniquement que $E_z = 0$ pour $y = \pm a/2$. Vérifions que les formes proposées satisfont bien à ces conditions.

$$\text{pour } n \text{ impair} : E_z \propto \cos(n\pi y/a) = 0 \text{ si } y = \pm a/2 \text{ car } \cos(\pm n\pi/2) = 0$$
$$\text{pour } n \text{ pair} : E_z \propto \sin(n\pi y/a) = 0 \text{ si } y = \pm a/2 \text{ car } \sin(\pm n\pi/2) = 0$$

2. Pour $n = 1$, on a :

$$E_z = E_0\cos(\pi y/a)\cos(\omega t - k_1' x)$$

D'autre part, l'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta E_z = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{112}$$

On reporte l'expression de E_z dans cette dernière équation et on obtient :

$$-\left(k_1'\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = -\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(k_1'\right)^2 = \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

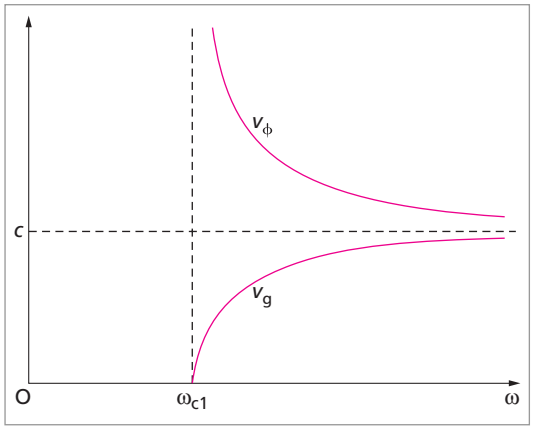
Pour qu'il y ait propagation, on doit avoir k_1' réel donc :

$$\omega \geqslant \frac{\pi \mathrm{c}}{a} = \omega_{\mathrm{c}1}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'_1} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{c1}^2}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'_1} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - \omega_{c1}^2}}{\omega}$$

On remarque que $v_\phi\, v_g = c^2$.



3. Pour le mode TE_{n0}, à l'aide de l'équation (112), on obtiendrait : $\left(k'_n\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ avec la pulsation de coupure : $\omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$.

Pour que le mode TE_{10} se propage, il faut $\omega > \omega_{c1} = \frac{\pi c}{a}$.

Pour que les modes TE_{n0} avec $n \geqslant 2$ ne se propagent pas, il faut $\omega < \omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$, $\forall n \geqslant 2$.

On doit donc avoir $\frac{\pi c}{a} < \omega < \frac{2\pi c}{a}$. D'où : $\frac{\pi c}{\omega} < a < \frac{2\pi c}{\omega}$

9 **1.** En notation complexe, le champ électrique de l'onde résultante s'écrit :

$$E(x,t) = E_0 \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} dk\, e^{i(\omega(k)t - kx)} \qquad (115)$$

E_0 est l'amplitude complexe commune de toutes les ondes. De plus, $\Delta k \ll k_0$. On peut développer $\omega(k)$ au voisinage de k_0 et écrire approximativement :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} \qquad (116)$$

Or, la vitesse de phase est donnée par $v_\phi = \omega_0/k_0$ et la vitesse de groupe par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}$$

On a donc :

$$\omega(k) = k_0 v_\phi + k' v_g \qquad \text{avec} \qquad k' = k - k_0 \qquad (117)$$

2.

$$\omega t - kx = k_0 v_\phi t + k' v_g t - k_0 x - k' x$$

(115) devient alors :

$$E(x,t) = E_0 \int_{-\Delta k/2}^{+\Delta k/2} \mathrm{d}k' \; \mathrm{e}^{i(k_0 v_\phi t - k_0 x)} \mathrm{e}^{ik'(v_g t - x)} \tag{118}$$

$$= E_0 \, \mathrm{e}^{ik_0(v_\phi t - x)} \int_{-\Delta k/2}^{+\Delta k/2} \mathrm{d}k' \; \mathrm{e}^{ik'(v_g t - x)} \tag{119}$$

D'autre part :

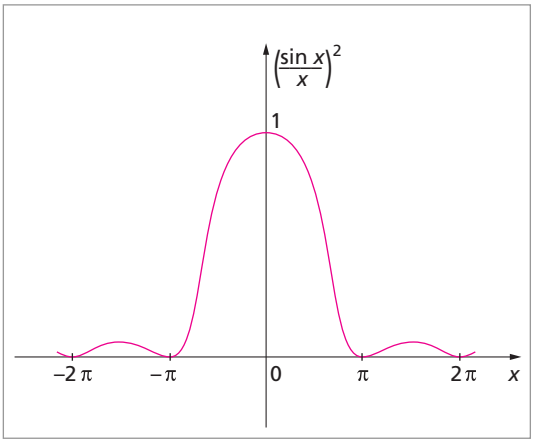
$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \mathrm{d}k' \; \mathrm{e}^{ik'\beta} = \left[\frac{\mathrm{e}^{ik'\beta}}{i\beta} \right]_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{2}{\beta} \sin \alpha\beta$$

On en déduit :

$$E(x,t) = \frac{2E_0}{v_g t - x} \mathrm{e}^{ik_0(v_\phi t - x)} \sin\left(\frac{\Delta k}{2} (v_g t - x) \right) \tag{120}$$

L'intensité I de l'onde étant proportionnelle à $|E|^2$, on a :

$$I \propto \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \quad \text{avec} \quad X = \frac{\Delta k}{2}(v_g t - x) \tag{121}$$



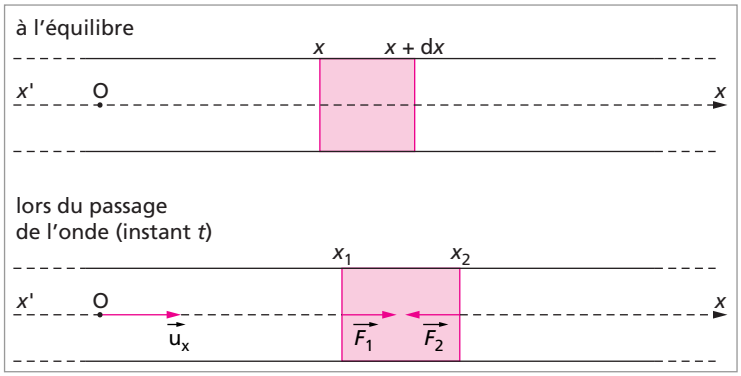
I est localisée autour de $X = 0$ soit $x = v_g t$. Il en va de même pour $E(x,t)$. Pour calculer l'extension spatiale de l'onde, on peut considérer que l'essentiel de l'onde est contenu dans l'intervalle $-\pi < X < \pi$ ce qui conduit à :

$$-\pi < \frac{\Delta k}{2}(v_g t - x) < \pi \quad \Longrightarrow \quad v_g t - \frac{2\pi}{\Delta k} < x < v_g t + \frac{2\pi}{\Delta k} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

Enfin, I est une fonction de $(x - v_g t)$. Cela montre que l'énergie se propage à la vitesse v_g (vitesse de groupe).

10 **CONSEIL : Cet exercice est très important aussi bien pour l'écrit que pour l'oral du concours. L'expression de la célérité du son sera à retenir.**

1.



Posons $x_1 = x + \psi(x,t)$ et $x_2 = x + \mathrm{d}x + \psi(x+\mathrm{d}x,t)$. La masse de fluide contenue dans la tranche hachurée est : $\mathrm{d}m = \rho_0 S\mathrm{d}x = \rho S(x_2 - x_1)$. De plus, le plan d'abscisse x au repos a pour abscisse $x + \psi(x,t)$ à l'instant t et $x + \psi(x, t+\mathrm{d}t)$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$. Sa vitesse, la vitesse acoustique, est donc égale à :

$$\frac{x + \psi(x,t+\mathrm{d}t) - (x + \psi(x,t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\psi(x,t+\mathrm{d}t) - \psi(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

De même, son accélération est $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$.

1.a. On applique la relation fondamentale de la dynamique à la tranche considérée, soumise aux seules forces de pression $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$. D'où :

$$\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \mathrm{d}m\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}\,\overrightarrow{u_x} \qquad (122)$$

$\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire de l'axe $x'x$. En projection sur cet axe, on a :

$$F_1 - F_2 = \mathrm{d}m\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \rho_0 S\mathrm{d}x\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} \qquad (123)$$

Or

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= S\left[P(x + \psi(x,t),t) - P(x + \mathrm{d}x + \psi(x+\mathrm{d}x,t),t)\right] \\ &\approx S(-\mathrm{d}x)\frac{\partial P(x+\psi,t)}{\partial x} = S(-\mathrm{d}x)\frac{\partial p(x+\psi,t)}{\partial x} \end{aligned}$$

Or, $p(x+\psi,t) \approx p(x,t) + \psi\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \approx p(x,t)$ d'après l'approximation acoustique. D'où, en reportant l'expression de $F_1 - F_2$ dans (123) :

$$S(-\mathrm{d}x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \rho_0 S\mathrm{d}x\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Soit

$$\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (125)$$

1.b.α. L'absence de viscosité ainsi que la lenteur des échanges thermiques comparée à la propagation de l'onde permettent de justifier le caractère adiabatique et réversible donc isentropique de l'évolution de la tranche de fluide.

1.b.β. Afin d'utiliser la définition du coefficient de compressibilité, comparons l'état de la tranche au repos avec son état à l'instant t :

– au repos, son volume est $S\mathrm{d}x$ et sa pression P_0

– à l'instant t, son volume est $S(x_2 - x_1)$ et sa pression $P_0 + p$

Soit une variation de pression $\Delta P = P_0 + p - P_0 = p$ et une variation de volume égale à

$$\Delta V = S(x_2 - x_1) - S\mathrm{d}x = S(x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t) - x - \psi(x, t)) - S\mathrm{d}x \approx S\mathrm{d}x\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

D'autre part, on a

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \approx -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} \approx -\frac{1}{S\mathrm{d}x}\frac{S\mathrm{d}x\frac{\partial \psi}{\partial x}}{p}$$

On en déduit facilement

$$p = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{126}$$

1.c.α. On dérive l'équation précédente par rapport à x et on reporte le résultat dans (125). On obtient alors l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{de la forme} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{127}$$

1.c.β. Solution générale de cette équation :

$$\psi(x, t) = f(t - \frac{x}{\mathrm{c}}) + g(t + \frac{x}{\mathrm{c}}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{c} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \tag{128}$$

1.c.γ. Considérons le premier terme, $f(t - \frac{x}{\mathrm{c}})$. On a :

$$f(t - \frac{x}{\mathrm{c}}) = f(t + \Delta t - \frac{x + \mathrm{c}\,\Delta t}{\mathrm{c}})$$

Le signal est donc le même en x à l'instant t et en $x + \mathrm{c}\Delta t$ à l'instant $t + \Delta t$. Ceci signifie que pendant la durée Δt, il a progressé sans se déformer de $\mathrm{c}\Delta t$. Il se propage dans le sens x croissant à la célérité $\mathrm{c} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$. De même, $g(t + \frac{x}{\mathrm{c}})$ représente un signal qui progresse dans le sens x décroissant à la célérité c.

D'autre part, que ce soit pour f ou g, à un instant donné t, tous les points de même abscisse x sont dans le même état de vibration. On est donc en présence d'ondes planes. Les surfaces d'ondes sont des plans d'équation $x =$ constante.

1.d. On dérive les deux membres de (127) par rapport à x. En supposant que les opérations de dérivations partielles par rapport à x et par rapport à t commutent et en utilisant la relation (126), on établit facilement que :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{129}$$

De même, en dérivant les deux membres de (127) par rapport à t et en utilisant $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{130}$$

1.e.α. Dans une transformation isentropique d'un gaz parfait, on a la relation $PV^\gamma = \text{constante}$ qui entraîne $\mathrm{d}P/P + \gamma \mathrm{d}V/V = 0$.
On en déduit $\chi_S = (-1/V)(\mathrm{d}V/\mathrm{d}P) = 1/(\gamma P)$. ($P$ est la pression totale). De plus, pour une masse m de gaz parfait à la température absolue T_0, on a $PV = (m/\mathrm{M})RT_0 \implies P = (m/V)RT_0/\mathrm{M} \approx \rho_0 RT_0/\mathrm{M}$. D'où :

$$\mathrm{c} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{\mathrm{M}}} \tag{131}$$

1.e.β. Avec $\mathrm{M} = 29.10^{-3}$ kg/mol, on obtient pour la vitesse du son $\mathrm{c} = 343$ m/s.

1.f.α. $\underline{\psi_1}(x,t) = \mathrm{A}_1\, \mathrm{e}^{i\omega(t-kx/\omega)} = \mathrm{A}_1\, \mathrm{e}^{i\omega(t-x/\mathrm{c})}$ avec $\mathrm{c} = \omega/k$. D'après la question **1.c.γ**, cette onde se propage dans le sens x croissant. On a $k = \omega/\mathrm{c} = 2\pi f/\mathrm{c} = 18{,}32\ \mathrm{m}^{-1}$.

1.f.β.

$$\underline{p_1} = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \underline{\psi_1}}{\partial x} = \frac{ik}{\chi_S}\underline{\psi_1} \quad ; \quad \underline{u_1} = \frac{\partial \underline{\psi_1}}{\partial t} = i\omega \underline{\psi_1}$$

1.f.γ.

$$\frac{\underline{p_1}}{\underline{u_1}} = \frac{ik}{\chi_S}\frac{1}{i\omega} = \frac{1}{\mathrm{c}\chi_S} = \rho_0 \mathrm{c} = R \tag{132}$$

1.g.

$$\underline{p_1'} = \frac{-ik}{\chi_S}\underline{\psi_1'} \quad ; \quad \underline{u_1'} = i\omega \underline{\psi_1'} \quad ; \quad \frac{\underline{p_1'}}{\underline{u_1'}} = -R \tag{133}$$

2.a. En prenant en compte les sens de propagation des ondes réfléchie et transmise, on a :

$$\underline{p_1'} = p_{01}'\, \mathrm{e}^{i(\omega' t + k_1' x)} \tag{134}$$

$$\underline{p_2} = p_{02}\, \mathrm{e}^{i(\omega'' t - k_2 x)} \tag{135}$$

La continuité de la surpression en $x = 0$ s'écrit :

$$\underline{p_1}(x=0,t) + \underline{p_1'}(x=0,t) = \underline{p_2}(x=0,t) \qquad \forall t$$

$$\implies \quad p_{01}\, \mathrm{e}^{i\omega t} + p_{01}'\, \mathrm{e}^{i\omega' t} = p_{02}\, \mathrm{e}^{i\omega'' t} \qquad \forall t$$

d'où l'on déduit $\omega = \omega' = \omega''$

2.b. On a $k_1' = \omega'/c_1 = \omega/c_1 = k_1$ et $k_2 = \omega''/c_2 = \omega/c_2$. (134) et (135) se réécrivent alors :

$$\begin{aligned} \underline{p_1'} &= p_{01}' \, e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{p_2} &= p_{02} \, e^{i(\omega t - k_2 x)} \end{aligned}$$

2.c. Au vu de ce qui précède, la continuité de p en $x = 0$ s'écrit simplement :

$$p_{01} + p_{01}' = p_{02}$$

D'autre part, la continuité de Su en $x = 0$ implique :

$$S\, u_{01} + S\, u_{01}' = S\, u_{02}$$

D'après (132) et (133), on a $u_{01} = + p_{01}/R_1$, $u_{01}' = - p_{01}'/R_1$, $u_{02} = + p_{02}/R_2$. On a donc le système de deux équations :

$$\begin{aligned} p_{01} + p_{01}' &= p_{02} \\ \frac{p_{01}}{R_1} - \frac{p_{01}'}{R_1} &= \frac{p_{02}}{R_2} \end{aligned}$$

ou encore, en divisant chaque équation par p_{01} :

$$\begin{aligned} 1 + r_{12} &= t_{12} \\ \frac{1}{R_1} - \frac{r_{12}}{R_1} &= \frac{t_{12}}{R_2} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$r_{12} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \quad ; \quad t_{12} = \frac{2R_2}{R_2 + R_1}$$

2.d.α.

$$\begin{aligned} R &= \frac{|\underline{p_1'}\underline{u_1'}|S}{|\underline{p_1}\underline{u_1}|S} = \frac{|\underline{p_1'}(-\frac{\underline{p_1'}}{R_1})|}{|\underline{p_1}(\frac{\underline{p_1}}{R_1})|} = \left|\frac{\underline{p_1'}^2}{\underline{p_1}^2}\right| = \left(\frac{p_{01}'}{p_{01}}\right)^2 = r_{12}^2 = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^2 \\ T &= \frac{|\underline{p_2}\underline{u_2}|S}{|\underline{p_1}\underline{u_1}|S} = \frac{|\underline{p_2}(\frac{\underline{p_2}}{R_2})|}{|\underline{p_1}(\frac{\underline{p_1}}{R_1})|} = \left|\frac{\underline{p_2}^2}{\underline{p_1}^2}\right| \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} t_{12}^2 = \frac{4R_1R_2}{(R_2 + R_1)^2} \end{aligned}$$

2.d.β. On a $R + T = 1$ (conservation de l'énergie).

2.e. A.N. $R = 0{,}9987$; $T = 0{,}0013$. La réflexion en puissance est pratiquement totale. Elle est dûe à une rupture brutale d'impédance.

3.a. Cette fois, on a :

$$\frac{\underline{p_1}}{S_1\underline{u_1}} = \frac{R_1}{S_1} = Z_1 \quad ; \quad \frac{\underline{p_1'}}{S_1\underline{u_1'}} = -Z_1 \quad ; \quad \frac{\underline{p_2}}{S_2\underline{u_2}} = Z_2$$

Les continuités de la surpression et du débit volumique conduisent à :

$$\begin{aligned} 1 + r_{12} &= t_{12} \\ \frac{1}{Z_1} - \frac{r_{12}}{Z_1} &= \frac{t_{12}}{Z_2} \end{aligned}$$

D'où :

$$r_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad ; \quad t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

3.b.

$$\begin{aligned} R &= \frac{|\underline{p_1'}\,\underline{u_1'}|S_1}{|\underline{p_1}\,\underline{u_1}|S_1} = r_{12}^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 \\ T &= \frac{|\underline{p_2}\,\underline{u_2}|S_2}{|\underline{p_1}\,\underline{u_1}|S_1} = \frac{Z_1}{Z_2} t_{12}^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} \end{aligned}$$

$(R + T = 1)$.

3.c. Si les fluides sont identiques, alors $Z_1 = \rho_1 c_1/S_1$, $Z_2 = \rho_1 c_1/S_2$. D'où :

$$r_{12} = (S_1 - S_2)/(S_1 + S_2) \; ; \; t_{12} = 2S_1/(S_1 + S_2)$$

t_{12} est toujours positif. Pour la surpression, on n'a pas de changement de phase à la transmission. En revanche r_{12} sera négatif si $S_1 < S_2$. On aura un déphasage de π à la réflexion si $S_1 < S_2$.

3.d. Si $S_1 = S_2 = S$, on a alors $Z_1 = R_1/S$ et $Z_2 = R_2/S$. En remplaçant Z_1 et Z_2 par leurs expressions, on vérifie facilement que les résultats de la question 3) se réduisent à ceux de la question 2).

11 **CONSEIL : Cet exercice reprend le précédent mais, cette fois, le son se propage dans un solide. Une comparaison (méthodes et résultats) s'impose donc.**

1.

$$E = \frac{l}{\delta l}\frac{F}{S} \qquad \Longrightarrow \qquad E \quad \text{est en N.m}^{-2}$$

2.a. La masse de la tranche est $\mathrm{d}m = \rho_0 \, S \, \mathrm{d}x$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche considérée s'écrit :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \mathrm{d}m \; \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad F_2 - F_1 = \rho_0 \, S \, \mathrm{d}x \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Or,

$$F_2 - F_1 = F(x_2, t) - F(x_1, t) = F(x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t), t) - F(x + \psi(x, t), t) \approx \mathrm{d}x \frac{\partial F}{\partial x}$$

d'après l'approximation acoustique. D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho_0 S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (142)$$

2.b. $\delta l/l = (x_2 - x_1 - \mathrm{d}x)/\mathrm{d}x$. Or, $x_2 - x_1 = \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t) - \psi(x, t)$. Donc $\delta l/l = (\psi(x + \mathrm{d}x, t) - \psi(x, t))/\mathrm{d}x = \partial\psi/\partial x$.
La Loi de Hooke conduit à :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{F}{ES} \tag{143}$$

2.c. En dérivant les deux membres de (143) par rapport à x et en reportant dans (142), on obtient :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{E}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{c} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = 5000 \text{ m/s} \tag{144}$$

12 **CONSEIL : Dans cet exercice important, on étudie, entre autres, les ondes stationnaires apparaissant dans un tuyau semi-infini. On retiendra les dispositions relatives des nœuds et des ventres de vibration.**

1. On considère une tranche de fluide d'épaisseur infiniment petite, de volume v au repos (d'après l'approximation acoustique, les variations du volume de la tranche seront très faibles).
Énergie cinétique de la tranche : $E_\mathrm{c} = (\rho_0 v)u^2/2$.
Densité volumique d'énergie cinétique : $e_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}/v = \rho_0 u^2/2$.
D'autre part, la surpression p' variant de 0 à p, le travail des forces de surpression, $W = -\int_v^{v+\Delta v} p'\mathrm{d}v$, est égal à E_p d'après l'énoncé. Or,

$$\chi_S = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right)_S \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}v = -\chi_S\, v\, \mathrm{d}p'$$

D'où $E_p = \int_0^p p'\chi_S\, v\, \mathrm{d}p' = v\,\chi_S \int_0^p p'\mathrm{d}p' = v\,\chi_S\, p^2/2$.
Densité volumique d'énergie potentielle : $e_p = E_p/v = \chi_S\, p^2/2$.
Pour une onde harmonique plane progressive se propageant dans le sens x croissant, on a $p/u = R = \rho_0 \mathrm{c} = \sqrt{\rho_0/\chi_S}$. En notations réelles :

$$p = p_0\cos(\omega t - kx) \quad ; \quad u = u_0\cos(\omega t - kx) \quad ; \quad p_0 = Ru_0$$

$$e_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\rho_0 u_0^2\cos^2(\omega t - kx) \quad ; \quad e_p = \frac{1}{2}\chi_S p_0^2\cos^2(\omega t - kx)$$

Or, $p_0 = Ru_0 \quad \Longrightarrow \quad p_0^2 = R^2u_0^2 \quad \Longrightarrow \quad p_0^2 = (\rho_0/\chi_S)u_0^2$. On a donc $\chi_S p_0^2 = \rho_0 u_0^2$ ce qui entraîne que $e_\mathrm{c} = e_p$.
$e = e_\mathrm{c} + e_p = \rho_0 u_0^2\cos^2(\omega t - kx) \quad \Longrightarrow \quad e$ est une fonction de $(t - x/\mathrm{c})$. Donc e satisfait à l'équation d'ondes et l'énergie se propage à la célérité c dans le sens x croissant.
De même, pour une onde se propageant dans le sens x décroissant, p et u seraient des fonctions de $(t + x/\mathrm{c})$. On aurait encore $e_\mathrm{c} = e_p$ et e serait, elle-même, une fonction de $(t + x/\mathrm{c})$. L'énergie se propagerait donc à la célérité c dans le sens x décroissant.

$\mathrm{d}W$ étant l'énergie traversant l'unité de surface d'onde pendant la durée $\mathrm{d}t$, on a : $\mathrm{d}W = e\mathrm{c}\mathrm{d}t$ (l'onde a progressé de $\mathrm{c}\mathrm{d}t$; l'énergie contenue dans le volume $(\mathrm{c}\mathrm{d}t \times 1)$ a traversé la surface considérée). D'où $\Pi = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = e\,\mathrm{c}$.

2. $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi_1}(x,t) + \underline{\psi_1'}(x,t)$, $\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}(x,t) + \underline{p_1'}(x,t)$. En $x = L$, on a $\forall t \;\; \psi = 0$ (tuyau fermé). Or,

$$\underline{\psi_1}(x,t) = \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} \quad \text{(onde incidente)} \qquad \underline{\psi_1'}(x,t) = \mathrm{A}_1' \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} \quad \text{(onde réfléchie)}$$

$$\underline{\psi}(x,t) = \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} + \mathrm{A}_1' \mathrm{e}^{i(\omega t + kx)} \quad ; \quad \underline{\psi}(L,t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{-ikL} + \mathrm{A}_1' \mathrm{e}^{ikL} = 0$$

D'où $\mathrm{A}_1' = -\mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{-2ikL}$ et

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x,t) &= \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{i\omega t} \left(\mathrm{e}^{-ikx} - \mathrm{e}^{ikx - 2ikL} \right) = \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{i(\omega t - kL)} \left(\mathrm{e}^{-ik(x-L)} - \mathrm{e}^{ik(x-L)} \right) \\ &= -2i \, \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{i(\omega t - kL)} \sin(k(x-L)) \qquad \text{(onde stationnaire)} \end{aligned} \tag{145}$$

$$\underline{p}(x,t) = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \underline{\psi}(x,t)}{\partial x} = \frac{2ik\mathrm{A}_1}{\chi_S} \, \mathrm{e}^{i(\omega t - kL)} \cos(k(x-L)) \qquad \text{(onde stationnaire)} \tag{146}$$

Nœuds de déplacement (voir l'équation (145)) :

$$\sin(k(x-L)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k(x-L) = m\pi \quad \Longrightarrow \quad x = L + m\frac{\pi}{k} = L + m\frac{\lambda}{2}$$

λ est la longueur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$). L'entier m doit être choisi négatif ou nul car $x \leqslant L$.

Deux nœuds de déplacement consécutifs sont séparés par $\lambda/2$.
Ventres de pression (voir l'équation (146)) :

$$\cos(k(x-L)) = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sin(k(x-L)) = 0$$

Les ventres de pression sont donc des nœuds de déplacement. De même, pour les ventres de déplacement, on aura :

$$\sin(k(x-L)) = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos(k(x-L)) = 0$$

Les ventres de déplacement sont donc des nœuds de pression. Leurs abscisses sont données par :

$$x = L + \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2} \qquad , \qquad m \text{ étant un entier négatif.}$$

Un nœud et un ventre de déplacement consécutifs sont séparés par $\dfrac{\lambda}{4}$.

3. Si le tuyau est fermé à droite (en $x = L$) et ouvert à gauche (en $x = 0$), alors on a un nœud de déplacement en $x = L$ et nœud de pression (donc un ventre de déplacement) en $x = 0$. D'où $\sin(k(x-L)) = \pm 1$ pour $x = 0$ soit $\sin kL = \pm 1$. Doù $kL = \pi/2 + m\pi$ avec, ici, m entier positif ou nul (car k et L sont positifs).

$$\begin{aligned} \Longrightarrow k &= \frac{1}{L}\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = \frac{\omega}{\mathrm{c}} \\ &= \frac{2\pi f}{\mathrm{c}} \quad \Longrightarrow \quad f = (2m+1)\left(\frac{\mathrm{c}}{4L}\right) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Le tuyau n'admet que les harmoniques impairs du fondamental de fréquence $f_0 = \dfrac{\mathrm{c}}{4L}$.

4. Si le tuyau est ouvert aux deux bouts, alors $x = 0$ et $x = L$ sont des ventres de déplacement. Or deux ventres (ou deux nœuds) de déplacement consécutifs sont séparés par $\lambda/2$. On en déduit donc facilement que les conditions aux limites impliquent $L = m\lambda/2 = mc/(2f)$ d'où $f = mc/(2L)$, $m = 1, 2, \ldots$.
Si le tuyau est fermé aux deux bouts, alors $x = 0$ et $x = L$ sont des nœuds de déplacement et l'on a encore la condition $L = m\lambda/2$, ce qui conduit à $f = mc/(2L)$, $m = 1, 2, \ldots$.
Le tuyau ouvert (ou fermé) aux deux bouts admet tous les harmoniques du fondamental dont la fréquence est maintenant $f_0' = \dfrac{c}{2L}$.
En conclusion, on observe que la fréquence du fondamental est inversement proportionnelle à la dimension L de la cavité et, ceci, quelles que soient les conditions aux limites. Plus un instrument de musique est petit et plus les sons qu'il émet sont aigus.

13 CONSEIL : C'est l'exercice classique sur les interférences. Les expressions de la différence de marche et de l'interfrange doivent être parfaitement connues de tout candidat au CAPES ; les démonstrations aussi.

1.a. $\lambda = c/f \quad \Longrightarrow \quad c = \lambda f = 340$ m/s.

1.b. Le déphaseur n'étant pas connecté, les deux vibrations longitudinales arrivant en M peuvent s'écrire :

$$s_1(M, t) = a' \cos(\omega t - K\, S_1M) \tag{147}$$

$$s_2(M, t) = a' \cos(\omega t - K\, S_2M) \qquad \text{avec } K = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{148}$$

Les directions S_1M et S_2M étant voisines, on peut considérer que les vibrations s_1 et s_2 sont pratiquement colinéaires. La vibration résultante s'écrit donc :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = 2a' \cos\left(\frac{K}{2}(S_2M - S_1M)\right) \cos\left(\omega t - \frac{K}{2}(S_1M + S_2M)\right) \tag{149}$$

Son amplitude $2a' \cos\left(\frac{K}{2}(S_2M - S_1M)\right)$ varie, passant par des maxima et des minima, lorsqu'on déplace le détecteur le long de Oy ; on observe un phénomène d'interférences. Elle sera maximale si $\cos\left(\frac{K}{2}(S_2M - S_1M)\right) = \pm 1$ soit si :

$$\Delta \equiv S_2M - S_1M = m\lambda\,, \qquad m \text{ étant un entier relatif} \tag{150}$$

Or, pour la différence de marche, on a :

$$\begin{aligned} \Delta \equiv S_2M - S_1M &= \sqrt{D^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2} \\ &= D\left(\sqrt{1 + \left(\frac{y + \frac{a}{2}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y - \frac{a}{2}}{D}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

En utilisant $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2$ si $\alpha \ll 1$, on obtient :

$$\Delta \approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y+\frac{a}{2}}{D}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-\frac{a}{2}}{D}\right)^2\right) = \frac{ay}{D}$$

La vibration en M aura une amplitude maximale si $\Delta = m\lambda = \dfrac{ay}{D}$ soit $y = m\left(\lambda D/a\right)$ avec m entier. D'où l'interfrange : $i = \lambda D/a = 12{,}75$ cm.

1.c. Avec le déphaseur, $s_1(\mathrm{M}, t)$ est inchangé alors que $s_2(\mathrm{M}, t)$ devient :

$$s_2(\mathrm{M}, t) = a' \cos(\omega t - \mathrm{K}\, S_2\mathrm{M} + \Phi) \qquad (151)$$

On voit que l'introduction du déphaseur conduit à changer K S_2M en K S_2M $- \Phi$. La condition (150) devient donc

$$S_2\mathrm{M} - S_1\mathrm{M} - \frac{\Phi}{\mathrm{K}} = m\lambda\,, \quad \text{ou encore} \quad \frac{ay}{D} = \left(m + \frac{\Phi}{2\pi}\right)\lambda \qquad (152)$$

On aura interférence constructive si :

$$y = m\left(\frac{\lambda D}{a}\right) + \frac{\Phi}{2\pi}\left(\frac{\lambda D}{a}\right) = m\,i - \frac{i}{4} \qquad \text{si} \quad \Phi = -\frac{\pi}{2}$$

Donc l'interfrange est inchangée. Le système de franges est simplement translaté vers le bas de $i/4$.

2.a. La même intensité i' circule dans les deux résistances R'. Donc $V_e - V_s = 2R'i'$. L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire ; donc $V_+ = V_-$ ce qui permet d'écrire $V_e - V_+ = Ri = V_e - V_- = R'i'$ (i est le courant circulant dans R et, également, dans C).
D'autre part,

$$i = jC\omega V_+ = jC\omega(V_e - Ri) \quad \Longrightarrow \quad i = \frac{jC\omega}{1 + jC\omega R} V_e$$

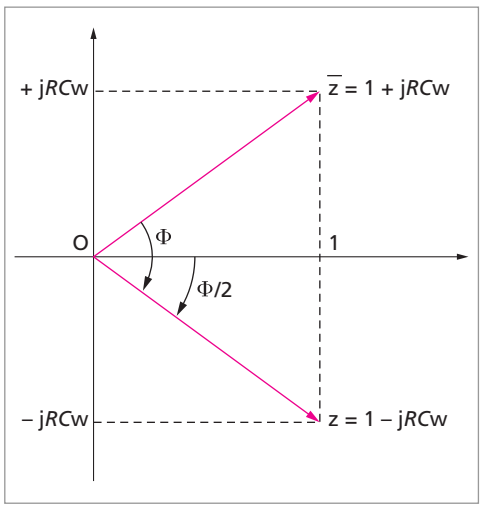
Finalement :

$$\begin{aligned} V_e - V_s &= 2R'i' = 2Ri \\ &= 2V_e jC\omega R/(1 + jC\omega R) \end{aligned}$$

D'où :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1 - jC\omega R}{1 + jC\omega R} = \mathrm{e}^{j\Phi} \qquad (153)$$

H est le rapport de deux nombres complexes conjugués, $z = 1 - jC\omega R$ et $\bar{z} = 1 + jC\omega R$. Le circuit n'introduit donc qu'un déphasage Φ entre V_e et V_s.



2.b. D'après la figure ci-dessus, on a $\tan(\Phi/2) = -C\omega R = -1$ si $\Phi = -\pi/2$. D'où : $C = 1/(\omega R) = 3{,}98$ nF.

14 **CONSEIL : Il est indispensable d'avoir étudié la partie 5 avant d'aborder cet exercice.**

1. Pour passer de $\psi(0, t)$ à $\psi(x, t)$, on change t en $(t - x/c)$ soit

$$\psi(x, t) = a \sin(2\pi N_0(t - x/c))$$

M vibre en phase avec la source si $2\pi N_0 x/c = m2\pi$ (m entier) soit $x = mc/N_0 = m\lambda$.

Mesure de c : on mesure λ et on en déduit $c = \lambda N_0$.
Le H.P. en $x = 0$ émet un son de fréquence N_0. On visualise le signal qui l'alimente en voie A de l'oscilloscope. Sur l'axe des x, on déplace un microphone relié à la voie B de l'oscilloscope. On cherche deux coincïdences successives des signaux sur les voies A et B en déplaçant le microphone sur l'axe des x. Deux positions correspondant à deux coincïdences successives seront séparées de λ.

2. Se reporter à la partie 5 sur l'effet Doppler dont on rappelle ici les résultats :
$N' = N_0 c/(c - |v|) = 1062{,}5$ Hz $> N_0$ si la source s'approche de M ;
$N' = N_0 c/(c + |v|) = 944{,}4$ Hz $< N_0$ si la source s'éloigne de M.
Cas général : $N' = N_0(c - v')/(c - v)$

L'effet Doppler apparaît en astrophysique. Il s'agit alors d'effet Doppler relativiste, les ondes concernées étant alors les ondes lumineuses ou, plus généralement, électromagnétiques.

3.a. Au cours du déplacement du microphone sur l'axe $x'x$, on observe une sinusoïde dont l'amplitude varie (elle est maximale en un ventre de vibration, minimale en un nœud).

3.b.

$$\psi_1(A_1, t) = a \sin(2\pi N t) \quad \Longrightarrow \quad \psi_1(M, t) = a \sin\left(2\pi N\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

En prenant en compte la disposition relative des deux H.P., on a :

$$\psi_2(A_1, t) = -a \sin(2\pi N t) \quad \Longrightarrow \quad \psi_2(M, t) = -a \sin\left(2\pi N\left(t + \frac{x - d}{c}\right)\right)$$

Avec la formule $\sin p - \sin q = 2\cos((p + q)/2)\sin((p - q)/2)$, on obtient :

$$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t) = -2a \cos\left(2\pi N\left(t - \frac{d}{2c}\right)\right) \sin\left(2\pi N\left(\frac{x - \frac{d}{2}}{c}\right)\right)$$

On a :

– des nœuds pour $(2\pi N)(x - d/2)/c = m\pi \quad \Longrightarrow \quad x = (d/2) + m(\lambda/2)$

– des ventres pour $(2\pi N)(x - d/2)/c = (\pi/2) + m\pi \quad \Longrightarrow \quad x = (d/2) + (\lambda/4) + m(\lambda/2)$

On en déduit la distance i séparant deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs $i = \lambda/2 = c/(2N)$. D'où $c = 2Ni = 345$ m/s.

15 **CONSEIL :** **Cet exercice est important aussi bien pour l'écrit que pour l'oral du Concours. L'expression de la célérité des ondes transversales est à connaître. Il en va de même pour la fréquence apparente du phénomène observé au stroboscope.**

1. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à l'élément de corde de longueur ds : $\overrightarrow{T}(x+dx,t) - \overrightarrow{T}(x,t) = \mu\, ds\, \ddot{y}\, \overrightarrow{u_y}$. D'où, en projection sur Ox :

$$T(x+dx,t)\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\cos(\alpha(x,t)) = 0$$

La quantité $T\cos\alpha$ est donc indépendante de x. $T\cos\alpha \equiv T_0$.

En projection sur Oy : $T(x+dx,t)\sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\sin(\alpha(x,t)) = \mu ds \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

Soit $\dfrac{\partial}{\partial x}(T\sin\alpha)\,dx \approx \mu\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. D'où $\dfrac{\partial}{\partial x}(T_0\tan\alpha) \approx \mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

Or,

$$\tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad\Longrightarrow\quad T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

avec $V = \sqrt{T_0/\mu}$. V est la célérité des ondes transversales se propageant le long de la corde.

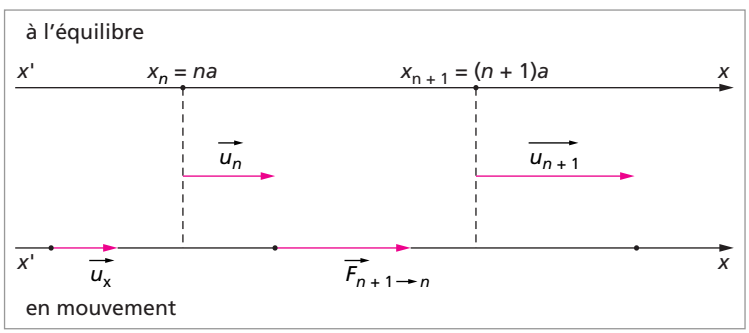
2.a. $y(x,t) = a\sin(2\pi N_0(t - x/V))$

2.b. $N_0 = kN$. On observe une corde immobile car entre deux éclairs la corde est le siège de k vibrations complètes.

$N_0 = kN + \delta$. Pendant la durée T $(= 1/N)$ entre deux éclairs, la corde fait, en réalité, $TN_0 = k + T\delta$ vibrations. En apparence, elle en fait seulement $T\delta$. La fréquence du mouvement apparent est donc $\nu = (T\delta)/T$ soit $\nu = \delta$ ou encore $\nu = N_0 - kN$.

La longueur d'onde est inchangée et l'on a $\lambda = V/N_0 = V'/\nu$. D'où $V' = V\delta/N_0$. Remarquons que si $\delta = 0$, on a alors $V' = 0$. La corde apparaît immobile : on retrouve le cas précédent.

16 **CONSEIL :** **Cet exercice classique de Physique du Solide est à aborder après l'étude de la partie 1. On retiendra qu'un milieu discret est dispersif.**



1.

$$\overrightarrow{F}_{n+1\to n} = \alpha\left(\overrightarrow{u_{n+1}} - \overrightarrow{u_n}\right)$$

2. La particule n est soumise aux deux forces $\overrightarrow{F}_{n+1\to n}$ et $\overrightarrow{F}_{n-1\to n}$. On a donc :

$$\overrightarrow{F}_{n+1\to n} + \overrightarrow{F}_{n-1\to n} = m\ddot{u}_n\overrightarrow{u_x} \qquad \text{d'où}$$

$$\alpha\,(u_{n+1} - u_n) + \alpha\,(u_{n-1} - u_n) = m\ddot{u}_n \quad \Longrightarrow \quad \alpha\,(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) = m\ddot{u}_n \quad (155)$$

3.

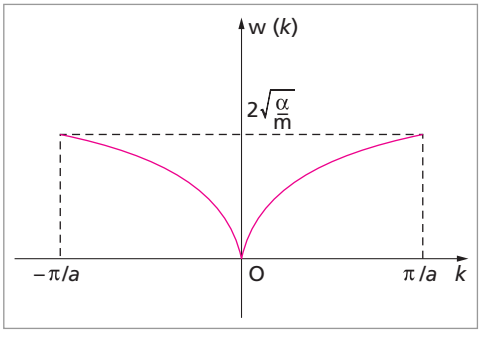
$$u_n = u.\mathrm{e}^{i(\omega t - kna)} \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{-ika}u_n\ ;\ u_{n-1} = \mathrm{e}^{+ika}u_n\ ;\ \ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$$

En reportant ces expressions dans (155), on obtient :

$$\alpha\left(\mathrm{e}^{-ika} + \mathrm{e}^{+ika} - 2\right) = -m\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\,(2\cos ka - 2) = -m\omega^2$$

$$\Longrightarrow \quad 4\alpha\sin^2\frac{ka}{2} = m\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$$

La relation entre k est ω est appelée relation de dispersion.
On observe que $\omega(k + 2\pi/a) = \omega(k)$. On peut donc se limiter à un intervalle d'amplitude $2\pi/a$ pour l'étude de $\omega(k)$, soit, par exemple, $-\pi/a < k \leqslant +\pi/a$.



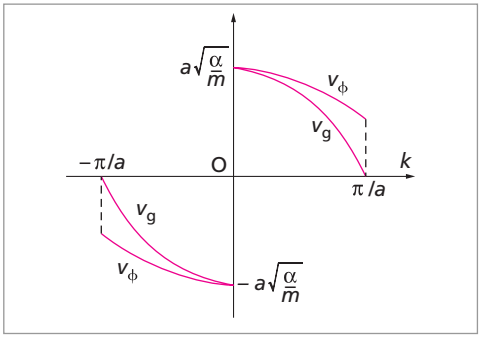
4. La vitesse de phase s'écrit :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|\ \frac{1}{k}$$

$v_\phi(-k) = -v_\phi(k)$

La vitesse de groupe s'écrit :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$



d'où : pour $\quad 0 < k \leqslant \dfrac{\pi}{a}$,

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\sin\frac{ka}{2}, \quad v_g = a\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\cos\frac{ka}{2}$$

pour $\quad -\dfrac{\pi}{a} \leqslant k < 0$,

$$\omega = -2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\sin\frac{ka}{2}, \quad v_g = -a\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\cos\frac{ka}{2}$$

$(v_g(-k) = -v_g(k))$

On observe que $v_g \approx v_\phi$ quand $ka \ll 1$ (ou, de manière équivalente, $\lambda \gg a$). Le milieu est alors peu dispersif. Ceci se voit aussi sur la relation de dispersion (ω est approximativement proportionnel à k quand $ka \ll 1$). On observe également que $v_g = 0$ en $k = \pm\pi/a$ (onde stationnaire ; on peut montrer que, dans ces conditions, deux particules adjacentes vibrent constamment en opposition de phase).

17 **CONSEIL : Cet exercice est, essentiellement, le même que le précédent mais vu, cette fois, sous l'angle de la rotation.**

1. La tige d'ordre n est soumise au couple de torsion exercé par la portion de fil comprise entre la tige n et la tige $(n+1)$ mais aussi au couple de torsion exercé par la portion de fil entre la tige n et la tige $(n-1)$. Ces deux couples ont, respectivement, pour moments :

$$\Gamma_{n+1\to n} = C(\theta_{n+1} - \theta_n) \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{n-1\to n} = C(\theta_{n-1} - \theta_n).$$

Appliquons le théorème du moment cinétique à la tige n :

$$J_\Delta \ddot{\theta}_n = \Gamma_{n+1\to n} + \Gamma_{n-1\to n} = C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n)$$

$$\text{soit} \qquad \ddot{\theta}_n = -\Omega^2(\,2\,\theta_n \,-\, \theta_{n-1} \,-\, \theta_{n+1}\,) \tag{159}$$

avec $\Omega^2 = \dfrac{C}{J_\Delta}$.

2.a. Posons $c = \omega/|k|$. Si k est positif, on a :

$$\theta_n(t) \;=\; A\,\cos\,(kna - \omega t) = \cos\left(\omega(t - x_n/c)\right).$$

On est donc en présence d'une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants à la célérité c. Si k est négatif, on a, cette fois, $\theta_n(t) \;=\; A\cos\left(\omega(t + x_n/c)\right)$. L' onde se propage maintenant dans le sens des x décroissants toujours à la célérité c.

2.b. On procède comme dans l'exercice précédent.
$\theta_n \;=\; A\exp[j(kna - \omega t)]$; $\theta_{n+1} = \exp(jka)\theta_n$; $\theta_{n-1} = \exp(-jka)\theta_n$; $\ddot{\theta}_n = -\omega^2\theta_n$.
En reportant ces expressions dans (159), on obtient :

$$-\omega^2 = -\Omega^2\left(2 - \exp(-jka) - \exp(jka)\right) \qquad \text{soit} \qquad \omega = 2\Omega\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$$

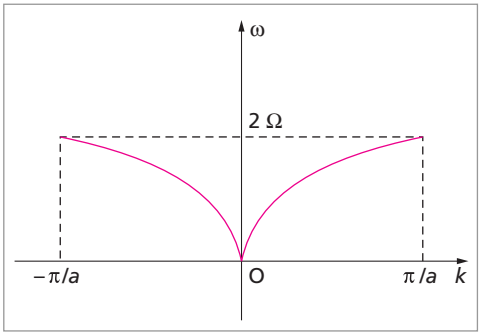
2.c. $0 \leqslant \omega \leqslant 2\Omega$.

2.d.

$$\omega(k + 2\pi/a) = 2\Omega\left|\sin\left(\frac{ka}{2} + \pi\right)\right| = \omega(k)$$

On peut donc se restreindre à un intervalle de k d'amplitude $2\pi/a$.

2.e. $-\pi/a \leqslant k \leqslant +\pi/a$.



3. Il faut supprimer l'onde réfléchie : la tige à l'extrémité de l'ondoscope est libre de se mouvoir et elle est reliée à un dispositif qui crée des frottements visqueux. Si les paramètres du dispositif sont correctement déterminés, il n'y a pas d'onde réfléchie.

4.a. k étant positif, le premier terme correspond à une onde se propageant dans le sens des x croissants et le second à une onde se propageant dans le sens des x décroissants. Les deux ondes ont la même célérité $c = \omega/k$.

4.b. $\theta_0 = 0 = A\cos\omega t + B\cos(\omega t + \phi)\ \forall\ t$.
- $\omega t = 0 \quad \Longrightarrow \quad A + B\cos\phi = 0$
- $\omega t = \pi/2 \quad \Longrightarrow \quad -B\sin\phi = 0$.

Si l'on rejette la solution triviale $B = A = 0$, on est conduit à choisir $\phi = 0$ ce qui entraîne $A = -B$.

4.c On a alors :

$$\theta_n(t) = A\cos(kna - \omega t) - A\cos(kna + \omega t) = 2A\sin(kna)\sin(\omega t) \equiv f(t)g(na)$$

avec $f(t) = 2A\sin(\omega t)$ et $g(na) = \sin(kna)$. On est en présence d'ondes stationnaires.

4.d $\theta_N = 0 = f(t)g(Na)\ \forall\ t \quad \Longrightarrow \quad \sin(kNa) = 0$ soit $kNa = p\pi$ (p entier). On en déduit

$$k = p\left(\frac{\pi}{Na}\right) \quad , \quad p = 0, 1, 2, \ldots, N \quad \text{car} \quad 0 \leqslant k \leqslant \frac{\pi}{a}$$

4.e. L'équation différentielle linéaire établie à la question **1** conduit à une relation de dispersion valable pour des ondes progressives de pulsation ω se propageant dans un sens ou dans l'autre car $\omega(k) = \omega(-k)$. Cette relation est donc encore valable pour des ondes stationnaires qui sont la superposition des ondes précédentes.

$$k = p\left(\frac{\pi}{Na}\right) \quad \Longrightarrow \quad \omega = 2\Omega\left|\sin\frac{ka}{2}\right| = 2\Omega\left|\sin\frac{p\pi}{2N}\right| \quad , \quad p = 0, 1, 2, \ldots, N$$

4.f.

$$\theta_n(t) = 2A\ \sin\omega t\ \sin\left(\frac{p\pi n}{N}\right) \qquad 0 \leqslant n \leqslant N$$

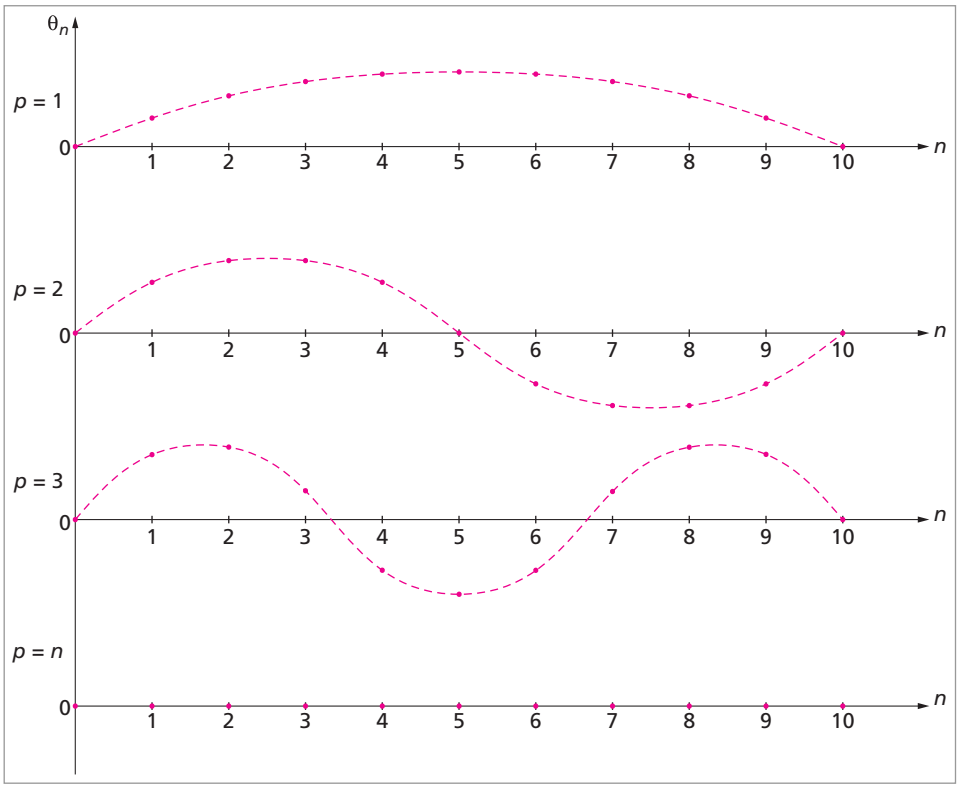
$$p = 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta_n(t) = 2A\ \sin\omega t\ \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right), \qquad \text{etc } \ldots,$$

$$p = N \quad \Longrightarrow \quad \theta_n(t) = 2A\ \sin\omega t\ \sin(\pi n) = 0 \quad \forall t \text{ et } \forall n$$

À un instant d'élongation maximale pour la tige n°1, on aura $\sin\omega t = 1$ et donc :

$$p = 1\ :\ \theta_n = 2A\ \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \qquad p = 2\ :\ \theta_n = 2A\ \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$p = 3\ :\ \theta_n = 2A\ \sin\left(\frac{3\pi n}{N}\right) \qquad p = N\ :\ \theta_n = 0$$

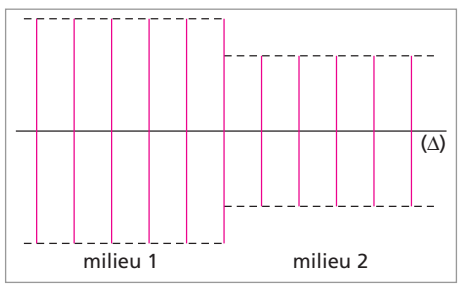


5.a. Les deux contributions à l'énergie mécanique de l'ondoscope sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de torsion. Le système est non amorti. De plus, il n'est soumis à aucune excitation extérieure. Son énergie mécanique totale se conserve.

5.b. On devrait observer une résonance très aiguë car il n'y a pas d'amortissement.

6. En fait, les frottements fluides croissent quand l'amplitude des oscillations augmente. Ils vont limiter l'acuité de la résonance.

7. Il suffit de modifier la longueur des tiges, ce qui modifie J_Δ et donc Ω.
La célérité des ondes sera différente dans le milieu 1 et dans le milieu 2 d'où des phénomènes de réflexion-transmission.
On peut proposer une analogie avec l'optique (réflexion-réfraction de la lumière à la traversée d'un dioptre) ou, encore, avec l'acoustique (réflexion-transmission du son lors d'un changement de milieu ; par exemple, lors du passage d'un tuyau dans un autre de section différente, les deux tuyaux étant remplis du même fluide – voir l'exercice 10 page 413).



Chapitre 6

Optique géométrique

Ce chapitre expose les principales relations de l'optique géométrique et détaille le fonctionnement des instruments optiques classiques. Si la seconde partie sur l'optique de Gauss est la partie la plus importante, il est indispensable néanmoins à la fois pour l'écrit et pour l'oral de maîtriser les lois fondamentales de l'optique et de connaître les propriétés des instruments d'optique.

1. Lois de Descartes. Stigmatisme

1.1. Chemin optique
1.2. Principe de Fermat
1.3. Lois de Snell-Descartes
1.4. Stigmatisme
1.5. Image d'un point objet
1.6. Aplanétisme. Grandissement linéaire

2. L'optique de Gauss

2.1. Conditions de Gauss
2.2. Éléments cardinaux d'un système centré
2.3. Dioptres
2.4. Lentilles. Doublets

3. Qualités des instruments d'optique

3.1. Grandissement linéaire γ
3.2. Puissance P (pour loupes et microscopes)
3.3. Grossissement G
3.4. Champ
3.5. Pouvoir séparateur. Limite de résolution

4. Fibres optiques

4.1. Fibres à saut d'indice
4.2. Fibres à gradient d'indice
4.3. Fibres multimodes. Fibres monomodes
4.4. Dispersion
4.5. Pertes. Coefficient d'atténuation linéique
4.6. Matériau utilisé. Procédé de fabrication
4.7. Utilisation et intérêt des fibres optiques

5. Compléments

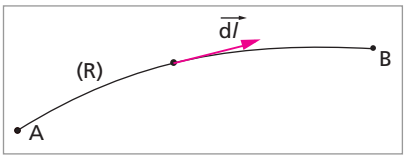
5.1. Miroirs
5.2. Rétroprojecteur
5.3. Grandeurs photométriques
5.4. L'œil

1. Lois de Descartes. stigmatisme

Les notions de base et les lois fondamentales de l'optique géométrique sont introduites dans cette partie. Il est bon de rappeler que les notions de stigmatisme et d'image ainsi que les lois de Descartes font l'objet de questions récurrentes à l'oral du concours.

1.1. Chemin optique

On considère un milieu isotrope d'indice variable $n(\vec{r})$. $v = c/n(\vec{r})$ est la vitesse de la lumière au point $\vec{r}$.
Soit un rayon lumineux (R) allant de A à B. Le temps mis par la lumière pour aller de A à B est :



$$t = \int_{(R)} \frac{dl}{v} = \int_{(R)} \frac{n(\vec{r})\, dl}{c} = \frac{L_{(R)}}{c} \qquad (1)$$

où $L_{(R)}$ est le **chemin optique** (AB) défini par :

$$L_{(R)} = \int_{(R)} n(\vec{r})\, dl \qquad (2)$$

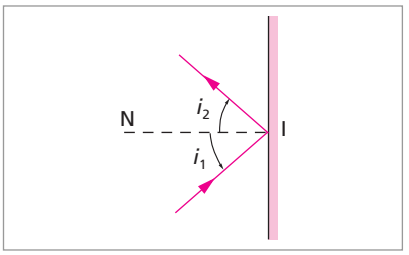
1.2. Principe de Fermat

Principe : Le chemin optique L du trajet que suit effectivement la lumière est stationnaire, c'est-à-dire maximum, minimum ou inflexionnel par rapport aux chemins infiniment voisins.

La durée de parcours est elle-même stationnaire.

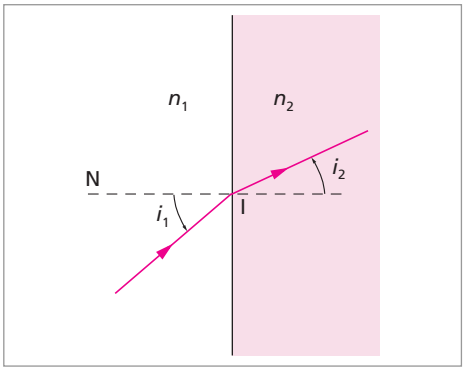
1.3. Lois de Snell-Descartes

Ces deux lois peuvent être déduites du principe de Fermat.
Réflexion : le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence et l'on a $i_1 = -i_2$.
Réfraction : lorsque la lumière passe d'un milieu d'indice n_1 dans un milieu d'indice n_2, le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et l'on a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



Remarque : lorsque i_1 est petit, la relation s'écrit $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$ (formule de Kepler).)

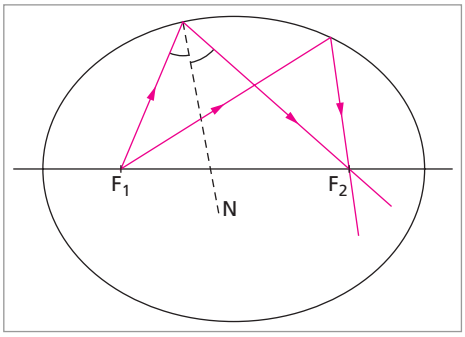
Si $n_2 > n_1$ (comme sur la figure ci-contre) alors $|i_2| < |i_1|$ donc, dans le milieu le plus réfringent, le rayon est rabattu vers la normale.



1.4. Stigmatisme

On a stigmatisme rigoureux pour le couple de points (A, A′) s'il existe une infinité de rayons lumineux joignant A et A′, le chemin optique (AA′) étant alors constant (indépendant du rayon considéré).

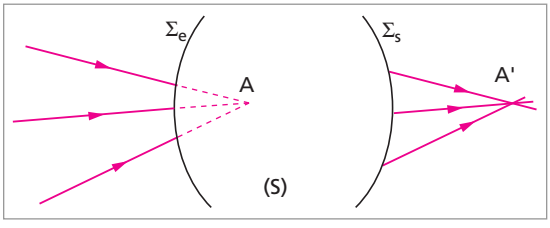
Exemple : Dans un miroir elliptique, F_1, F_2 étant les foyers de l'ellipse, on a stigmatisme rigoureux pour le couple (F_1, F_2).



1.5. Image d'un point objet

Si à tous les rayons incidents passant par A correspondent des rayons émergeant du système optique (S) passant par A′, on dit que A′ est l'image du point objet A par le système optique (S).
On a stigmatisme rigoureux pour le couple (A, A′), A et A′ sont dits **conjugués** par rapport au système (S).

Exemple :

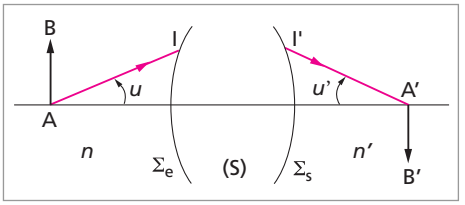


Σ_e étant la face d'entrée de la lumière dans le système (S) et Σ_s la face de sortie, on définit :

l'espace objet réel situé en avant de Σ_e ; l'espace objet virtuel situé en arrière de Σ_e
l'espace image réel situé en arrière de Σ_s ; l'espace image virtuel situé en avant de Σ_s

Dans la figure ci-dessus, l'objet A est virtuel et son image A′ est réelle.

1.6. Aplanétisme. Grandissement linéaire



Dans le reste du chapitre, on considèrera la plupart du temps des **systèmes centrés**, c'est-à-dire possédant un axe de révolution, **l'axe optique**. Un plan de front est alors un plan perpendiculaire à cet axe.
Supposons que l'on ait stigmatisme rigoureux pour le couple de points (A, A′) situés sur l'axe optique. On démontre que l'on conserve le stigmatisme pour deux points (B, B′) (au moins de manière approchée) avec B dans le plan de front de A, au voisinage de A, si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall u \quad , \quad n\,\overline{\mathrm{AB}}\,\sin u \;=\; n'\,\overline{\mathrm{A'B'}}\,\sin u' \tag{3}$$

soit, finalement :

$$\forall u \quad , \quad \frac{\sin u}{\sin u'} = \text{cste} \tag{4}$$

Cette condition constitue la **condition des sinus d'Abbe** pour les systèmes **aplanétiques**. (Voir l'exercice 7 sur le microscope).
Pour les systèmes aplanétiques, l'image A′B′ d'un petit objet plan AB perpendiculaire à l'axe optique est plane et perpendiculaire à l'axe optique.
Pour les systèmes aplanétiques, on définit le **grandissement linéaire** γ par :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

➜ **Voir exercices 1, 7 et 9**

2. L'OPTIQUE DE GAUSS

Cette partie est la plus importante du chapitre. Tout candidat au CAPES doit la connaître parfaitement. L'optique de Gauss est aussi appelée optique paraxiale ou encore approximation linéaire de l'optique.

2.1. Conditions de Gauss

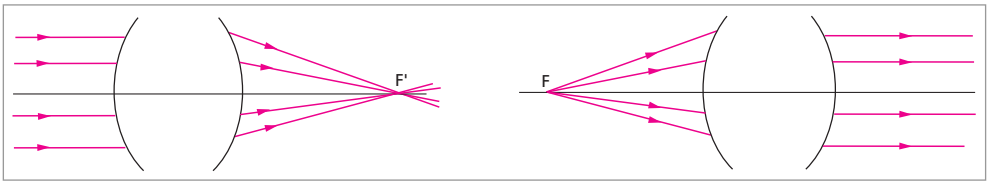
Dans les conditions de Gauss, les rayons lumineux forment des petits angles avec l'axe optique et les angles d'incidence sur les surfaces rencontrées sont faibles. Cela implique qu'en pratique les rayons restent voisins de l'axe optique (**rayons paraxiaux**). Dans les calculs, pour tous ces angles θ petits, exprimés en radians, on écrira :

$$\sin\theta \;\approx\; \tan\theta \;\approx\; \theta$$

2.2. Éléments cardinaux d'un système centré

Dans toute la partie 2, on s'intéressera aux systèmes **dioptriques**, c'est-à-dire ne contenant pas de miroir. Dans le cadre de l'optique de Gauss, on considère un système quelconque. Il peut être entièrement décrit par un petit nombre de points et de plans, appelés **éléments cardinaux** que nous passons en revue dans les trois paragraphes suivants.

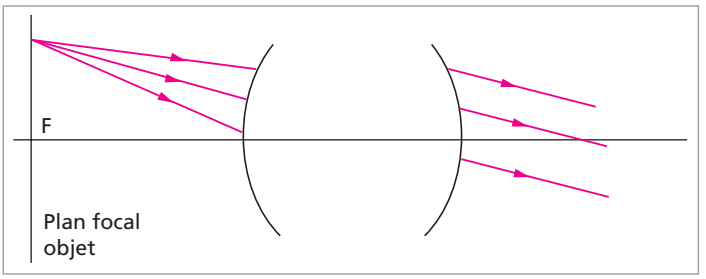
Foyers. Plans focaux



Le foyer image F' est l'image d'un point situé à l'infini dans la direction de l'axe optique. Le foyer objet F est le point dont l'image est rejetée à l'infini dans la direction de l'axe.

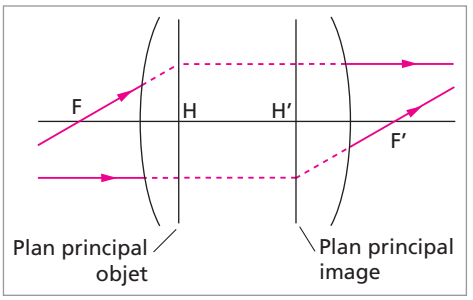
Définition : Un système est dit convergent si son foyer image F' est réel.

Les plans focaux objet et image sont les plans de front passant, respectivement, par F et F'.



Plans principaux. Points principaux

Les plans principaux sont deux plans de front conjugués pour lesquels le grandissement linéaire est $+1$. H et H' sont les points principaux objet et image. Attention, les distances focales sont définies à partir des points principaux.



$f = \overline{HF}$ est la distance focale objet ;

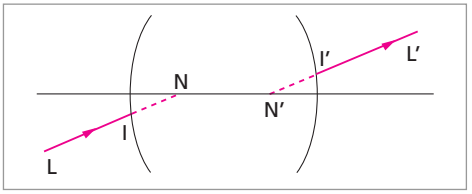
$f' = \overline{H'F'}$ est la distance focale image.

Si les milieux extrêmes sont identiques (ce qui est le cas le plus fréquent) alors $f = -f'$.

Remarque : les plans antiprincipaux sont deux plans conjugués de grandissement -1.

Points nodaux

Les deux points nodaux N et N′ sont conjugués, situés sur l'axe et tels qu'à tout rayon incident LI passant par N correspond un émergent I′L′ passant par N′ avec LI // I′L′. Si les milieux extrêmes sont identiques, alors les points nodaux sont confondus avec les points principaux correspondants (H ≡ N, H′ ≡ N′).



Formules de conjugaison et de grandissement

Les milieux extrêmes sont supposés identiques. Pour construire l'image A′B′ d'un objet AB par un système optique, on utilise les plans principaux et les foyers :

- le rayon incident BK passant par F émerge en K′B′ parallèle à l'axe optique ;
- le rayon incident BJ parallèle à l'axe optique émerge en J′F′.

Avec les notations $p = \overline{HA}$; $p' = \overline{H'A'}$; $f = \overline{HF}$; $f' = \overline{H'F'}$; $f' = -f$; $\sigma = \overline{FA}$; $\sigma' = \overline{F'A'}$, on peut écrire les formules de conjugaison et de grandissement suivantes :

- formule de Descartes (origine aux points principaux)

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \tag{5}$$

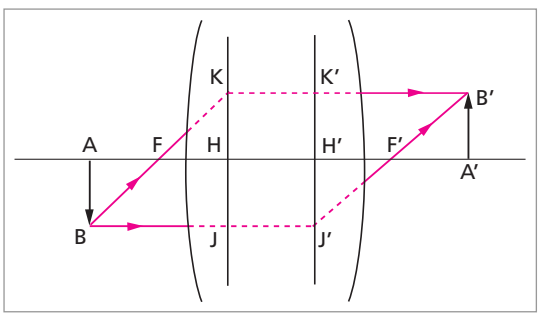
- formule de Newton (origine aux foyers)

$$\sigma\sigma' = ff' = -f'^2 \tag{6}$$

- grandissement linéaire

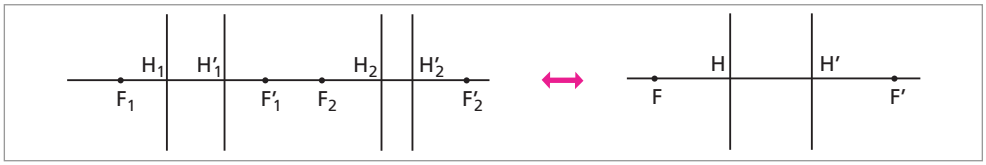
$$\gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p} \tag{7}$$

Ce sont les mêmes formules et essentiellement les mêmes démonstrations que pour une lentille mince unique.



Formule de Gullstrand

Deux systèmes centrés disposés en « série » le long de leur axe commun sont équivalents à un système unique dont on peut déterminer les éléments cardinaux.



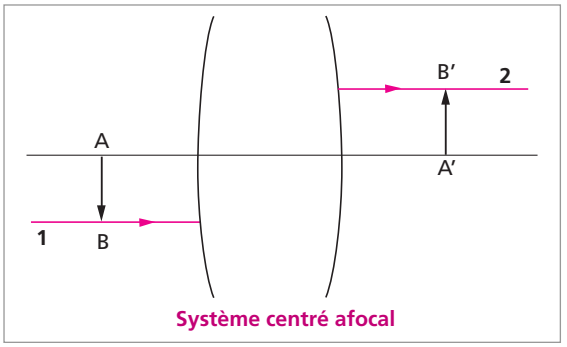
La distance focale f' ($\equiv \overline{H'F'}$) du système équivalent s'obtient par la formule de Gullstrand qui, pour deux systèmes plongés dans l'air, s'écrit :

$$C = C_1 + C_2 - e\,C_1\,C_2 \qquad (8)$$

avec $e = \overline{H'_1H_2}$, $C = 1/f'$, $C_1 = 1/f'_1$ et $C_2 = 1/f'_2$.
Les **vergences** $C = 1/f' = -1/f$, etc..., s'expriment en **dioptries** δ ($1\ \delta = 1\ \text{m}^{-1}$).

Systèmes centrés afocaux

Un système centré est afocal si ses foyers sont rejetés à l'infini.
À un rayon incident 1 parallèle à l'axe correspond un rayon émergent 2 parallèle à l'axe (voir figure ci-contre).
Pour de tels systèmes, le grandissement linéaire γ est indépendant de la position de l'objet.

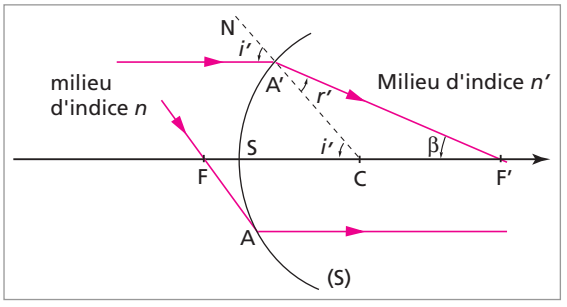


Système centré afocal

2.3. Dioptres

Le dioptre sphérique dans les conditions de Gauss

Un dioptre sphérique est un ensemble de deux milieux d'indices n et n' différents séparés par une surface sphérique (S) de centre C.
Sur la figure ci-contre, on considère le cas $n < n'$. On pose $CA = R = \overline{SC}$.
Ce dioptre présente les propriétés suivantes :



- les rayons passant par C ne sont pas déviés (incidence normale) ;
- F′ est à l'intérieur du milieu n', au delà de C ;
- F est en avant du sommet S ;
- tout point A appartenant à la surface (S) est confondu avec son image.

S est point principal objet et image. Les distances focales sont définies par $f' = \overline{SF'}$ et $f = \overline{SF}$ (*elles ne sont pas égales en valeur absolue, les milieux extrêmes n'étant pas identiques*). On les calcule en considérant des angles petits. On a $A'S \approx f'\beta' \approx Ri'$; $i' = \beta' + r'$ ainsi que $ni' \approx n'r'$ (Loi de Descartes). D'où $\beta' \approx i'(1 - n/n')$ et finalement :

$$f' = R\frac{n'}{n' - n} \quad ; \quad f = R\frac{n}{n - n'} \tag{9}$$

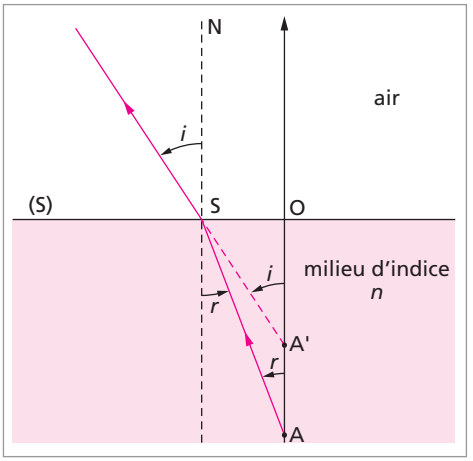
La vergence de ce dioptre est donnée par :

$$C = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{R} = \frac{n' - n}{\overline{SC}} \tag{10}$$

Le dioptre plan dans les conditions de Gauss

Soit le système de la figure ci-contre où (S) est un plan.

L'objet A a pour image le point A′ qui, par symétrie, sera situé sur AO. Calculons $\overline{AA'}$. Pour cela, on considère un rayon lumineux AS issu de A. Les angles étant petits, on a : $i \approx n\,r$ et $\overline{OS} \approx \overline{A'O}\;i \approx \overline{AO}\;r$. D'où $n\,\overline{A'O} \approx \overline{AO}$ et finalement $\overline{AA'} \approx \overline{AO}\;(1 - 1/n)$, quantité qui est indépendante du rayon choisi.



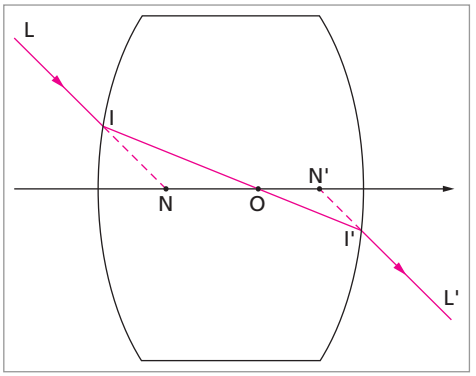
2.4. Lentilles. Doublets

Une lentille est une association de deux dioptres sphériques coxiaux.

Nous considèrerons dans la partie 2.4. des lentilles plongées dans l'air.

Centre optique O d'une lentille

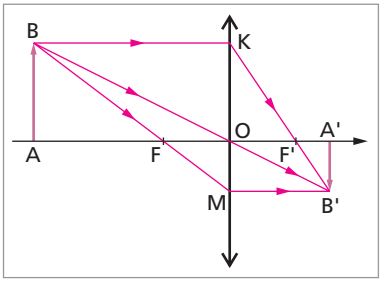
Un rayon qui traverse la lentille en passant par O ne subit pas de déviation (LI∥L′I′).



Lentilles minces. Conjugaison. Grandissement

Une lentille est mince si son épaisseur est très faible comparée aux rayons de courbure de ses faces.

Pour une lentille mince, points nodaux et points principaux sont confondus avec le centre optique O.



Les formules de conjugaison et de grandissement linéaire sont :

formule de Descartes $$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad (11)$$

formule de Newton $$\sigma' = f f' = -f'^2 \quad (12)$$

grandissement linéaire $$\gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p} \quad (13)$$

avec $p = \overline{OA}$; $p' = \overline{OA'}$; $\sigma = \overline{FA}$; $\sigma' = \overline{F'A'}$; $f = \overline{OF}$; $f' = \overline{OF'} = -f$.

La distance focale f' est positive pour une lentille convergente (à bords minces).

Démonstration : les formules (11) et (13) s'obtiennent en utilisant le théorème de Thalès dans des triangles semblables :

– les triangles KOF′ et KMB′ conduisent à :

$$\frac{\overline{OF'}}{\overline{MB'}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{MK}}$$

– de même, avec les triangles MOF et MKB, on obtient :

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{MK}}.$$

En sommant membre à membre, on a :

$$\frac{\overline{OF'}}{\overline{MB'}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{KB}} = 1 \text{ soit } \frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

D'où, avec $f' = -f$:

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

Avec les triangles OA′B′ et OAB, on obtient :

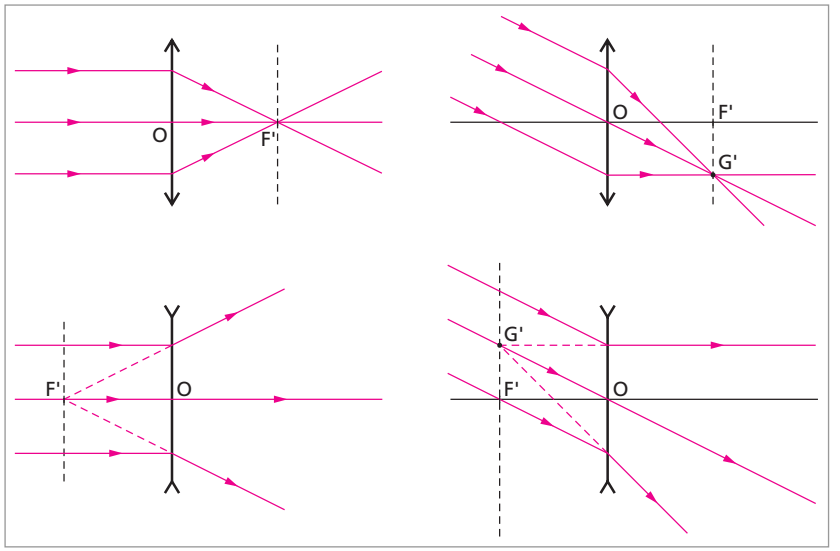
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p}$$

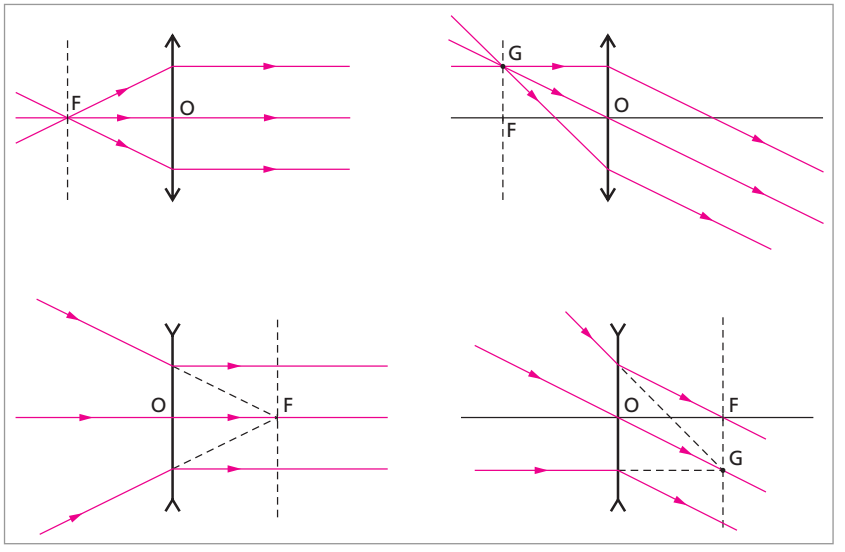
Lentilles minces. Constructions de rayons

Rappelons les trois règles essentielles de constructions :

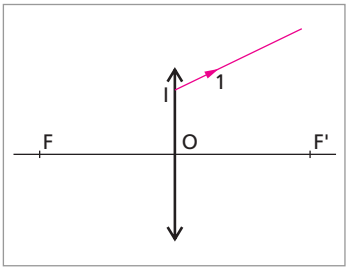
- les rayons passant par le centre optique O ne sont pas déviés ;
- à des rayons incidents parallèles correspondent des rayons émergents se coupant dans le plan focal image ;
- à des rayons incidents se coupant dans le plan focal objet correspondent des rayons émergents parallèles.

Attention : les foyers d'une lentille divergente sont virtuels. Ces règles sont illustrées sur les figures suivantes.

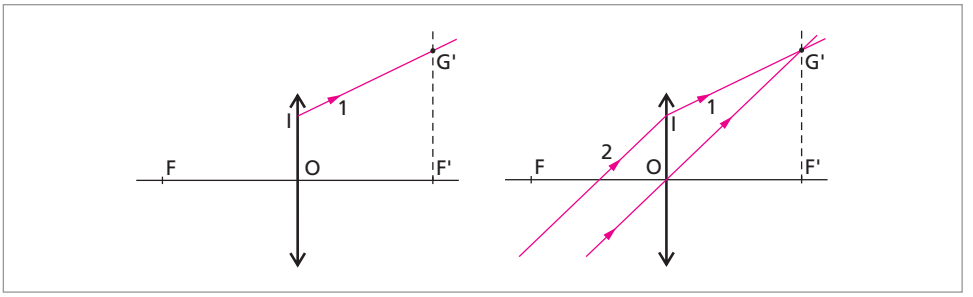




Exemple : on se propose de tracer le rayon incident correspondant au rayon émergent **1**.

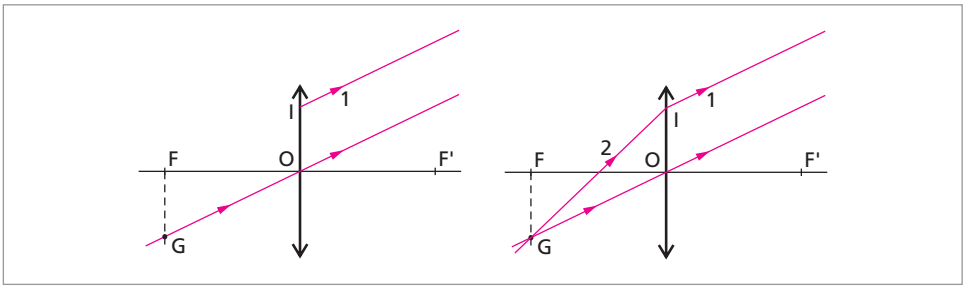


a) Première méthode



- Le rayon **1** coupe le plan focal image en G′.
- On construit alors OG′. Le rayon incident cherché **2** est parallèle à OG′ et passe par I.

b) Deuxième méthode



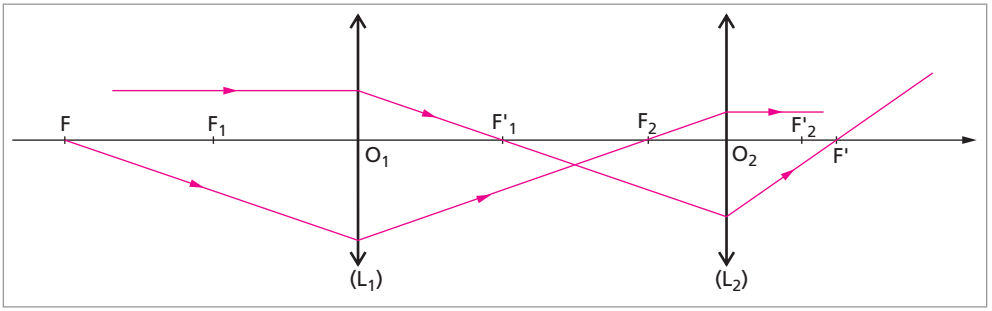
- On construit le rayon parallèle à **1** et passant par O.
- Ce rayon coupe le plan focal objet en G.

Le rayon cherché est GI.

Associations de lentilles minces. Doublets

Lentilles minces accolées : la vergence du système est la somme des vergences : $C = C_1 + C_2$. (Formule de Gullstrand, équation (8), avec $e = 0$).

Lentilles minces non accolées : de tels systèmes sont utilisés, par exemple, dans les téléobjectifs ou les oculaires.



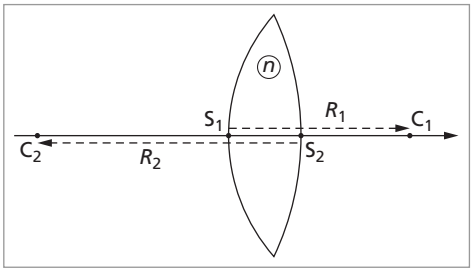
Exemple : étudions le doublet de la figure ci-dessus en posant $e = \overline{O_1O_2}$ et $\overline{F'_1F_2} = \Delta$. Les distances focales de chacune des lentilles étant supposées connues ainsi que la distance e, on place en premier lieu les éléments principaux du système. F′ est conjugué de F'_1 par rapport à (L_2). La relation de Newton s'écrit $\overline{F'_2F'}.\overline{F_2F'_1} = -f_2^2$ d'où $\overline{F'_2F'} = f_2^2/\Delta$; de même, $\overline{F'_1F_2}.\overline{F_1F} = -f_1^2$ conduit à $\overline{F_1F} = -f_1^2/\Delta$. On peut ainsi placer F et F′.

D'autre part, la formule de Gullstrand, $C = C_1 + C_2 - e\,C_1C_2$ permet de calculer la distance focale du doublet et donc, de placer les points principaux H et H′.

Les lentilles sphériques épaisses dans les conditions de Gauss

En appliquant la formule de Gullstrand (8) page 465 à un ensemble de 2 dioptres sphériques accolés ($e = 0$), on obtient la vergence de la lentille épaisse :

$$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (14)$$



Attention, les rayons R_1 et R_2 des deux sphères sont, ici, algébriques :

$$R_1 = \overline{S_1C_1} \quad , \quad R_2 = \overline{S_2C_2}$$

Exemples :

- pour une lentille biconvexe comme sur la figure ci-desssus, on a $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ et $C > 0$, la lentille est convergente,
- pour une lentille biconcave, on a $R_1 < 0$, $R_2 > 0$ et $C < 0$, la lentille est divergente.

➜ **Voir exercices 2 à 7**

3. QUALITÉS DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Les notions développées ci-dessous sont largement utilisées dans nombre de problèmes de concours. Elles interviennent pratiquement à coup sûr dans tout montage d'optique au CAPES.
On désigne par $A'B'$ l'image de l'objet AB donnée par l'instrument. Si cette image est virtuelle, elle est vue sous un angle α'.

3.1. Grandissement linéaire γ

C'est une quantité intéressante si AB et $A'B'$ sont réels et à distance finie :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \tag{15}$$

3.2. Puissance P (pour loupes et microscopes)

L'objet est réel et à distance finie. L'image est virtuelle. Par définition :

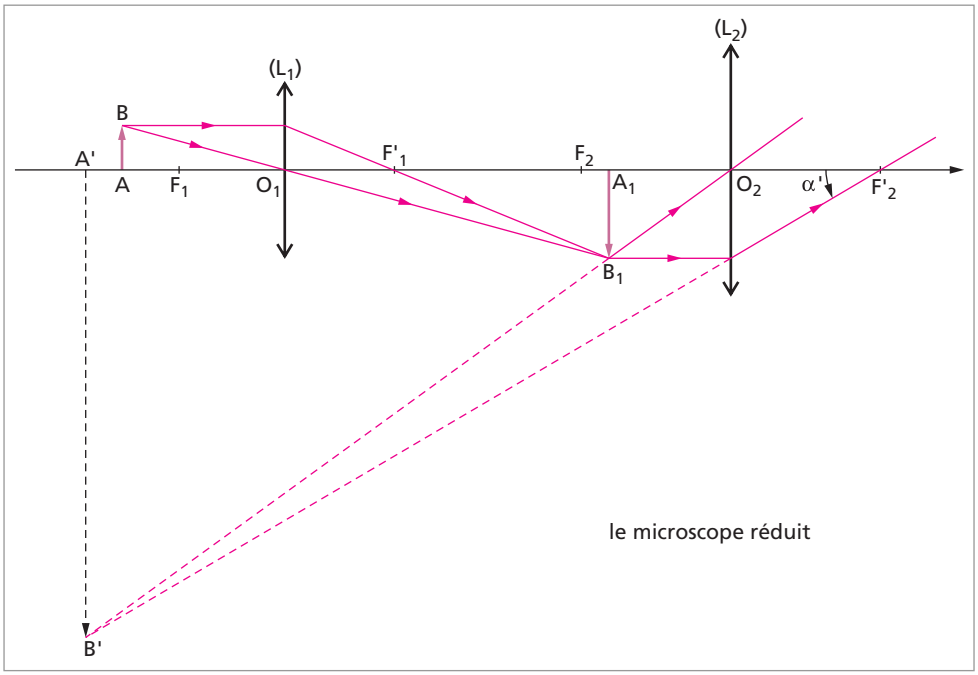
$$P = \left| \frac{\alpha'}{\overline{AB}} \right| \tag{16}$$

On définit également la **puissance intrinsèque** P_i par :

$$P_i = \left| \frac{1}{f'} \right| \tag{17}$$

Les puissances P et P_i s'expriment en dioptries δ. On a $P = P_i$ lorsque l'œil est au foyer image de l'instrument ou encore lorsque l'image est rejetée à l'infini.

Exemple : on considère le microscope réduit de la figure ci-dessous.



A_1B_1 est l'image de AB donnée par l'objectif (L_1). A_1 est situé entre F_2 et O_2 tout en étant proche de F_2. $A'B'$ est l'image définitive de AB ; c'est l'image de A_1B_1 donnée par l'oculaire (L_2).
L'œil étant placé en F'_2, la puissance P s'écrit $P = |\alpha'/AB| = |(\alpha'/A_1B_1).(A_1B_1/AB)|$ d'où :

$$P = |\gamma_1|.P_2 \qquad (18)$$

(γ_1 est le grandissement de l'objectif ; P_2 est la puissance de l'oculaire).
D'autre part, la formule de Gullstrand conduit à :

$$P_i = |1/f'| = |(1/f'_1) + (1/f'_2) - (e/f'_1f'_2)|$$

où e est, ici, égal à $\overline{O_1O_2}$. En réduisant le membre de droite au même dénominateur, on obtient :

$$P_i = \left|\frac{\Delta}{f'_1f'_2}\right| \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \overline{F'_1F_2} \qquad (19)$$

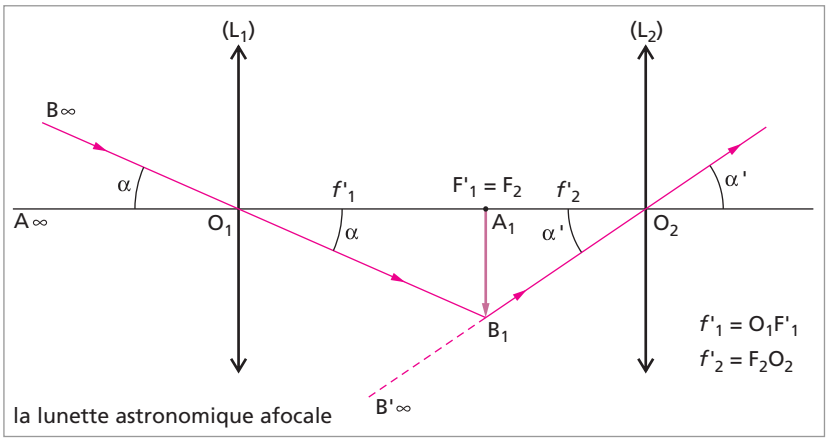
3.3. Grossissement G

– Pour les lunettes et les télescopes, le grossissement s'écrit :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \tag{20}$$

α est l'angle sous lequel l'objet est vu à l'œil nu ; c'est le diamètre apparent de l'objet.

Exemple : considérons le cas d'une lunette astronomique afocale (voir figure ci-dessous).



la lunette astronomique afocale

(L_1) est l'objectif et (L_2) l'oculaire. Le système étant afocal, les points F'_1 et F_2 sont confondus. D'autre part, les angles étant petits, on a : $\alpha' \approx A_1B_1/f'_2$ et $\alpha \approx A_1B_1/f'_1$. D'où :

$$G \approx \frac{f'_1}{f'_2} \tag{21}$$

– Pour le microscope, la définition (20) reste la même mais α désigne cette fois l'angle sous lequel l'objet est vu par l'œil à **la distance minimale de vision distincte** d_m (voir le complément sur l'œil page 485).
On a $\alpha \approx AB/d_m$; $G = \alpha'/\alpha \approx (\alpha'/AB)d_m$. D'où :

$$G = P\, d_m \tag{22}$$

On définit le **grossissement commercial** G_c en prenant $d_m = 0,25$ m, soit :

$$G_c = \frac{P}{4} \approx \frac{P_i}{4} \approx \frac{1}{4f'} \tag{23}$$

3.4. Champ

Le champ d'un instrument d'optique est la portion d'espace visible à travers l'instrument. Plus précisément, c'est l'ensemble des points objets tels que :

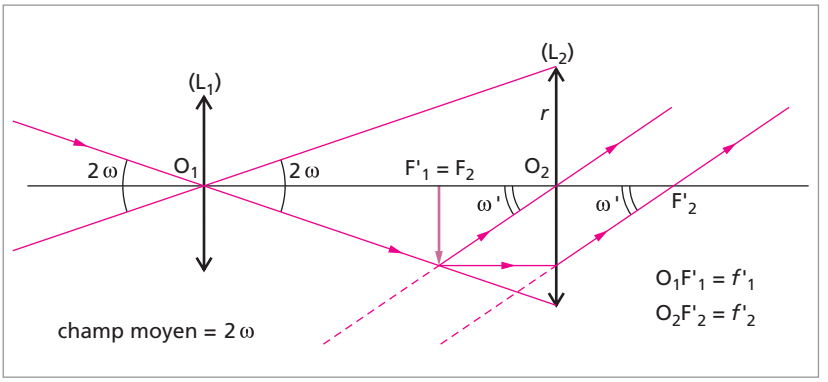
- des rayons lumineux issus de ces points traversent l'instrument pour parvenir au récepteur (œil de l'observateur, plaque photographique, écran,. . .)
- les qualités des images de ces points (éclairement, netteté) sont suffisantes dans les conditions d'emploi de l'instrument.

Le champ est donc un volume. Si l'instrument d'optique est un système centré, on distingue :

- le champ en largeur ou champ transversal
- le champ en profondeur ou champ longitudinal ou axial.

i) Le champ en largeur
C'est le champ dans un plan de front objet. Il est caractérisé par son rayon si ce plan est à distance finie ou par son diamètre apparent si ce plan est à l'infini.

Exemple : pour une lunette astronomique afocale, (L_1) joue le rôle de *diaphragme d'ouverture* et (L_2) le rôle de *diaphragme de champ*.



Pour cet instrument, le plan objet est pratiquement à l'infini et le champ transversal est caractérisé par son diamètre apparent. Comme l'indique la figure ci-dessus, les rayons lumineux pénétrant dans (L_1) ne doivent pas être trop inclinés par rapport à l'axe optique sinon ils ne seront pas captés par (L_2). C'est donc bien (L_2) qui limite le champ en largeur. On définit le **champ moyen** 2ω comme l'angle sous lequel l'oculaire (L_2), de diamètre $2r$, est vu du centre O_1 de l'objectif.
Pour le grossissement, on a $G = \omega'/\omega$ d'où :

$$2\omega = \frac{2\omega'}{G} \approx \frac{2r}{f_2'}.\frac{1}{G} = \mathrm{K}.\frac{1}{G} \qquad (24)$$

où la grandeur K ne dépend que de l'oculaire. Cela montre que :
Pour un oculaire donné, le champ de la lunette est inversement proportionnel à son grossissement.

ii) Le champ en profondeur.
Le champ en profondeur est limité par les plans de front extrêmes entre lesquels il faut placer l'objet si l'on veut en obtenir une image nette à travers l'instrument.

ii.1) instrument objectif.
Le récepteur d'image a une structure discontinue, en grains (plaque photographique, écran, . . .). Il suffit que l'image d'un objet ponctuel soit une tache dont la taille n'excède pas celle du grain. On peut donc faire varier la distance objet-instrument tout en restant dans certaines limites (voir l'exercice 4 page 487 sur l'appareil photographique).

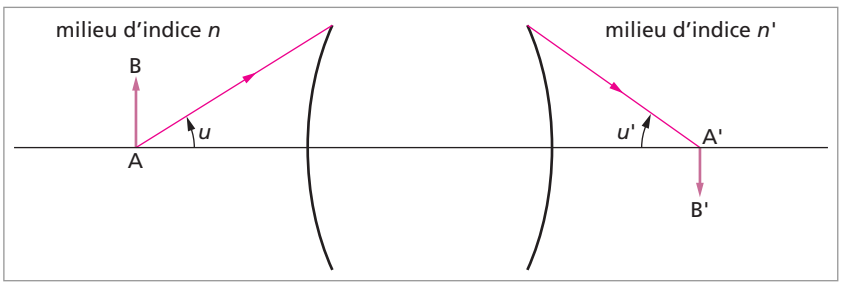
ii.2) instrument subjectif (l'image est virtuelle).
L'œil et sa faculté d'accomodation entrent en jeu. L'image donnée par l'instrument doit se trouver entre les limites de vision distincte (voir le complément sur l'œil page 485). Là aussi, on a une certaine latitude pour faire varier la position de l'objet. On parle alors de profondeur d'accomodation.

3.5. Pouvoir séparateur. Limite de résolution

Ces deux grandeurs varient en sens inverse. Le pouvoir séparateur quantifie l'aptitude d'un instrument à séparer les détails d'un objet.
La limite de résolution correspond à la plus petite distance de 2 points ou de 2 traits parallèles que l'instrument peut séparer. Le pouvoir séparateur est essentiellement limité par :

- les aberrations ;
- la structure granulaire du récepteur (par exemple, la rétine) ;
- la diffraction (voir l'exercice 7 page 490 où ce qui suit sera démontré explicitement dans le cas du microscope).

Même quand le stigmatisme est réalisé, l'image d'un point A n'est pas, *en réalité*, un point A′ mais une tache de diffraction de centre A′ et de rayon $|0,6\lambda/(n' \sin u')|$.



Deux images A′ et B′ seront séparées si, d'après le *critère de Rayleigh*, on a $A'B' \geqslant |0,6\lambda/(n' \sin u')|$. Or la condition d'aplanétisme s'écrit $n\,\overline{AB}\,\sin u = n'\,\overline{A'B'}\,\sin u'$.

D'où l'on déduit la limite de résolution δ d'un instrument à optique parfaite :

$$AB \geqslant \delta = \frac{0,6\lambda}{n \sin u} \tag{25}$$

La quantité $n \sin u$ est l'ouverture numérique de l'objectif.

Remarque : Si l'objet est à l'infini, on considère la limite de résolution angulaire

$$\alpha = \frac{0,6\lambda}{n\,R} \qquad \text{où } R \text{ est le rayon de l'objectif.} \tag{26}$$

Pour une lunette astronomique, appareil subjectif, on définit le grossissement utile G_u par : $G_u = \alpha'/\alpha$ où α' est l'acuité visuelle (≈ 3 ou 4.10^{-4} rad) et où α est donné par la relation (26).

Pouvoir de résolution d'un spectroscope à prisme

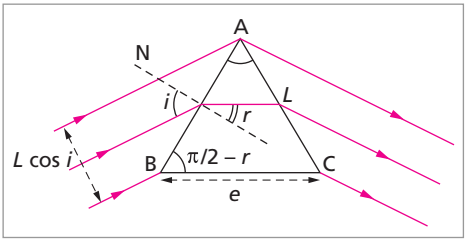
L'indice n d'un verre dépend de la longueur d'onde λ. Un prisme permettra de séparer des lumières de longueurs d'ondes différentes. Toutefois, son pouvoir de résolution R est limité par :

- la **diffraction**.
- la **largeur Δy de la fente-source** (cet aspect est étudié dans l'exercice 8 page 496). On montre alors que si les effets de diffraction sont négligés, on a, *au minimum de déviation* :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 2 \tan i \, \frac{f_1'}{\Delta y} \, \frac{d(\ell n\, n)}{d(\ell n\, \lambda)} \tag{27}$$

$\Delta\lambda$ est la limite de résolution en longueur d'onde ; f_1' est la distance focale du collimateur.

Exemple : calculons le pouvoir de résolution R du prisme dans le cas où la fente-source est supposée infiniment fine et l'optique parfaite.



La figure représente le prisme réglé au minimum de déviation pour une certaine longueur d'onde λ. On pose $L = AB = AC$ et $e = BC$. Rappelons d'abord les formules du prisme :

$$\sin i = n \sin r \; ; \; \sin i' = n \sin r' \; ; \; r + r' = A \; ; \; D = i + i' - A \tag{28}$$

Au minimum de déviation, on a

$$i = i' \; ; \; r = r' = \frac{A}{2} \tag{29}$$

Un ensemble de radiations de longueurs d'ondes voisines de λ éclairent le prisme toutes avec la même incidence i. En différentiant les équations (28) avec i et A constants,

on obtient :

$$0 = \mathrm{d}n\ \sin r + n\cos r\ \mathrm{d}r \tag{30}$$

$$\cos i'\ \mathrm{d}i' = \mathrm{d}n\ \sin r' + n\cos r'\ \mathrm{d}r' \tag{31}$$

$$\mathrm{d}r + \mathrm{d}r' = 0 \tag{32}$$

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}i' \tag{33}$$

Pour chacune des radiations, les relations (29) restent vraies de manière approchée. Des équations ci-dessus, on déduit :

$$\cos i\ \mathrm{d}i' = 2\ \mathrm{d}n\ \sin r \tag{34}$$

$$\text{soit :}\quad \mathrm{d}D = \frac{2\mathrm{d}n\sin r}{\cos i} = \frac{\mathrm{d}n(2\sin r\cos r)}{\cos i\ \cos r} = \mathrm{d}n\frac{\sin A}{\cos i\ \cos r} \tag{35}$$

En utilisant la relation ci-dessous, valable dans un triangle quelconque :

$$\frac{e}{\sin A} = \frac{L}{\sin(\pi/2 - r)} = \frac{L}{\cos r} \tag{36}$$

on a finalement :

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}n\frac{e}{L\cos i} \tag{37}$$

D'autre part, la largeur angulaire de la tache de diffraction est donnée par $\alpha = \lambda/(L\cos i)$ car la lumière est diffractée par une fente de largeur $L\cos i$. Deux longueurs d'onde seront séparées si, d'après le critère de Rayleigh, $\mathrm{d}D \geqslant \alpha$. La limite de résolution est atteinte lorsque l'égalité est réalisée. On a alors :

$$\mathrm{d}n\ \frac{e}{L\cos i} = \frac{\lambda}{L\cos i} \tag{38}$$

On en déduit le pouvoir de résolution du spectroscope si la fente-source est très fine :

$$R = \frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = e\ \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \qquad \text{où } e \text{ est la longueur de la base du prisme.} \tag{39}$$

➜ **Voir exercices 4 à 8**

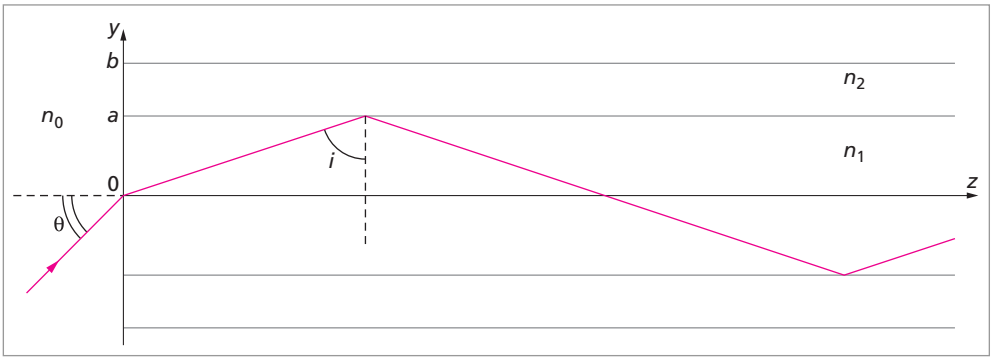
4. Fibres optiques

Cette partie, d'une grande importance aussi bien pour l'écrit que pour l'oral du CAPES, peut toutefois être sautée en première lecture vu son caractère plus spécialisé.
Une fibre optique est un guide d'ondes cylindrique dans lequel la lumière (ou un rayonnement infrarouge), convenablement injectée à une extrémité, reste confinée au cours de sa propagation.
On distingue :

- les fibres à saut (ou échelon) d'indice
- les fibres à gradient d'indice.

Dans ce qui suit, on utilisera l'optique géométrique, ce qui suppose que les diverses longueurs caractérisant la fibre sont très supérieures à λ.

4.1. Fibres à saut d'indice



Le schéma représente le plan méridien d'une fibre à saut d'indice d'axe Oz. La région $|y| < a$ est le *cœur* de la fibre, d'indice n_1 constant. La région $a < |y| < b$ est la *gaine*, d'indice n_2 tel que $1 < n_2 < n_1$. On pose :

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \tag{40}$$

En général $\Delta \ll 1$; Δ est de l'ordre de 10^{-2}. La propagation de la lumière se fait par réflexions totales successives en $y = \pm a$. Ceci implique que $\theta < \theta_a$ avec :

$$n_0 \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{41}$$

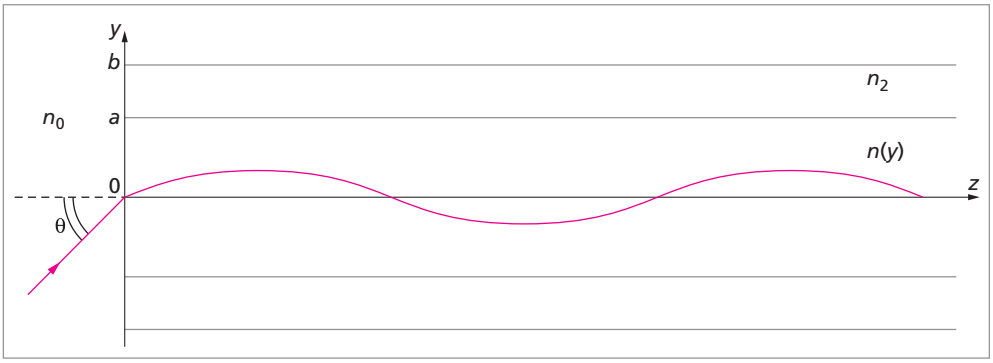
θ_a est l'**angle d'acceptance** de la fibre ; $n_0 \sin \theta_a$ est l'**ouverture numérique** (O.N.) de la fibre ($n_0 = 1$ en général). La puissance lumineuse qui peut être injectée dans la fibre croît avec son ouverture numérique.

4.2. Fibres à gradient d'indice

Dans une fibre à gradient d'indice, l'indice n du cœur varie continûment avec y. Le plus souvent, la fonction $n(y)$, le **profil d'indice**, est de la forme :

$$n = n_1 \left(1 - \Delta \left|\frac{y}{a}\right|^{\alpha}\right) \quad \text{si} \quad |y| < a \tag{42}$$

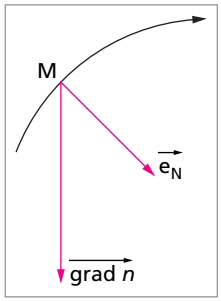
Δ est défini par (40). $\alpha = 2$ correspond à un **profil d'indice parabolique**.
Dans la gaine, l'indice n est constant et égal à n_2 avec $1 < n_2 < n_1$.
Dans de telles fibres, la réflexion totale se fait par « effet de mirage », *le rayon lumineux s'incurvant vers la région d'indice élevé*. Pratiquement, la trajectoire lumineuse, *approximativement une sinusoïde*, reste confinée au voisinage de l'axe de la fibre qui est la région d'indice maximal.



L'étude de la propagation de la lumière dans un milieu transparent **inhomogène** conduit à la relation

$$\vec{e}_N \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, n = \frac{n}{R} > 0$$

où $\vec{e}_N$ est le vecteur unitaire porté par la normale principale au rayon lumineux et R le rayon de courbure (R est positif).
Les vecteurs $\vec{e}_N$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$ formant un angle aigu, **la concavité du rayon est toujours tournée dans le sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$ donc des indices croissants.**



Remarque : au voisinage d'un sol très chaud, la température de l'air diminue quand on s'éloigne du sol, ce qui entraîne une augmentation de la masse volumique ρ de l'air ainsi que de l'indice n d'après la Loi de Gladstone ($(n-1)/\rho =$ constante). Il en résulte un rayon lumineux à concavité tournée vers le haut. C'est le phénomène de mirage inférieur. Le phénomène est inversé si le sol est plus froid que l'air. On parle alors de mirage supérieur.

4.3. Fibres multimodes. Fibres monomodes

Une fibre optique est un guide d'ondes. On sait que, du fait des conditions aux limites imposées par les parois du guide, n'importe quelle vibration ne peut pas s'y propager. Les vibrations particulières qui satisfont aux conditions aux limites sont les **modes** de propagation du guide.
En termes d'optique géométrique, nous dirons que seuls certains rayons peuvent exister dans la fibre : ceux qui correspondent aux modes de la fibre et qui sont en nombre fini.
Les fibres **multimodes** pour lesquelles N, le nombre de modes, est supérieur à 1 (en général, N est grand pour de telles fibres) ont un rayon de cœur a grand devant λ (typiquement a est de l'ordre de 25 à 50 μm).

En revanche, pour une fibre **monomode**, a est de l'ordre de λ donc, au plus, de quelques microns. Dans ce cas, l'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable.

4.4. Dispersion

À l'entrée de la fibre, les signaux à transmettre sont presque toujours codés sous forme numérique c'est-à-dire constitués de trains d'impulsions. Celles-ci sont d'autant plus étroites que le débit d'information est élevé.
La dispersion se traduit par un élargissement des impulsions au cours de leur propagation donc par une limitation du débit d'information - ou de la bande passante - de la fibre.
On distingue **la dispersion intermodale** et **la dispersion chromatique**.

La dispersion intermodale

Elle provient du fait que v_g (vitesse de groupe) dépend du mode de propagation utilisé.
Dans le langage de l'optique géométrique, nous dirons que le temps t mis par la lumière pour parcourir une longueur l de fibre dépend de l'inclinaison des rayons par rapport à l'axe de la fibre.
Si δt est l'écart de temps de trajet entre les modes extrêmes, on montre que :
$\frac{\delta t}{t} \simeq \Delta$ pour une fibre à saut d'indice ;
$\frac{\delta t}{t} \simeq \frac{1}{2}\Delta^2$ pour une fibre à profil d'indice parabolique.
Δ étant de l'ordre de 10^{-2}, on comprend l'intérêt des fibres à gradient d'indice. $\frac{\delta t}{t}$ est considérablement réduit pour de telles fibres car les rayons s'écartant le plus de l'axe de la fibre vont parcourir des distances plus grandes mais dans des régions d'indice plus faible (donc à une vitesse plus grande), d'où une compensation partielle.

> ***Remarque :*** les performances des fibres multimodes sont essentiellement limitées par la dispersion intermodale. Par contre, celle-ci n'existe évidemment pas dans les fibres monomodes.

La dispersion chromatique

Elle a elle-même deux causes :

- le matériau constituant la fibre est dispersif,
- un guide d'ondes est, par lui-même, dispersif (même si le milieu de propagation ne l'est pas). Ceci provient des conditions aux limites sur les parois. On parle alors de **dispersion intramodale**.

Par un ajustement convenable des paramètres de la fibre (a, Δ), la dispersion chromatique peut être rendue très faible.
Les fibres monomodes ont donc des capacités de transmission très élevées (de l'ordre d'une centaine de Gbits.s^{-1}.km).

Remarque : *la capacité de transmission* C *s'exprime en bits.s*$^{-1}$*.km. Ceci signifie que 2 impulsions très étroites émises aux instants* t *et* t + 1/C *à l'entrée de la fibre seront encore séparées après avoir parcouru* 1 *km de fibre malgré l'élargissement dû à la dispersion.*

4.5. Pertes. Coefficient d'atténuation linéique

L'intensité lumineuse décroît au cours de la propagation de l'onde dans la fibre. Les pertes ont deux origines : **l'absorption et la diffusion**.

a) La principale cause d'absorption est due aux vibrations des ions OH^-, qui apparaissent lors de la fabrication de la fibre (absorption dans le visible et l'infrarouge ; les longueurs d'ondes choisies pour les télécommunications : 0, 8µm, 1, 3µm et 1, 5µm correspondent à des minima dans ce spectre d'absorption). La silice présente également des bandes d'absorption dans l'infrarouge (vibrations moléculaires).

b) La diffusion peut être, soit intrinsèque au matériau du cœur (diffusion Rayleigh résultant de fluctuations d'indice et entraînant des pertes en λ^{-4}) soit due à l'existence de centres diffusants (bulles, microfractures,...).

Le coefficient d'atténuation linéique α est donné par :

$$\alpha\ (\text{dB/km}) = \frac{10}{L(\text{km})} \log \frac{P_i}{P_s} \tag{43}$$

P_i est la puissance injectée, P_s la puissance sortant de la fibre de longueur L .

D'après ce qui précède, α dépend de la longueur d'onde. Typiquement, α est de l'ordre de 0, 2 dB/km.

Cela dit, la transmission à longue distance ne peut se faire avec une fibre unique. On utilise des *répéteurs* : stations relais qui reçoivent le signal dégradé, le remettent en forme et le réinjectent dans la fibre suivante. Par exemple, une perte de 0, 5 dB/km nécessite un répéteur tous les 50 km.

4.6. Matériau utilisé. Procédé de fabrication

Le matériau de base est la **silice** SiO_2. Pour réaliser les profils d'indice souhaités, on y introduit des dopants qui vont modifier n (le germanium et le phosphore augmentent l'indice, le fluor le diminue).

Une des techniques utilisées consiste à partir d'une préforme (tube de silice creux) à l'intérieur de laquelle on injecte les gaz dopants. Le tube est chauffé par un chalumeau oxhydrique qui se déplace le long de celui-ci. En contrôlant la température, on contrôle la diffusion des dopants dans la silice donc le profil d'indice. En étirant ensuite la préforme, on réalise une fibre à gradient d'indice.

Cette méthode permet de réaliser des fibres optiques de très grandes longueurs (typiquement de l'ordre d'une centaine de km).

4.7. Utilisation et intérêt des fibres optiques

Citons les utilisations dans les endoscopes (pour examiner des cavités d'accès difficile), les capteurs, et, surtout, les *télécommunications* où elles présentent de nombreux avantages : très grand débit d'information ; insensibilité aux parasites électromagnétiques ; aucun rayonnement vers l'extérieur (discrétion des communications !) ; légèreté, souplesse, faible encombrement,...

➜ **Voir exercices 9**

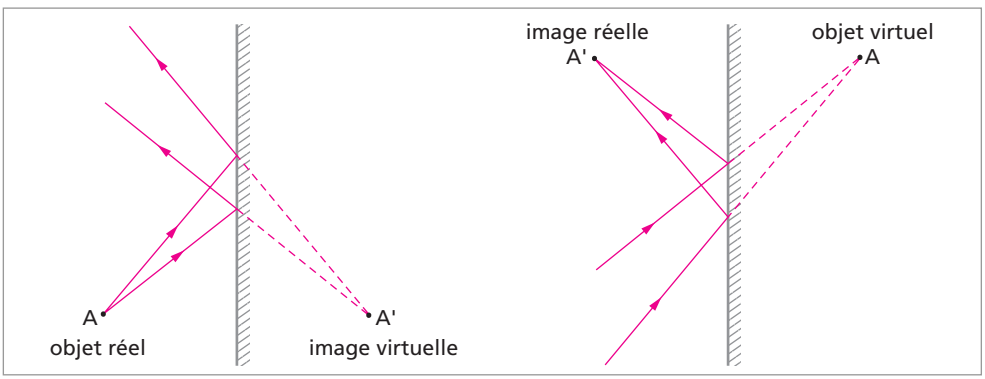
5. Compléments

Les miroirs sont enseignés au lycée en classe de première, de même que l'œil et, aussi, le rétroprojecteur, qui associe lentilles et miroirs. Ces compléments doivent donc être étudiés avec toute l'attention qui convient.

5.1. Miroirs

Le miroir plan

C'est le seul instrument d'optique qui soit rigoureusement stigmatique pour tout point objet. Il donne d'un objet réel une image virtuelle et d'un objet virtuel une image réelle.

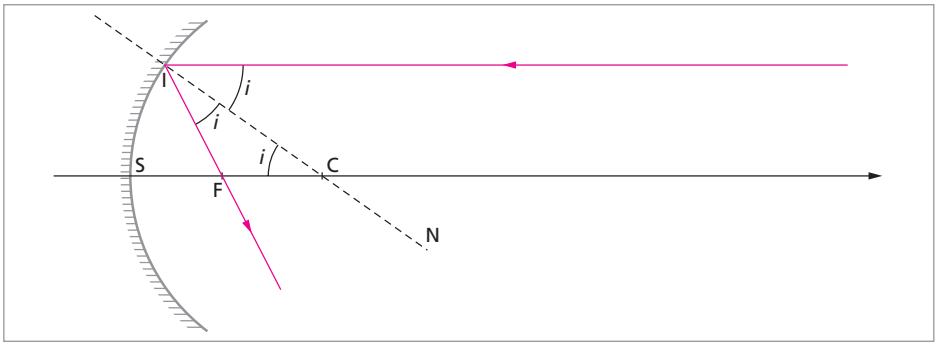


A et A′ sont symétriques par rapport au miroir.

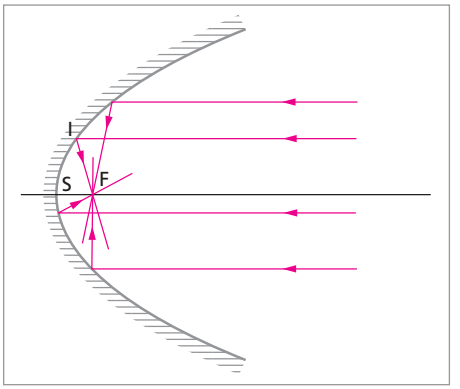
Le miroir sphérique dans les conditions de Gauss

Comme dans cas du dioptre sphérique, les points principaux sont confondus avec S. D'après la figure, $FC = IF \approx SF$ si l'on ne considère que les rayons très proches de l'axe optique. Le foyer F est donc au milieu de SC et pour la distance focale on a : $\overline{SF} = f = f' = R/2$ (R = rayon du miroir).

A et A′ étant deux points de l'axe conjugués par rapport au miroir, on a la formule de conjugaison $(1/p') + (1/p) = (1/f)$ avec $p = \overline{SA}$, $p' = \overline{SA'}$.



Pour le grandissement linéaire, on a $\gamma = -p'/p$.
Remarquons que si R tend vers l'infini dans les relations ci-dessus alors $1/f = 0$, ce qui entraîne $p' = -p$ et $\gamma = 1$. On retrouve le miroir plan.



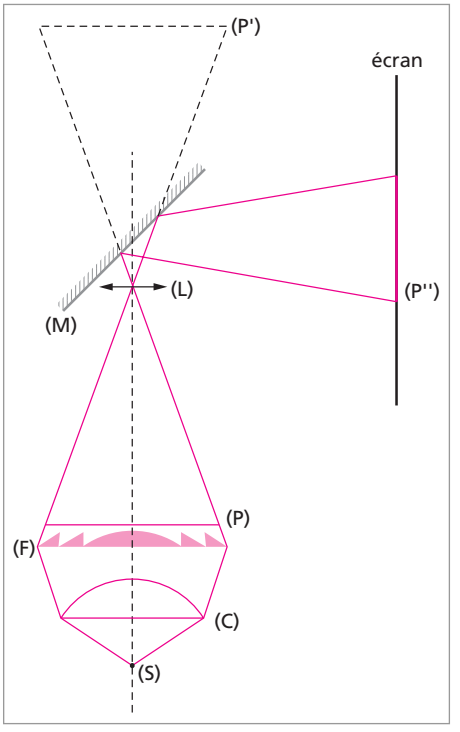
Le miroir parabolique

Il est **rigoureusement stigmatique pour le couple de points** (F, **point à l'infini sur l'axe**) (propriété de la parabole, I n'est pas forcément proche de S).
Ce type de miroir est utilisé dans les télescopes qui sont constitués essentiellement d'un miroir parabolique (l'objectif) et d'un oculaire qui joue le rôle de loupe.

5.2. Rétroprojecteur

Le rétroprojecteur est constitué de :

- (S), source de lumière de forte puissance (250 watts)
- (*C*), condenseur (lentille plan convexe de courte distance focale)
- (F), lentille à échelons de Fresnel jouant également le rôle de condenseur
- (P), plaque de verre sur laquelle sont disposés les documents
- (L), lentille de projection qui donne de (P) une image réelle (P′)



– (M), miroir (ou prisme à réflexion totale) qui donne de (P′) l'image définitive *réelle* (P″) sur l'écran ((P′) joue le rôle d'objet *virtuel* pour le miroir).

Le condenseur (C) et la lentille de Fresnel (F) permettent de faire une image de la source (S) au voisinage de la lentille (L). Toute la lumière émise par (S) est donc collectée par (L) et contribue à la grande luminosité de l'image définitive sur l'écran.

5.3. Grandeurs photométriques

1) Flux lumineux à travers une surface (S). Unité : le lumen.

C'est la puissance lumineuse P traversant (S). 1 lumen = 1 W.

2) Éclairement $E_{(O)}$ d'une surface (S) en un point O. Unité : le lux.

$$E_{(O)} = \frac{dP}{dS} \tag{44}$$

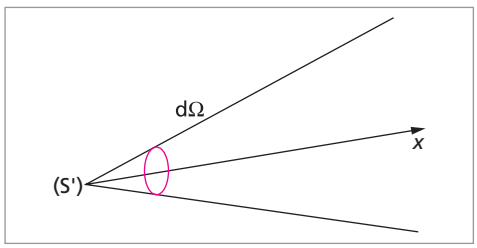
dP est la puissance reçue par l'élément de surface dS entourant O. 1 lux = 1 W/m^2.

3) Émittance d'une source (S′). Unité : le watt W. C'est la puissance totale émise par la source dans tout l'espace qui l'entoure.

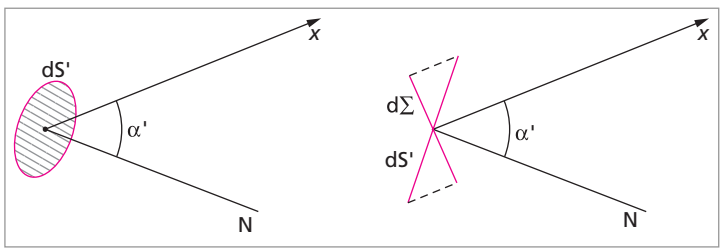
4) Intensité I d'une source ponctuelle (S′) dans une direction donnée S′x.
Unité : la candela cd.

$$I = \frac{dP}{d\Omega} \tag{45}$$

dP est la puissance lumineuse émise par (S′) dans l'angle solide $d\Omega$. 1 cd = 1 W/sr.



5) Luminance (ou brillance) L d'une source étendue (S′). Unité : le nit nt.

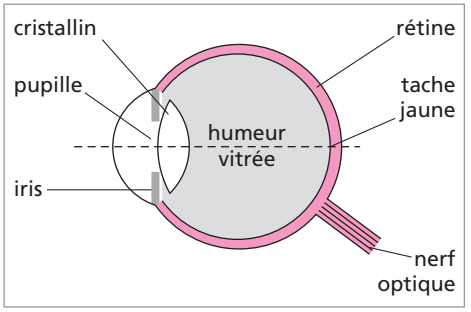


$$L = \frac{dI}{d\Sigma} \tag{46}$$

$d\Sigma$ est la surface apparente de la source dans la direction $S'x$ ($d\Sigma = dS' \cos\alpha'$). dI est l'intensité lumineuse émise par dS' dans la direction $S'x$. 1 nt = 1 cd/m^2 = 1 W/sr/m^2.

Propriété : **Si la luminance d'une source est indépendante de la direction, on dit que la source obéit à la Loi de Lambert.**

5.4. L'œil

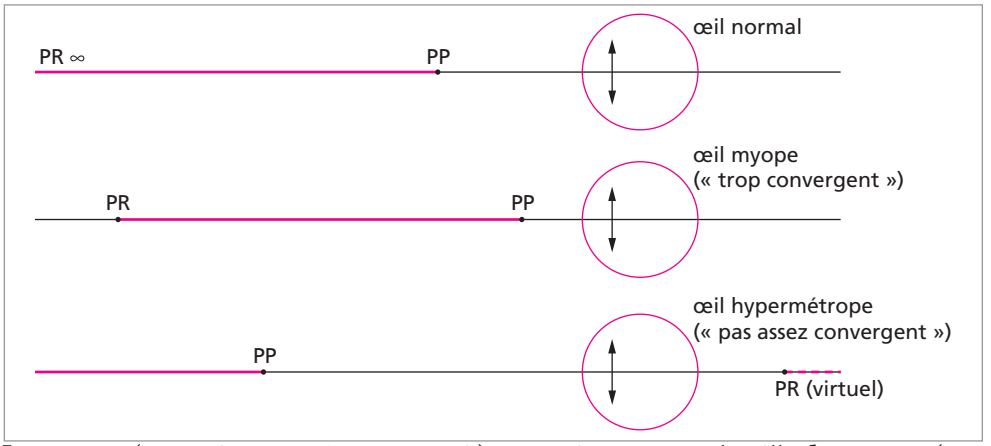


Pour qu'elle soit vue nettement, l'image d'un objet doit se former dans la région de la **tache jaune** *(fovéa)*. Les liquides qui baignent le cristallin ont un indice $n \approx 4/3$. Le cristallin, lentille biconvexe, a un indice légèrement supérieur. Le plan focal image de l'œil (**normal**) au repos contient la tache jaune.

Accomodation : augmentation de la vergence de l'œil (augmentation des courbures des faces du cristallin).

Punctum proximum (PP) : point de l'axe optique que l'œil voit nettement en accomodant au maximum. (Voir figure ci-dessous). Sa distance d_m à l'œil est la distance minimale de vision distincte.

Punctum remotum (PR) : point de l'axe que l'œil voit nettement sans accomoder. Sa distance D_m à l'œil est la distance maximale de vision distincte.
Pour un œil normal $d_m = 0,25$ m, $D_m = \infty$. Le punctum remotum est à l'infini et l'observation d'objets très éloignés se fait sans fatigue.



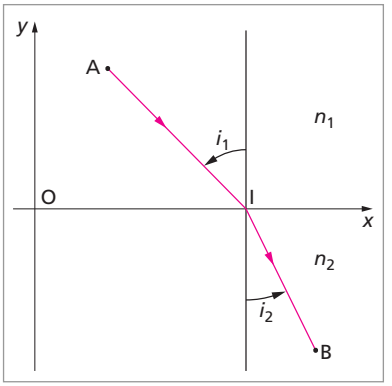
La **myopie** (respectivement *l'hypermétropie*) est corrigée par une lentille **divergente** (respectivement *convergente*) qui donne du point à l'∞ une image au punctum remotum. La **presbytie** est la diminution de la faculté d'accomodation due au vieillissement de l'œil ; elle est corrigée par une lentille convergente. Un œil **astigmate** n'a pas la symétrie de révolution.
La rétine a une structure discontinue, granulaire. Deux points objets trop proches l'un de l'autre ayant leur image sur un même élément rétinien (ou même sur 2 éléments adjacents) ne pourront être séparés. La **limite de séparation** (ou pouvoir séparateur ou encore acuité visuelle) de l'œil est la plus petite distance angulaire ϵ de deux points séparés par l'œil ; typiquement : $\epsilon \approx 4.10^{-4}$ rad.

ÉNONCÉS

Exercice 1 Principe de Fermat. Réfraction

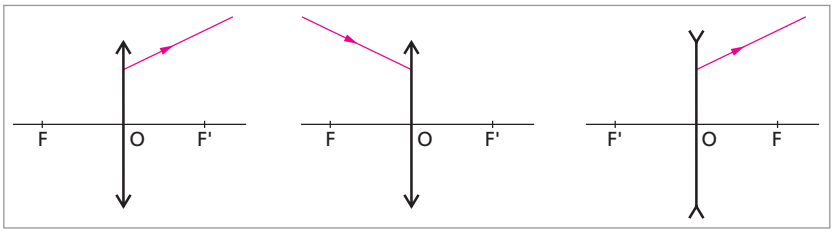
1. Exprimer le chemin optique (AIB) en fonction des indices n_1 (du milieu $y > 0$) et n_2 (du milieu $y < 0$) et des coordonnées des points A, I et B.

2. En appliquant le principe de Fermat, montrer que l'on a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ pour le rayon lumineux qui va effectivement de A à B.

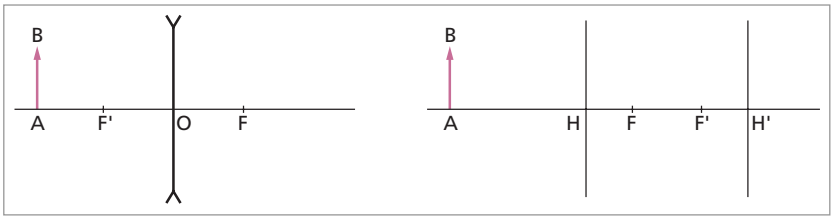


Exercice 2 Rayons et images

1. Compléter le tracé des rayons.



2. Construire l' image de l'objet AB dans les deux cas suivants.



Exercice 3 Doublet

Un système centré est formé de deux lentilles minces convergentes de centres optiques O_1 et O_2 distants de $O_1O_2 = e = 40$ cm. Pour en déterminer les éléments cardinaux, on fait les expériences suivantes :

a. un objet placé à 10 cm en avant de O_1 donne une image réelle renversée, égale à l'objet, placée à 10 cm en arrière de O_2 ;

b. un objet placé à 20 cm en avant de O_1 donne une image réelle droite égale à l'objet et située à 20 cm en arrière de O_2.

1. Déduire de ces données les éléments cardinaux du système. Quelle est sa nature ? Où se forme l'image d'un objet très éloigné, de diamètre apparent 2 degrés ? Quel est son sens et sa grandeur ?

2. Quelle est la distance focale de chaque lentille ? Sachant qu'elles sont plan-convexes et d'indice $1,5$, quel est le rayon de leur face courbe ?

3. Les deux lentilles étant faites du même verre, on considère successivement 2 radiations λ_A et λ_B pour lesquelles les indices de ce verre sont $n_A = 1,50$ et $n_B = 1,51$. En assimilant la variation d'indice à un infiniment petit, calculer les déplacements des points cardinaux et préciser leur sens sur un graphique. Calculer la variation de la distance focale du système.

Exercice 4 Appareil photographique

1. Objectif standard : on assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente (L) de centre O et de distance focale image f'. La distance d entre (L) et l'écran (E) où se trouve la pellicule sensible est variable, ce qui permet d'effectuer la mise au point.
Sauf à la question 1.c.γ), on ne tiendra pas compte des effets de diffraction et le problème sera traité dans le cadre de l'optique géométrique.

1.a. Mise au point de l'objectif : on désire photographier des objets dont la distance à (L) varie de x à l'infini. Dans quel domaine doit pouvoir varier d ? Calculer numériquement les valeurs extrêmes, $d_{\min}$ et $d_{\max}$, lorsque $x = 60$ cm et $f' = 50$ mm.

1.b. Ouverture et temps de pose : le faisceau entrant dans la lentille est limité par un diaphragme circulaire (D) dont le diamètre D est variable afin d'intercepter plus ou moins de lumière. On appelle « ouverture relative » de l'objectif le rapport $D/f' = 1/N$ où N est le « numéro du diaphragme ». Les valeurs usuelles de N sont $2,8$; 4 ; $5,6$; 8 ; 11 et 16. Expliquer le lien de cette suite avec celle des temps d'exposition T_e (en secondes) : $1/15$; $1/30$; $1/60$; $1/125$; $1/250$ et $1/500$.

1.c. Ouverture et distance hyperfocale liée au grain : lorsque l'appareil est mis au point sur l'infini, un point A situé à distance finie sur l'axe donne, après développement, une tache due à la taille g du grain de l'émulsion de la pellicule. On prendra pour les applications numériques $g = 0,02$ mm.

1.c.α. Établir, en s'appuyant sur une figure, l'expression de la distance **hyperfocale** L_0, c'est-à-dire la distance minimale entre le point A et la lentille pour que la taille de cette tache reste inférieure à celle du grain. (Exprimer ce résultat en fonction de g, f' et N). Calculer la valeur numérique de L_0 pour $N = 2,8$ puis pour $N = 16$.

1.c.β. La profondeur de champ, P_r, est la zone de l'espace objet donnant une image nette. Quel est, qualitativement, le lien entre N et P_r ? entre P_r et f' ?

1.c.γ. Une ouverture circulaire de diamètre D diffracte dans une direction d'angle $\theta = 1,22\lambda/D$ avec ici $\lambda \approx 0,6$ µm. On souhaite opérer à $N = 11$. La considération de la diffraction peut-elle contrarier ce choix ? On rappelle $g = 0,02$ mm.

1.d. Amélioration de la profondeur de netteté

1.d.α. À partir de la mise au point sur l'infini (c'est-à-dire dans les conditions de la question 1.c)) et sans agir sur l'ouverture du diaphragme, quelle valeur, d', peut-on donner à d pour augmenter encore la profondeur de champ (c'est-à-dire diminuer L_0) ? Exprimer le résultat en fonction de f', g et N et appuyer le raisonnement sur une figure simple. Calculer numériquement d' pour $N = 2,8$ et $N = 16$.

1.d.β. Évaluer la nouvelle distance hyperfocale L'_0 en fonction de L_0 et de f'. Conclure sur le fonctionnement des « appareils sans mise au point ». Est-il nécessaire, en particulier, de mettre au point sur l'infini pour photographier un objet très éloigné ?

2. Téléobjectif

On se propose de photographier une tour AB haute de 50 m et distante de 2 km.

2.a. Encombrement de l'objectif standard : quelle serait la taille de l'image $A'B'$ sur la pellicule si la mise au point était faite avec l'objectif standard de la première partie ? Quelle serait alors la valeur numérique de « l'encombrement de l'objectif », c'est-à-dire la distance de l'objectif à la pellicule ?

2.b. Agrandissement d'un téléobjectif : pour agrandir l'image, on considère le système formé par une lentille convergente (L_1) de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 50$ mm suivie d'une lentille divergente (L_2) de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2} = -25$ mm, la distance entre les 2 lentilles étant $\overline{O_1O_2} = 31,2$ mm.

Soit $A'B'$ l'image de AB par (L_1) ; indiquer la nature de $A'B'$ pour la lentille (L_2) et préciser la position de $A'B'$ par rapport à O_2 et F_2. Faire, en vraie grandeur pour l'abscisse et en échelle dilatée pour l'ordonnée, la construction géométrique donnant l'image $A''B''$ de la tour à travers le système des 2 lentilles.

2.c. Comparaison entre un objectif standard et un téléobjectif

2.c.α. Déterminer la position de $A''B''$ par rapport à O_2, puis la taille de cette image. Comparer cette dernière à la taille de $A'B'$. Évaluer l'encombrement du téléobjectif ainsi monté.

2.c.β. Quelle serait la distance focale f'_u d'une lentille convergente unique qui donnerait de la tour la même taille d'image $A''B''$ que le téléobjectif ? Comparer son encombrement à celui calculé dans la question précédente.

Exercice 5 Lunette astronomique

Une lunette astronomique est composée d'un objectif de diamètre $2R = 10$ cm et de distance focale $f'_1 = 100$ cm et d'un oculaire qu'on assimilera à une lentille mince de diamètre $d = 2r$, de distance focale f'_2 et d'ouverture relative $d/f'_2 = 0,5$. La lunette est réglée pour la vision à l'infini.

1. Calculer la limite de résolution angulaire de la lunette si la longueur d'onde de la lumière utilisée est $\lambda = 0,56$ µm. Sachant que l'acuité visuelle est égale à 3.10^{-4} rad, calculer le grossissement utile G_u.

2. Exprimer l'angle de champ moyen 2ω en fonction du grossissement G de la lunette. Le diamètre apparent de la Lune est de $30'$; on désire que son image apparaisse en entier dans le champ de la lunette. Quelle est, dans ces conditions, la valeur du grossissement à ne pas dépasser ?

3. On choisit un oculaire de distance focale $f_2' = 2$ cm. Calculer G. Sous quel angle voit-on l'image de la Lune à travers la lunette ?

4. Déterminer le cercle oculaire en position et en grandeur.

5. On définit l'éclat e d'un astre comme la mesure de l'éclairement de l'unité de surface de la pupille d'entrée d'un système optique récepteur (objectif de lunette ou pupille de l'œil par exemple) lorsque l'axe du système est dirigé vers l'astre. Quelle relation y a-t-il entre l'éclat e et la luminance L de l'astre supposé obéir à la loi de Lambert ?
On observe à l'œil nu tour à tour la Lune d'éclat e et une étoile d'éclat $e' = e/254$. En admettant, pour simplifier, que le diamètre de la pupille de l'œil demeure le même au cours de ces deux observations, calculer le rapport F/F' des flux lumineux reçus par un élément rétinien dans les deux cas. Le diamètre apparent d'un élément, compté à partir du point nodal image de l'œil, vaut $1'$.
Même question lorsqu'on observe la Lune et l'étoile à travers la lunette. Comparer les 2 résultats.

Exercice 6 Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée comporte un objectif mince convergent de distance focale $f_1' = 15$ cm et un oculaire mince divergent, de distance focale $f_2' = -5$ cm. L'œil de l'observateur étant placé sur l'axe, on confond son centre optique et sa pupille en un point O situé à 2 cm en arrière de l'oculaire. Le rayon de sa pupille est $\rho = 3$ mm et ses limites de vision distincte $\Delta = \infty$ et $\delta = 20$ cm.

1. La lunette étant afocale, calculer le grandissement linéaire. A et A′ étant 2 points de l'axe optique, conjugués dans la lunette, calculer le rapport $\overline{F_2'A'}/\overline{F_1A}$ (F_2' : foyer image de l'oculaire, F_1 : foyer objet de l'objectif).

1.a. Quel est le grossissement G_i pour un objet à l'infini ?

1.b. Quand l'objet est à distance finie on suppose que dans l'observation à l'œil nu, l'œil et l'objet restent fixes et qu'on enlève seulement la lunette. Exprimer le grossissement ainsi défini en fonction de l'abscisse x ($= \overline{F_1A}$) de l'objet.

2. Quelles sont les positions limites des objets que l'observateur peut voir nettement à travers la lunette sans toucher au tirage $\overline{O_1O_2}$? (O_1 et O_2 sont les centres des 2 lentilles). Quelles sont les valeurs extrêmes du grossissement ?

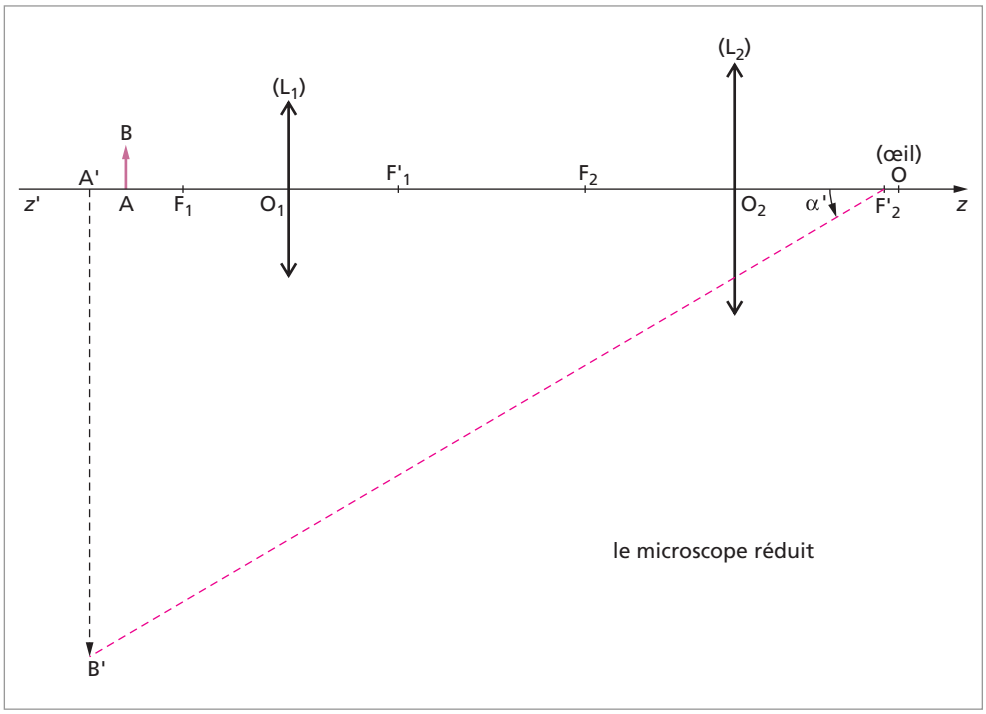
3. On suppose maintenant l'observateur myope et son *punctum remotum* à 25 cm, la position de l'œil demeurant inchangée. Quel est le tirage qui convient pour l'examen sans accomodation d'un objet situé à l'infini ?

Exercice 7 Microscope

On se propose d'étudier les limites de résolution du microscope optique (questions 1) *à* 5)*) et du microscope électronique (question* 6)*). Les angles seront comptés positivement dans le sens trigonométrique ; concernant les valeurs algébriques, les axes horizontaux seront orientés vers la droite, les axes verticaux vers le haut.*

1. Généralités
Dans les conditions de Gauss, une lentille mince, de centre O, d'axe $z'z$, donne d'un petit objet AB orthogonal à $z'z$, une image $A'B'$.

1.1. Rappeler (sans démonstration) les conditions de Gauss et les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes (origine en O).



1.2. La lentille, de distance focale image f', de foyers objet et image F, F′, est utilisée comme loupe.

1.2.a. Construire l'image $A'B'$ de AB. Établir la formule de conjugaison dite de Newton : $\overline{FA}.\overline{F'A'} = ff' = -f^2$

1.2.b. L'œil de l'observateur étant en F′, exprimer l'angle $\alpha' = \widehat{\mathrm{OF'B'}}$ en fonction de $\overline{\mathrm{AB}}$ et de f' (on notera que $\alpha' \approx \tan\alpha'$). En déduire la puissance $P_L = \left|\dfrac{\alpha'}{\mathrm{AB}}\right|$ de la loupe en fonction de f'.

2. Microscope réduit

On appelle microscope réduit l'ensemble de deux lentilles minces convergentes et coaxiales, *l'objectif et l'oculaire*, fonctionnant *a priori* dans les conditions de Gauss.

2.1. La figure ci-dessus représente le microscope réduit. L'objectif, de focale f_1', donne, d'un petit objet réel AB (A très proche de F_1), une image réelle $\mathrm{A}_1'\mathrm{B}_1'$ dont l'oculaire, de focale f_2', donne l'image virtuelle A′B′ vue par un observateur dont l'œil est en O (très proche de F_2'). On donne : diamètre de la pupille de l'œil $a_P = 3$ mm.

2.1.a. Représenter sur une figure claire les 2 lentilles ainsi que l'objet AB, ses images successives et les rayons qui ont permis de les construire. Où doit se placer le point A_1' ? Construire également, sur la même figure, le cercle oculaire du microscope, c'est-à-dire l'image de l'objectif donnée par l'oculaire.

2.1.b. On pose $\overline{\mathrm{A'O}} = d$; $\overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{F}_2} = \Delta$. On supposera par la suite que :

$$f_1' \ll f_2' \ll \Delta < d$$

et que A, A_1' et O sont, respectivement, très proches de F_1, F_2 et F_2', ce qui permettra, dans les calculs suivants, de procéder à certaines approximations que l'on justifiera.

Établir ainsi les expressions approchées :

- de $\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1'}$ en fonction de f_2' et d ;
- du grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ en fonction de Δ, d, f_1', f_2' ;
- de la puissance $P = \left|\dfrac{\alpha'}{\mathrm{AB}}\right|$ en fonction de Δ, f_1', f_2'. (α' est l'angle $\widehat{\mathrm{A'F}_2'\mathrm{B'}}$; on utilisera le fait que cet angle est petit).

A.N. $f_1' = 2$ mm ; $f_2' = 20{,}5$ mm ; $\Delta = 180$ mm ; $d = 250$ mm. Ces valeurs seront utilisables pour toutes les applications numériques suivantes.

Calculer $\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1'}$ et P.

2.2. On suppose que l'objet AB est constitué par les deux seuls points A et B. On montrera plus loin que, indépendamment de l'œil, le microscope lui-même donne de A et B deux images A′ et B′ distinctes si $\mathrm{AB} \geqslant \delta_0$; δ_0, limite de résolution du microscope, vaut $0{,}23$ μm. D'autre part, pour que A′ et B′ soient *vus* séparés, il faut que $\alpha' \geqslant \epsilon$, ϵ étant la limite de perception oculaire dans les conditions d'observation.

On va considérer le cas où $\mathrm{AB} = \delta_0$. Quelle inégalité doit vérifier la puissance P ?

Application numérique : dans les meilleures conditions on a $\epsilon = \epsilon_{\min} = 5.10^{-4}$ rad. Calculer la puissance minimale $P_{\min}$.

2.3. Le cercle oculaire du microscope (image de l'objectif donnée par l'oculaire) a pour centre Ω et diamètre a.

2.3.a. Établir les expressions approchées de :

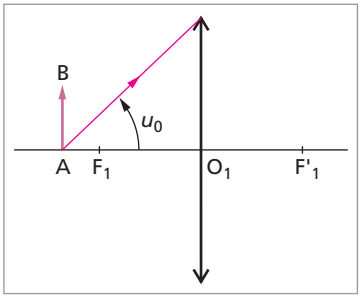
– $\overline{F'_2\Omega}$ en fonction de f'_2 et de Δ ; comparer $\overline{F'_2\Omega}$ à f'_2.

– a en fonction de f'_2, Δ et du diamètre D de l'objectif. f'_1, Δ et D étant donnés, comment varie a si P croît ?

A.N. calculer $\overline{F'_2\Omega}$. On donne $a = 1,2$ mm. Calculer D ainsi que l'angle u_0 (voir figure ci-dessous). Les conditions de Gauss sont-elles respectées ?

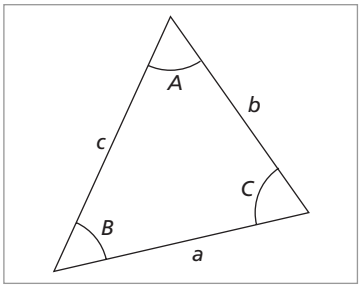
3. Le microscope réel

Pour permettre des valeurs élevées de u_0, l'objectif d'un microscope est constitué non d'une mais d'un ensemble de lentilles formées de dioptres sphériques coaxiaux *ne fonctionnant pas dans les conditions de Gauss* et qui, pourtant, sont *stigmatiques* et *aplanétiques* (ce qui signifie qu'un petit objet *plan* AB perpendiculaire à $z'z$ aura une image *plane* A_1B_1 perpendiculaire à $z'z$). L'oculaire est lui-même constitué de dioptres sphériques coaxiaux aux précédents mais fonctionnant dans les conditions de Gauss. Aucune connaissance a priori des dioptres sphériques n'est nécessaire pour traiter cette partie.

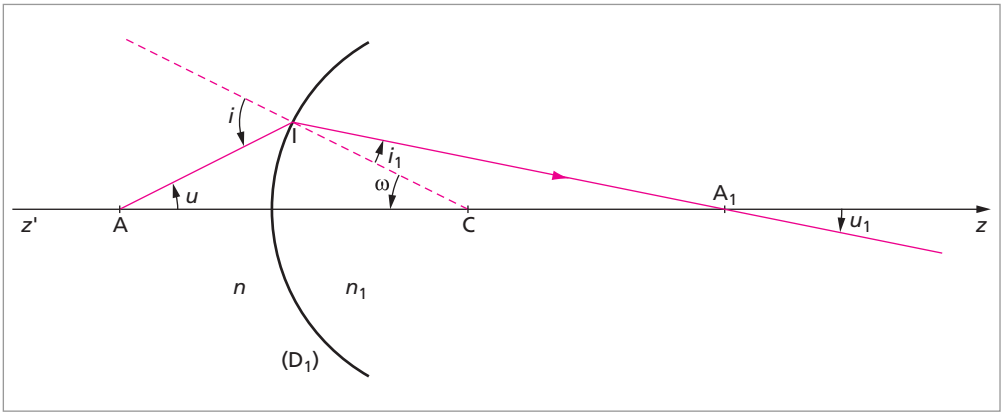


On rappelle, pour un triangle quelconque ABC, de côtés a, b, c, la relation :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad (47)$$



Soit un dioptre sphérique (D_1), de centre C, séparant deux milieux d'indices respectifs n et n_1. Le rayon incident AI donne un réfracté qui coupe l'axe $z'z$ en A_1.



3.1. En utilisant la relation (47), exprimer $\sin\omega$ en fonction de $\overline{CA}, \overline{IA}, \sin i$, puis en fonction de $\overline{CA_1}, \overline{IA_1}, \sin i_1$. En utilisant les lois de Descartes pour la réfraction en I, montrer que :

$$n\frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_1\frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1}} \tag{48}$$

(l'orientation du rayon AIA_1 est indiquée sur la figure ci-avant).

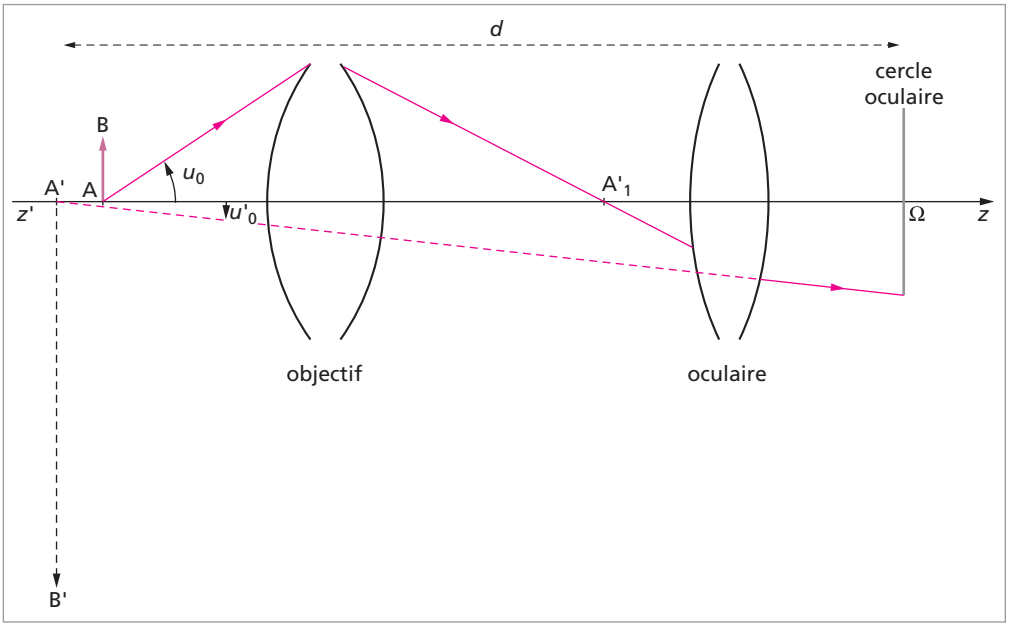
3.2. Soit A_1B_1 l'image d'un petit objet AB donnée par ce dioptre ($AB \perp z'z$). Montrer que :

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}} \tag{49}$$

Déduire des relations précédentes que :

$$n\overline{AB}\sin u = n_1\overline{A_1B_1}\sin u_1 \tag{50}$$

4. Soit un microscope donnant de l'objet AB (immergé dans un liquide transparent d'indice n) l'image $A'B'$ (située dans l'air, d'indice $n' = 1$).



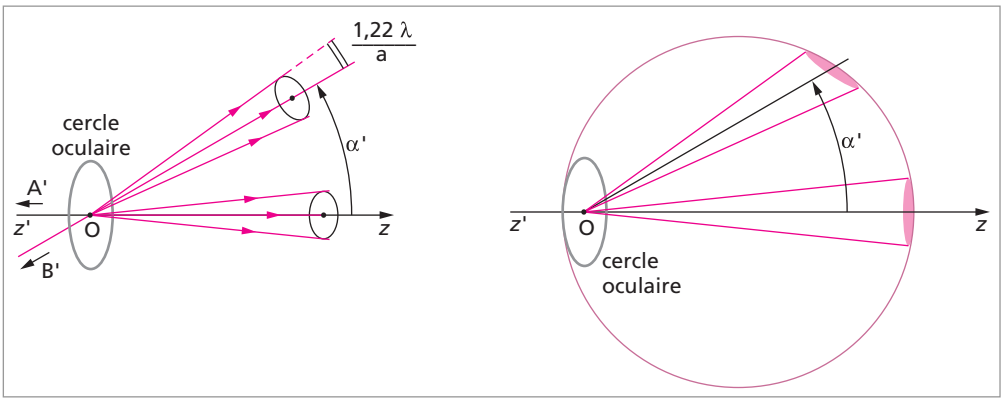
4.1. Déduire de (50) la relation :

$$n\overline{AB}\sin u_0 = \overline{A'B'}\sin u'_0 \tag{51}$$

4.2.a. En exprimant $\overline{A'B'}$ en fonction de d et du *petit* angle $\widehat{A'\Omega B'}$ $(= \alpha')$ puis $\sin u'_0$ en fonction de a et d (on supposera également u'_0 *petit*) :

- calculer a en fonction de P et de l'ouverture numérique de l'objectif, $O_n = n\sin u_0$;
- déduire de la condition $\alpha' \geqslant \epsilon$, la limite de résolution δ du microscope associé à l'œil, en fonction de O_n et de $\sigma = \epsilon a$.

4.2.b. Comment choisir O_n et σ pour que δ soit la plus petite possible ?
A.N. la plus grande valeur de O_n réalisable est $1,3$. Calculer alors le produit aP.
5. Rôle de la diffraction.
Dans les questions précédentes (optique géométrique), la nature ondulatoire de la lumière n'intervenait pas. En réalité, la lumière sortant d'un microscope et provenant soit de A′ soit de B′ subit une diffraction par le cercle oculaire (de diamètre $a < a_P$, diamètre de la pupille), conduisant à 2 pinceaux coniques de même demi-angle au sommet $1,22\lambda/a$, et ayant pour axes respectifs les droites A′Ω et B′Ω (O et Ω sont confondus ; λ est la longueur d'onde de la lumière dans le vide). Sur la rétine, le microscope donne donc de A et de B non pas 2 images ponctuelles mais 2 pseudo-images, constituées par les taches de diffraction (voir figure ci-dessous).



On admettra (critère de Rayleigh) que 2 pseudo-images sont distinctes si leur écart angulaire est au moins égal à $1,22\lambda/a$.
En utilisant notamment la question précédente, donner l'expression de la limite de résolution intrinsèque de l'objectif, δ_0, en fonction de λ et de O_n. **A.N.** $\lambda = 0,5$ µm ; $O_n = 1,3$. Calculer δ_0.
6. Lentille magnétique mince. Microscope électronique.
Dans un microscope électronique, un pinceau d'électrons non relativistes, homocinétiques (de même vitesse v_0) se déplace dans le vide, traversant l'objet et des lentilles magnétiques. Un électron a une charge : $q = -e = -1,6.10^{-19}$ C et une masse $m = 9.10^{-31}$ kg.
6.1. Avec quelle tension U faut-il accélérer un électron au repos pour obtenir v_0 ?
A.N. $v_0 = 3.10^7$ m.s^{-1}. (Cette valeur est utilisable pour les applications numériques ultérieures). Calculer U.
6.2. Une lentille magnétique est une bobine de révolution autour de l'axe $z'z$, produisant un champ $\vec{B}$ statique dont les composantes sur la base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ (coordonnées cylindriques, voir figure) sont respectivement :

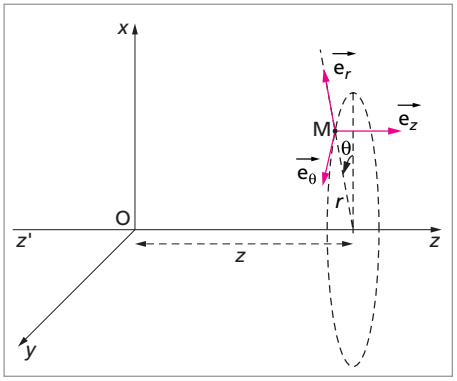
$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\ ,\quad B_\theta = 0\ ,\quad B_z$$

B_z est supposé *indépendant* de r et θ.

Hors du champ $\vec{B}$, un électron a un mouvement rectiligne uniforme. L'angle α entre l'axe $z'z$ et le vecteur vitesse de l'électron est toujours très faible.

La vitesse des électrons est-elle modifiée par la lentille magnétique ?

Soient $r(t), \theta(t), z(t)$ les coordonnées d'un électron à l'instant t. Déduire du principe fondamental de la dynamique, par projection respectivement sur $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$, trois équations différentielles notées (1),(2),(3).



6.3. Déduire des hypothèses faites précédemment que l'on peut confondre $\frac{dz}{dt}$ avec v_0.

6.4. Montrer que (2) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = K\frac{d}{dt}(r^2 B_z)$$

K étant fonction de e et m. En déduire $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de e, m et B_z sachant que $\frac{d\theta}{dt}$ est nulle hors du champ.

6.5.a. Compte tenu des résultats précédents, transformer (1) en une équation différentielle en $r(z)$.

6.5.b. On suppose que la lentille crée un champ magnétique nul partout sauf entre les cotes $z(O_1) = z_1$ et $z(O_2) = z_2$. Un électron incident ayant coupé l'axe en A sous l'angle $\alpha = \alpha_1$, est dévié par la lentille et recoupe l'axe en A′ sous l'angle $\alpha = \alpha_2$. La lentille est supposée mince. Remarquant que $\frac{dr}{dz} = \tan\alpha$, exprimer la quantité $\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1$ en fonction de

$$S = \int_{z_1}^{z_2} r B_z^2 dz$$

et préciser son signe. En déduire si la lentille est convergente ou divergente.

6.5.c. La lentille étant mince, on admet que r reste pratiquement constant et égal à r_1 pour z compris entre z_1 et z_2. On pose $p = \overline{O_1A} \approx \overline{OA}$ et $p' = \overline{O_2A'} \approx \overline{OA'}$, O étant le milieu de O_1O_2. Établir l'expression de :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

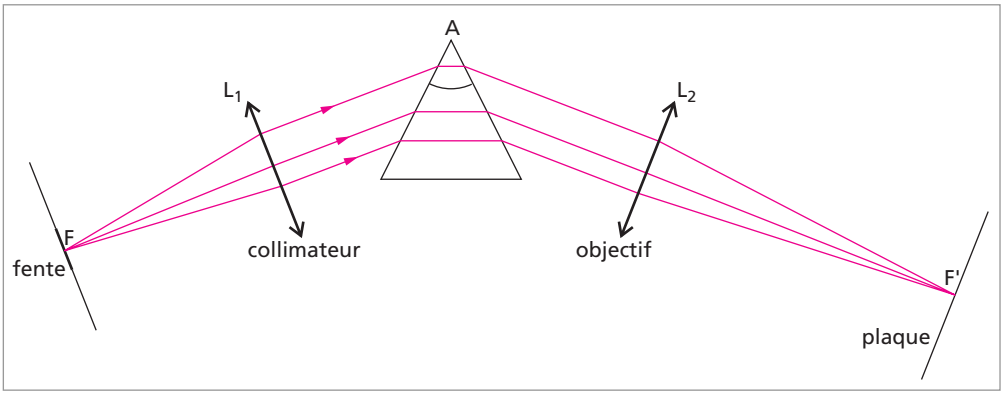
en fonction de S, e, m, v_0, r_1. Évaluer la distance focale f' de la lentille en supposant $B_z = B_1$ constant entre z_1 et z_2. **A.N.** : $z_2 - z_1 = 5$ mm ; $B_1 = 10^{-2}$ T. Calculer f'.

6.6. Limite de résolution du microscope électronique

Selon la mécanique ondulatoire, quelle est la longueur d'onde λ associée à une particule non relativiste de masse m et de vitesse v_0 ?

La limite de résolution de l'objectif du microscope électronique étant donnée par la relation $\delta_e = 0,61\lambda/\sin u_0$, calculer δ_e si $u_0 = 10^{-2}$ rad. On prendra la constante de Planck égale à $6,6.10^{-34}$ u SI et on précisera son unité.

Exercice 8 Spectrographe à prisme



On considère un spectrographe à prisme constitué d'une fente-source placée dans le plan focal objet d'un collimateur L_1, d'un prisme d'angle A, d'un objectif L_2 et d'une plaque photographique placée dans le plan focal image de L_2. L_1 et L_2 sont 2 lentilles minces convergentes dont les distances focales f_1' et f_2' sont supposées indépendantes de la longueur d'onde λ de la lumière. En revanche, l'indice n du prisme dépend de λ. Le prisme est au minimum de déviation pour la longueur d'onde moyenne λ_m du spectre émis par la fente-source. On néglige tout effet de diffraction et l'on va étudier l'influence de la largeur de la fente-source sur le pouvoir de résolution du spectrographe.

1. Rappeler les formules du prisme. Que deviennent-elles au minimum de déviation ?

2. On suppose que la fente-source est infiniment fine et qu'elle émet 2 radiations de longueurs d'onde λ et $\lambda + \delta\lambda$ voisines de λ_m. Pour ces 2 radiations, le prisme a pour indices respectifs, n et $n + \delta n$.

Montrer que, sur la plaque, on observe 2 images de la source séparées d'une distance δx avec

$$\delta x = 2\,\frac{\delta n}{n}\,\tan i\, f_2' \tag{52}$$

3. La fente-source a maintenant une largeur Δy et l'on ne considère qu'une des radiations λ ($\approx \lambda_m$) émises par cette source.

Montrer que l'image de la source sur la plaque a une largeur :

$$\Delta y' = \Delta y \frac{f_2'}{f_1'} \tag{53}$$

4. En déduire le pouvoir de résolution R du spectrographe au minimum de déviation :

$$R = 2\,\tan i\,\frac{f_1'}{\Delta y}\,\frac{\mathrm{d}(\ell \mathrm{n}\, n)}{\mathrm{d}(\ell \mathrm{n}\,\lambda)} \tag{54}$$

5. Application : on donne la distance focale $f_1' = 1$ m et l'angle du prisme $A = 60^0$. D'autre part, pour la longueur d'onde λ_m, le prisme a un indice $n = 1,65$. Enfin, pour toute l'étendue du spectre comprise entre 400 et 750 nm, la variation de l'indice du prisme

est $\Delta n = 0,04$. Calculer la largeur Δy de la fente qui permet de séparer 2 radiations dont les longueurs d'onde diffèrent de 0,1 nm.

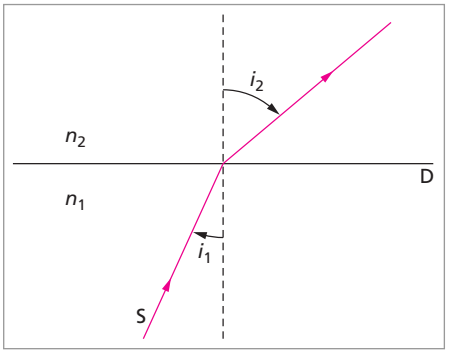
Exercice 9 Fibres optiques

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les différents milieux envisagés sont transparents, homogènes et isotropes ; les indices de réfraction sont des indices absolus correspondant à une longueur d'onde donnée. La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

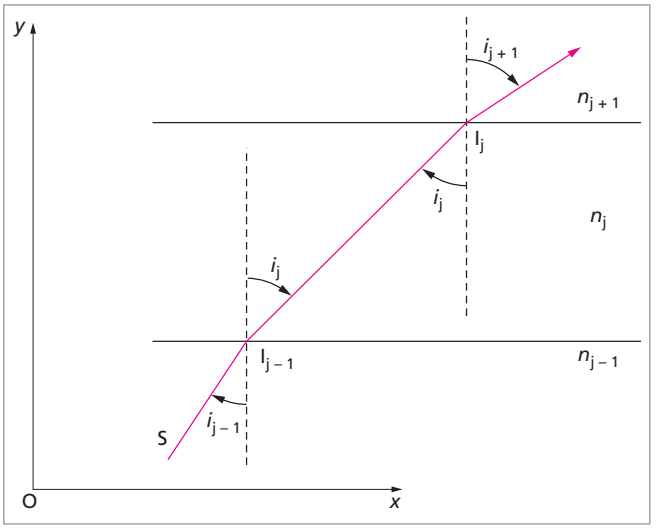
1.1. Deuxième loi de Descartes : un rayon lumineux S se propage dans un milieu, constitué de deux demi-espaces, d'indices respectifs n_1 et n_2, séparés par un dioptre plan D.

1.1.a. Rappeler la deuxième loi de Descartes liant les indices n_1 et n_2 aux angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2.

1.1.b. Quelles sont les conditions nécessaires pour que le phénomène de réflexion totale intervienne au niveau du dioptre D ?



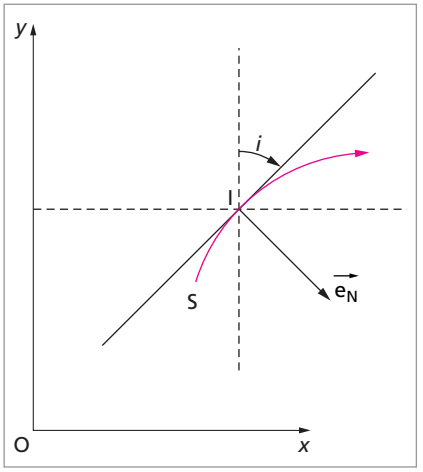
1.2. Milieu multicouche : le rayon lumineux S se propage maintenant dans un milieu constitué de couches, limitées par des dioptres plans parallèles. Conformément aux lois de Descartes, la trajectoire de S est plane (plan xOy). Dans la couche j d'indice n_j le rayon présente l'angle i_j avec la normale, parallèle à Oy et commune aux dioptres.



1.2.a. Donner la relation liant n_{j-1}, i_{j-1}, n_{j+1} et i_{j+1}.

1.2.b. Quelle est la propriété de la quantité $n_j . \sin i_j$?

1.3. Milieu à gradient d'indice : considérons, dans cette question, un milieu dans lequel l'indice varie continûment avec la coordonnée y suivant la loi $n(y)$: les surfaces équi-indices sont les plans d'équation $y = \text{cnst}$.
i est l'angle entre la tangente en I au rayon S et la direction parallèle à l'axe Oy. La trajectoire de S est plane (plan xOy).



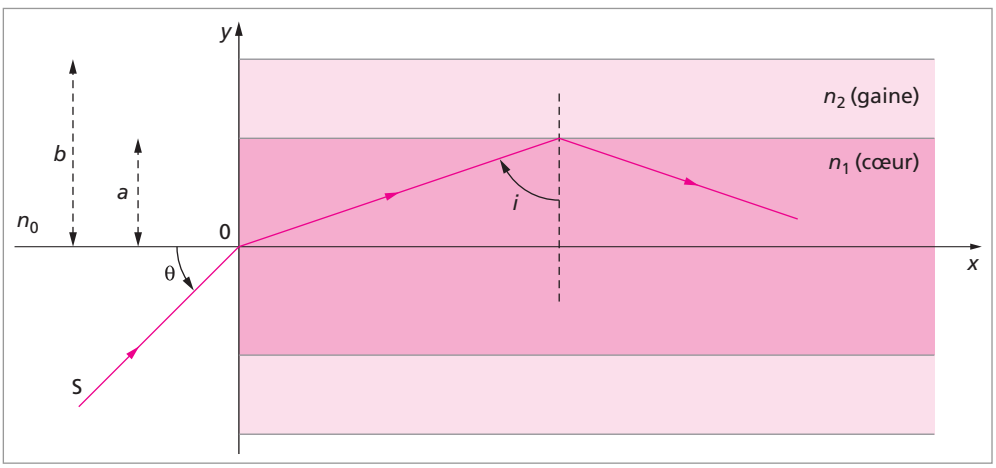
1.3.a. En utilisant le résultat de la question 1.2.b, donner la propriété de la quantité $n(y)$. sin i le long de la trajectoire lumineuse.

1.3.b. En un point I de la trajectoire de S, l'indice $n(y)$ est relié au rayon de courbure R (positif) par la loi :

$$n(y) = R\ \vec{e}_N\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ n(y)$$

où $\vec{e}_N$ est le vecteur unitaire, porté par la normale principale en I à la trajectoire, et dirigé vers le centre de courbure. La figure ci-dessus correspond-elle à une fonction n croissante de y ? Justifier.

2. Fibre optique à saut d'indice : on considère, dans le vide (indice $n_0 = 1$), une fibre optique constituée d'un fil cylindrique de rayon a, d'axe Ox, d'indice constant n_1, entouré d'une gaine d'indice inférieur n_2 ($1 < n_2 < n_1$).



Le rayon lumineux S (lumière monochromatique de longueur d'onde λ) atteint le cœur de la fibre (face d'entrée) en O, sous l'angle d'incidence Θ.
Données : $n_0 = 1,000$; $n_1 = 1,520$; $n_2 = 1,480$; $a = 30$ µm ; $\lambda = 600$ nm.

2.1. Conditions de propagation.

2.1.a. Tracer, qualitativement, $n(y)$ pour y variant de $-\infty$ à $+\infty$.

2.1.b. Déterminer les valeurs de l'angle d'incidence i (voir figure) qui permettent à S de se propager dans la fibre. On admettra une trajectoire plane de S (plan xOy).

2.1.c. Montrer que la propagation n'est permise que si Θ est inférieur à une valeur limite Θ_0 (angle d'acceptance de la fibre) que l'on exprimera en fonction de n_1 et n_2.

2.1.d. En déduire l'ouverture numérique $\Omega = n_0 . \sin \Theta_0$ de la fibre.

2.1.e. Exprimer le chemin optique (L) suivi par S entre le point O et le point de $q^{\text{ième}}$ réflexion, en fonction de q, n_1 et Θ.

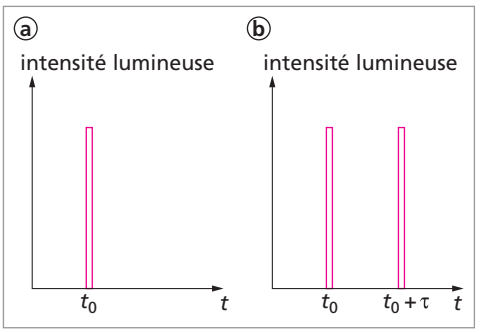
2.1.f. Déterminer les abscisses des points d'intersection de S avec l'axe Ox, en fonction de n_1 et Θ.

2.1.g. *Application numérique :* calculer Θ_0 et Ω.

2.2. Propagation d'un signal lumineux.

2.2.1. Signal lumineux porté par un seul rayon S. Le rayon S est le support d'un signal lumineux (impulsion très brève voir figure ci-contre a)) qui se propage dans la fibre en effectuant une succession de réflexions. Le signal est émis en O à l'instant $t = t_0 = 0$.

Déterminer, en fonction de n_1, x, Θ et c, la date t à laquelle le signal atteint le plan d'équation $x =$ constante.



2.2.2. Signal lumineux porté par un ensemble de rayons non parallèles. Le signal est maintenant porté par un ensemble de rayons non parallèles, atteignant la face d'entrée en O, tels que $0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_0$.

2.2.2.a. Montrer que ce signal est élargi : c'est-à-dire qu'il atteint le plan d'abscisse x entre les dates t et $t + \Delta t$. Déterminer Δt en fonction de n_1, n_2, x et c.

2.2.2.b. Un récepteur lumineux est placé dans le plan x afin de mesurer l'intensité lumineuse I' transmise. Tracer, qualitativement, la courbe $I' = f(t)$.

2.2.2.c. On envoie 2 signaux identiques à $t = t_0$ et à $t = t_0 + \tau$ (impulsions très brèves, voir figure b ci-dessus). Déterminer la valeur minimale τ_m de τ pour qu'à l'abscisse x, un détecteur puisse encore différencier les 2 signaux, c'est-à-dire qu'ils ne se superposent pas et qu'ils arrivent disjoints.

2.2.2.d. Calculer la fréquence maximale ν_M (en impulsions / seconde) d'un ensemble périodique d'impulsions (période τ), pouvant être guidé distinctement jusqu'à l'abscisse $x = 1000$ m.

2.2.2.e. Pour $0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_0$, la variation du rayon a a-t-elle une influence sur ν_M ?

2.2.2.f. Le phénomène de diffraction intervient-il dans cette fibre ?

3. Fibre optique à gradient d'indice : on remplace le cœur de la fibre précédente par un milieu à gradient d'indice. Dans ce type de fibre optique, l'indice du cœur diminue

continûment de la valeur $n = n_1$ sur l'axe optique, à la valeur n_2 pour $y = a$. La technologie actuelle permet d'obtenir la fonction :

$$n = n(y) = n_1 \left(1 - \frac{2(n_1 - n_2)y^2}{n_1.a^2}\right)^{1/2}$$

D'autre part, l'équation vectorielle de la trajectoire d'un rayon lumineux S est :

$$\frac{\mathrm{d}(n\ \vec{u})}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ n$$

où s est l'abscisse curviligne d'un point M de la trajectoire suivie par la lumière et $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en M au rayon (orienté dans le sens de propagation). La lumière utilisée est toujours monochromatique (longueur d'onde λ).

Données : $n_0 = 1,000$; $n_1 = 1,520$; $n_2 = 1,480$; $a = 30$ µm.

3.1. Tracer, qualitativement, $n(y)$, y variant de $-\infty$ à $+\infty$.

3.2. On utilise le résultat de la question 1.3.b. Vers quelle région de la fibre le vecteur $\vec{e}_{\mathrm{N}}$ est-il dirigé ?

3.3. Sachant que l'on a $\dfrac{(n_1 - n_2)}{n_1} \ll 1$, montrer que $n(y)$ peut se mettre sous la forme $n(y) \approx n_1(1 - Ay^2)$ où A est une constante que l'on déterminera.

3.4. Sous quelle condition peut-on, en première approximation, écrire $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$.

Cette approximation sera utilisée dans toute la suite du problème.

3.5. Sachant que $\vec{u} = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)\,\vec{e}_x + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)\,\vec{e}_y$, montrer que $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ se met sous la forme $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = f(n).(\mathrm{d}n/\mathrm{d}y)$. Déterminer la fonction $f(n)$.

3.6. Enfin, en négligeant le terme non linéaire Ay^2, on obtient une équation différentielle de la forme $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 + By = 0$ où B est une constante que l'on déterminera.

3.7. Intégrer cette dernière équation différentielle.

3.8. Déterminer les abscisses des points d'intersection de S avec l'axe Ox, en fonction de B. Dépendent-elles de Θ ?

3.9. On fait arriver en O un rayon lumineux sous l'incidence $\Theta = 10^{-2}$ rad. Calculer le rapport $|y_{\mathrm{M}}/a|$, y_{M} étant l'ordonnée d'un point de S où le vecteur $\overrightarrow{u}$ est parallèle à l'axe Ox. Conclure.

3.10. Représenter les trajectoires, dans la fibre, de quelques rayons lumineux correspondant à $0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_0$.

3.11. D'après ce modèle, quel avantage présente l'utilisation des fibres à gradient d'indice par rapport aux fibres à saut d'indice ?

4. Absorption dans les fibres optiques : l'atténuation de la lumière dans ces fibres est due à l'absorption et à la diffusion des photons par le matériau. La loi se traduit par la formule :

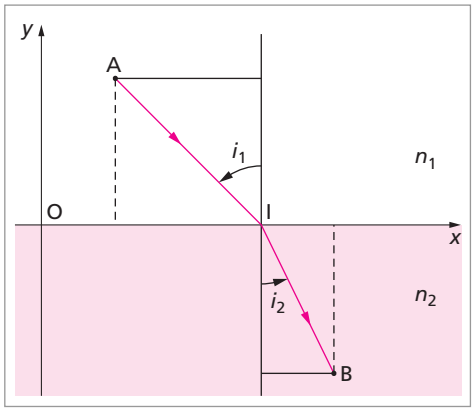
$$\Sigma = (10/x).\log(\Phi_0/\Phi(x))$$

où Σ est l'atténuation (en dB/km), x la distance axiale parcourue depuis O et Φ_0 et $\Phi(x)$ les flux lumineux traversant les plans d'équation $x = 0$ et x.

4.1. Calculer Σ si, après un parcours de 25 km, le flux lumineux se trouve divisé par 10.

SOLUTIONS

1 **CONSEIL : Cet exercice illustre la portée générale du Principe de Fermat. Il ne peut être abordé de manière fructueuse qu'après l'étude de la partie 1.**



1. Le chemin optique (AIB) s'écrit :

$$L = (\mathrm{AIB}) = n_1 \mathrm{AI} + n_2 \mathrm{IB} \quad \text{soit} \quad (55)$$

$$L = n_1 \sqrt{(x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A})^2 + y_\mathrm{A}^2} + n_2 \sqrt{(x_\mathrm{I} - x_\mathrm{B})^2 + y_\mathrm{B}^2} \quad (56)$$

2. D'après le principe de Fermat, on a, pour le rayon lumineux qui va effectivement de A à B :

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mathrm{I}} = 0 = n_1 \frac{x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A}}{\sqrt{(x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A})^2 + y_\mathrm{A}^2}} + n_2 \frac{x_\mathrm{I} - x_\mathrm{B}}{\sqrt{(x_\mathrm{I} - x_\mathrm{B})^2 + y_\mathrm{B}^2}} \quad (57)$$

Or,

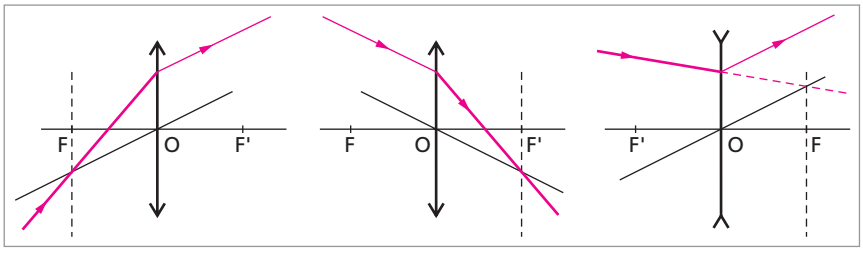
$$\sin i_1 = \frac{x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A}}{\sqrt{(x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A})^2 + y_\mathrm{A}^2}} \quad , \quad \sin i_2 = \frac{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{I}}{\sqrt{(x_\mathrm{I} - x_\mathrm{B})^2 + y_\mathrm{B}^2}} \quad (58)$$

(57) et (58) conduisent à :

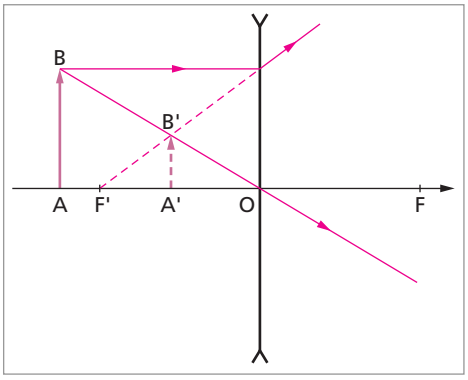
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (59)$$

2 **CONSEIL : Cet exercice, d'apparence presque anodine, est la « brique » de base de tout problème d'optique géométrique. On ne saurait trop insister sur son importance aussi bien pour l'écrit que pour l'oral du CAPES.**

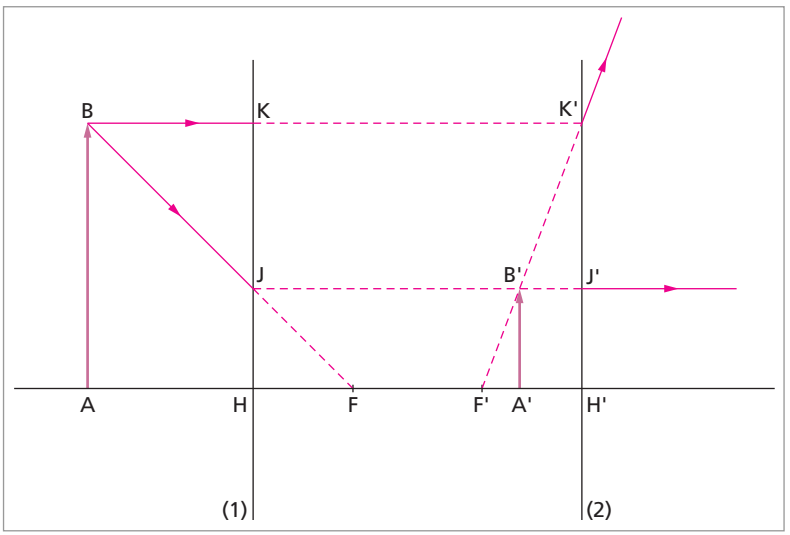
1. On utilise les règles énoncées au paragraphe 2.4 page 468 et on obtient les constructions de rayons suivantes.



2. La lentille divergente donne de l'objet réel AB une image A′B′ virtuelle :



Enfin, pour le système ci-dessous, on ne sait pas a priori si l'objet AB est réel ou virtuel ; on n'en sait pas plus pour son image A′B′.

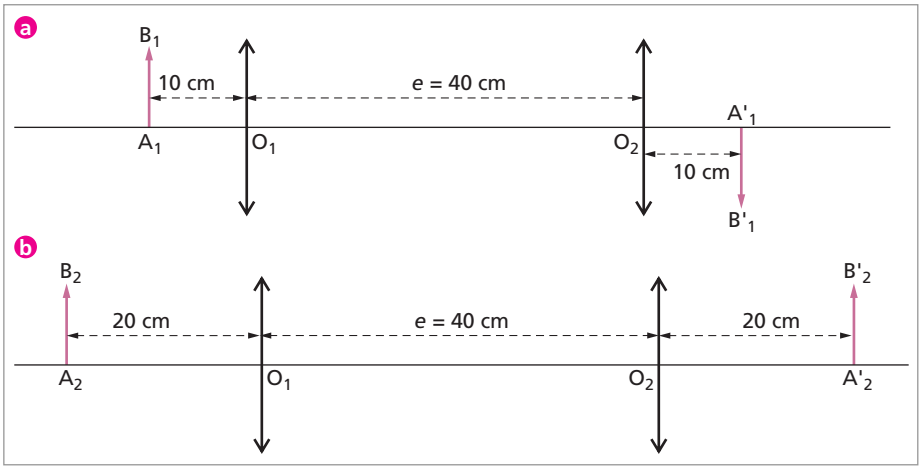


(1) et (2) sont les plans principaux. K a pour image K′, J a pour image J′. Le rayon BK, parallèle à l'axe optique, ressort en passant par F' et K′. Le rayon BJ qui passe par F ressort parallèlement à l'axe optique en passant par J′. On en déduit A′B′.

3 **CONSEIL : Il faut avoir étudié en détail la partie 2 page 462 si l'on veut aborder cet exercice de manière fructueuse.**

Rappelons à l'aide de schémas les deux expériences exposées dans l'énoncé :

1. On déduit de l'expérience b) que les points A_2 et A_2' sont les points *principaux* (le grandissement γ est égal à $+1$). Nous les appellerons dorénavant H et H′.
De même, l'expérience a) montre que les points A_1 et A_1' sont les points antiprincipaux (le grandissement γ est égal à -1).

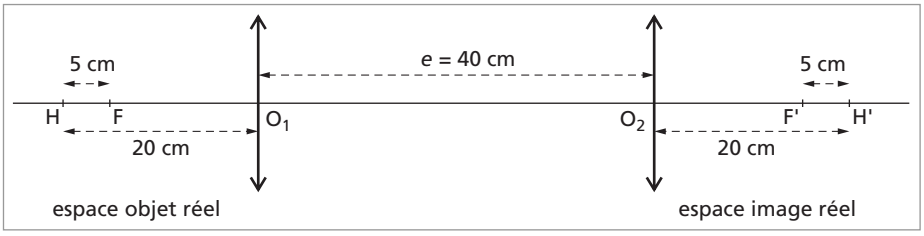


Appliquons la formule de conjugaison de Descartes à cette expérience :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{H'A'_1}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{HA_1}}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad \overline{\mathrm{H'A'_1}} = -0,1 \text{ m} \quad \overline{\mathrm{HA_1}} = +0,1 \text{ m} \qquad (60)$$

$$\text{D'où :} \quad f' = -0,05 \text{ m} = -5 \text{ cm} = \overline{\mathrm{H'F'}} \quad ; \quad (f' = -f) \qquad (61)$$

On en déduit les éléments cardinaux du système :



On observe que le foyer image F′ est réel. Le doublet est donc *convergent*. D'autre part, le foyer objet F est réel. On dit que le doublet est *positif*. L'image d'un objet AB très éloigné sera située dans le plan focal image du doublet. De plus, les points nodaux, N et N′, sont confondus avec les points principaux, H et H′. On en déduit la figure suivante qui permet de déterminer les caractéristiques de l'image :

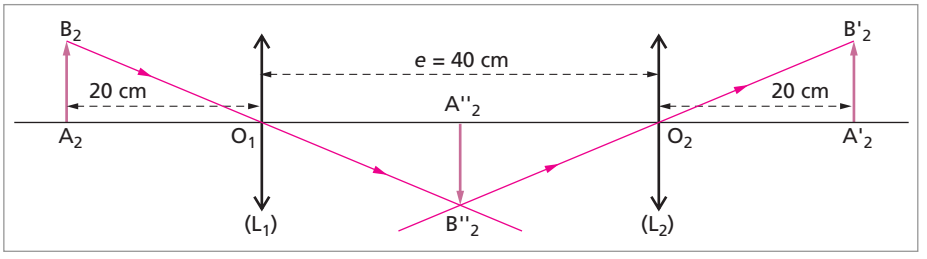
où BH est parallèle à $B'H'$ et où A' est confondu avec F'. On obtient une image $A'B'$ qui est *droite*. En utilisant le fait que l'angle α est petit, on a :

$$A'B' \approx |f'|\alpha = 5.10^{-2}.2.\frac{\pi}{180} = 1,7.10^{-3} \text{ m} = 1,7 \text{ mm} \qquad (62)$$

2. On utilise l'expérience b) et on détermine l'image intermédiaire de B_2 que nous appellerons B_2''. On a donc la succession d'images :

$$B_2 \overset{(L_1)}{\longmapsto} B_2'' \overset{(L_2)}{\longmapsto} B_2' \qquad (63)$$

B_2'' est l'image de B_2 par L_1. Donc, B_2'' est situé sur la droite B_2O_1. De même, B_2'' est situé sur la droite $B_2'O_2$. On obtient donc facilement B_2'' comme l'indique la figure ci-dessous.



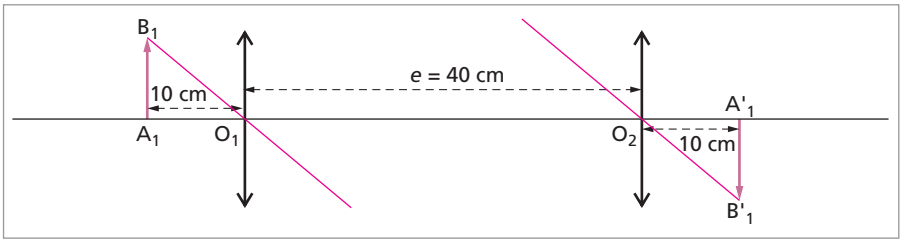
Par symétrie de la construction, on a $\overline{O_1A_2''} = +0,2 \text{ m} = -\overline{O_2A_2''}$. D'où, avec la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_2''}} - \frac{1}{\overline{O_1A_2}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Longrightarrow \quad f_1' = 0,1 \text{ m} = f_2' \qquad (64)$$

Remarque : on aurait pu, tout aussi bien, considérer l'expérience a) et chercher à déterminer l'image intermédiaire B_1'' de B_1. On a :

$$B_1 \overset{(L_1)}{\longmapsto} B_1'' \overset{(L_2)}{\longmapsto} B_1' \qquad (65)$$

Par un raisonnement identique au précédent, on déduit que B_1'' est à l'intersection de B_1O_1 et O_2B_1'.



Il est facile de voir que ces 2 droites sont parallèles et donc que B_1'' est à l'infini. On en déduit que B_1 est dans le plan focal objet de (L_1). A_1 est donc au foyer objet de (L_1) et l'on a, sans calcul, $f_1' = 10$ cm.

La vergence C_1 d'une lentille plan-convexe (L_1) est donnée par la formule (voir p. 470) :

$$C_1 = \frac{n-1}{R} = \frac{1}{f_1'} \quad \Longrightarrow \quad R = (n-1)f_1' = 5 \text{ cm} \tag{66}$$

De même pour (L_2).

3. Calculons d'abord la variation de la distance focale de chacune des lentilles.

$$f_1' = \frac{R}{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f_1'}{f_1'} = -\frac{\mathrm{d}n}{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}f_1' = -0,2 \text{ cm} = \mathrm{d}f_2' \tag{67}$$

Les deux lentilles sont encore identiques et le système reste symétrique.
Pour la distance focale du doublet, on utilise la formule de Gullstrand :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1'f_2'} = \frac{2}{f_1'} - \frac{e}{f_1'^2} = \frac{2f_1' - e}{f_1'^2} \tag{68}$$

D'où :

$$f' = \frac{f_1'^2}{2f_1' - e} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f'}{f'} = \frac{2\mathrm{d}f_1'}{f_1'} - \frac{2\mathrm{d}f_1'}{2f_1' - e} \tag{69}$$

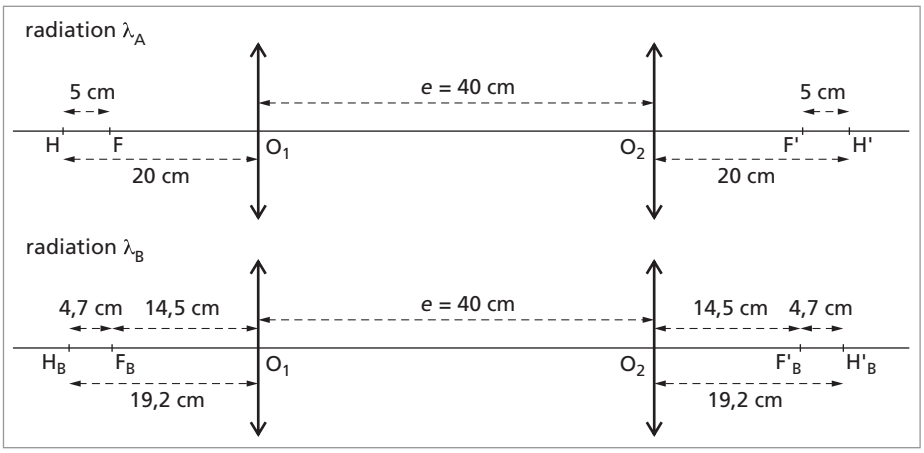
Soit $\mathrm{d}f' = +0,3$ cm. Pour la radiation λ_B, la distance focale du doublet est donc $f_B' = f' + \mathrm{d}f' = -5 + 0,3 = -4,7$ cm. Déterminons les positions des nouveaux points principaux, H_B et H_B', du doublet pour la radiation λ_B. On a :

$$H_B \overset{(L_1)}{\longmapsto} A'' \overset{(L_2)}{\longmapsto} H_B' \tag{70}$$

Par symétrie, A'' est au milieu de O_1O_2. A'' est l'image de H_B par (L_1). La formule de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1A''}} - \frac{1}{\overline{O_1H_B}} = \frac{1}{f_1' + \mathrm{d}f_1'} \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_1H_B} = -19,2 \text{ cm} \quad ; \quad \overline{O_2H_B'} = +19,2 \text{ cm} \tag{71}$$

De plus, $\overline{H_B'F_B'} = f_B' = -4,7$ cm. On peut récapituler tous ces résultats sur le schéma ci-dessous.

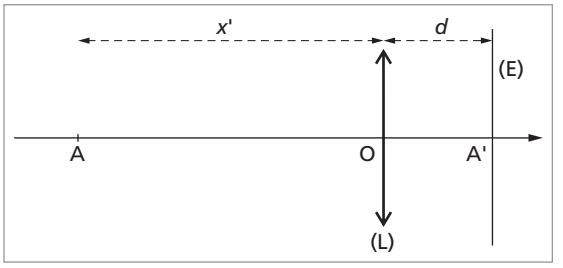


Si l'on considère un objet éclairé simultanément par les deux radiations précédentes, le doublet en donnera deux images dont les caractéristiques géométriques (emplacement et grandeur) ne coïncideront pas rigoureusement. On observera ainsi des irisations témoignant des aberrations chromatiques du système.

4 **CONSEIL : On utilise essentiellement ici la partie 2 du cours page 462. La notion de distance hyperfocale, largement discutée dans l'exercice, est d'une grande importance pratique : elle est à comprendre en détail et à retenir.**

1.a. Mise au point de l'objectif
Considérons un objet A à la distance x' de (L) avec $x' > 0$ et $\infty > x' > x$. On cherche la distance entre la pellicule et la lentille pour que l'image A′ se forme sur l'écran.
On pose :

$\overline{OA} = p = -x'$; $\overline{OA'} = p' = d$;



La formule de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f'} \tag{72}$$

$$\text{D'où :} \quad d = \frac{f'x'}{x' - f'} \tag{73}$$

En faisant varier x' de x à l'infini, on obtient :

$$d_{\min} \leqslant d \leqslant d_{\max} \tag{74}$$

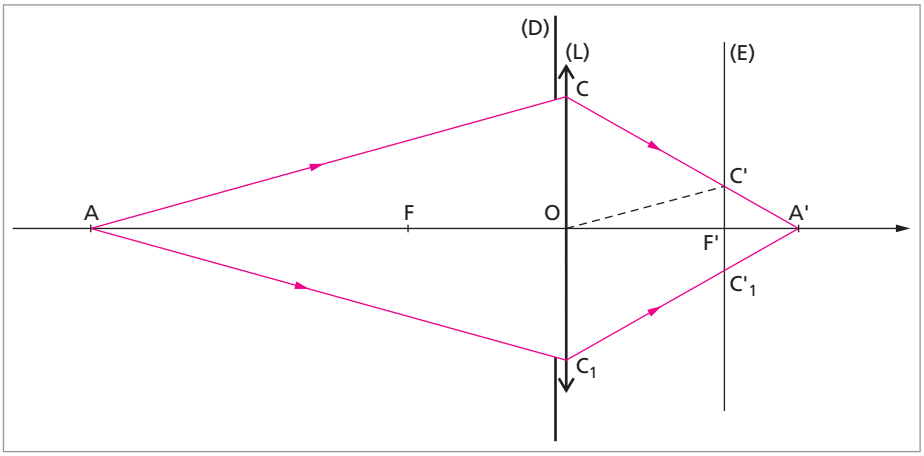
$$\text{avec} \quad d_{\min} = f' \quad et \quad d_{\max} = \frac{f'x}{x - f'} \tag{75}$$

$$\text{soit numériquement,} \quad 5 \text{ cm} \leqslant d \leqslant 5,45 \text{ cm} \tag{76}$$

1.b. Les grandeurs photométriques sont définies au paragraphe 5.3. page 484. Le flux lumineux pénétrant dans l'objectif est proportionnel à D^2 donc à $1/N^2$. Les nombres N sont (approximativement) en progression géométrique de raison $\sqrt{2}$. Donc, les valeurs de $1/N^2$ sont en progression de raison $1/2$. D'autre part, les nombres T_e sont, également, en progression géométrique de raison $1/2$. En passant d'un N au suivant (par exemple : $N = 2,8 \longrightarrow 4$), *l'énergie lumineuse* pénétrant dans l'appareil sera inchangée si, dans le même temps, on passe d'un T_e au T_e précédent (par exemple : $T_e = 1/60$ s $\longrightarrow 1/30$ s). On compense la fermeture du diaphragme par l'augmentation de la durée d'exposition.

1.c. L'appareil étant mis au point sur l'infini, on a $d = f'$; l'écran (E) est donc confondu avec le plan focal image de (L).

1.c.α. Distance hyperfocale L_0



Si A est situé à une certaine distance finie de (L) (avec toutefois AO $>$ f' sinon (L) jouerait le rôle de loupe), son image *réelle* se forme en un point A′ au-delà de (E).
La plaque photographique étant en (E), l'ensemble des rayons issus de A et traversant le diaphragme (D) impressionne la zone C'_1C'. L' « image » de A sur la plaque est donc une tache circulaire de diamètre C'_1C'. Par définition, lorsque AO $=$ L_0, C'_1C' $=$ g (taille du grain). En utilisant le fait que OC′ est parallèle à AC, on constate que les triangles OC′F′ et ACO sont semblables. D'où :

$$\frac{F'C'}{OC} = \frac{OF'}{AO} \quad \Longrightarrow \quad \frac{g/2}{D/2} = \frac{f'}{L_0} \tag{77}$$

Comme $D = f'/N$, on en déduit :

$$L_0 = \frac{f'D}{g} = \frac{f'^2}{Ng} \tag{78}$$

Numériquement :

$$N = 2,8 \quad \Longrightarrow \quad L_0 = 44,6 \text{ m} \tag{79}$$

$$N = 16 \quad \Longrightarrow \quad L_0 = 7,8 \text{ m} \tag{80}$$

1.c.β. *On a d'autant plus de profondeur de champ que L_0 est faible.* On en déduit que P_r augmente si N augmente ou encore si f' diminue.

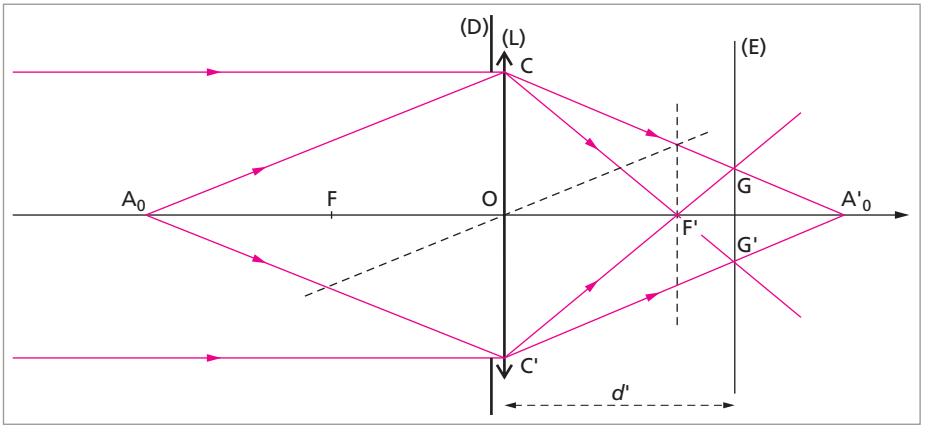
1.c.γ. Le diamètre d_{diffr} de la tache de diffraction sur l'écran (E) est obtenu en supposant que θ est petit (ce qui est le cas). On obtient :

$$d_{\text{diffr}} \approx 2\theta f' = 2f'\frac{1,22\lambda}{D} = 2,44\lambda N = 0,016 \text{ mm} < g\ (= 0,02 \text{ mm}) \tag{81}$$

Le choix ne sera pas remis en question.

1.d.α. L'appareil étant mis au point sur l'infini ($d = f'$), un point A à l'infini aura, *théoriquement*, une image ponctuelle sur la plaque. Cela dit, à cause de la structure granulaire de la pellicule, l'image *concrète* de A aura la taille g du grain (aucune image

ne peut avoir une taille moindre). Maintenant, si l'on recule légèrement la pellicule, rien ne sera changé pour A : son image sur la pellicule aura toujours la taille g. Par contre, la profondeur de champ va augmenter : on va pouvoir photographier nettement des objets de plus en plus proches de l'appareil. (Autrement dit, la distance hyperfocale va diminuer). Jusqu'où peut-on aller ? La position limite de la pellicule est donnée par la figure ci-dessous.



La tache G′G sur la pellicule a la taille g du grain. Les triangles F′CC′ et F′GG′ sont semblables, d'où :

$$\frac{g}{D} = \frac{d' - f'}{f'} \quad \Longrightarrow \quad d' = f'\left(1 + \frac{g}{D}\right) = f' + Ng \tag{82}$$

Numériquement :

$$N = 2,8 \quad \Longrightarrow \quad d' = 50,056 \text{ mm} \tag{83}$$

$$N = 16 \quad \Longrightarrow \quad d' = 50,32 \text{ mm} \tag{84}$$

1.d.β. Nouvelle distance hyperfocale L'_0 ($= \mathrm{A_0O}$). $\mathrm{A_0}$ et $\mathrm{A'_0}$ sont conjugués par rapport à (L) donc on a :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad p' = \overline{\mathrm{OA'_0}} = \mathrm{OA'_0} \quad \text{et} \quad p = \overline{\mathrm{OA_0}} = -L'_0 \tag{85}$$

Donc :

$$\frac{1}{L'_0} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{\mathrm{OA'_0}} \tag{86}$$

D'autre part, les triangles $\mathrm{A'_0}$CC′ et $\mathrm{A'_0}$GG′ sont semblables. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{OA'_0}}{D} = \frac{\mathrm{OA'_0} - d'}{g} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{OA'_0} = \frac{Dd'}{D - g} \tag{87}$$

En reportant $\mathrm{OA'_0}$ dans l'éq.(86) et en utilisant la relation $D = f'/N$, on obtient finalement :

$$L'_0 = \frac{f'}{2} + \frac{f'^2}{2Ng} = \frac{f' + L_0}{2} \approx \frac{L_0}{2} \tag{88}$$

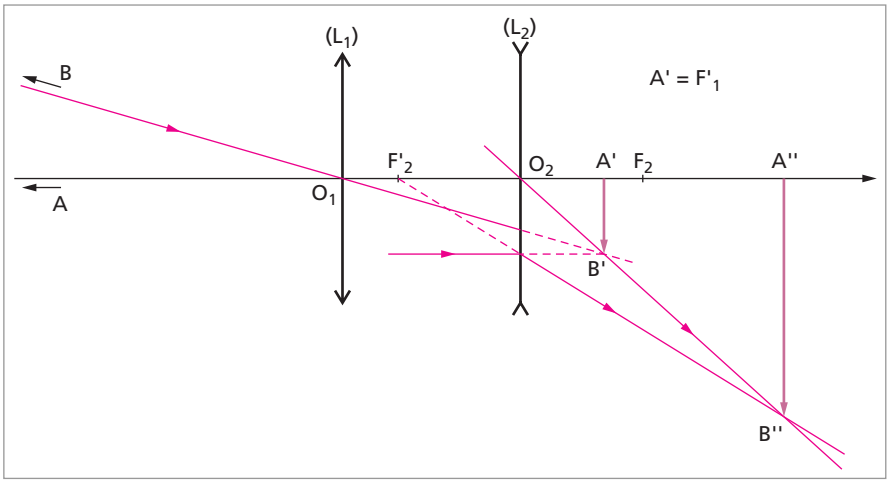
La distance hyperfocale est pratiquement divisée par 2. Les « appareils sans mise au point » sont réglés, une fois pour toutes, de telle manière que L'_0 soit suffisamment faible. La pellicule est située légèrement en arrière du plan focal image de l'objectif. Ces appareils permettent de photographier avec la même netteté tous les objets distants de l'objectif d'au moins L'_0. Il n'est donc pas nécessaire, avec de tels appareils, de mettre au point sur l'infini pour photographier un objet très éloigné.

2.a. L'image de la tour est pratiquement dans le plan focal image de (L). On utilise la formule du grandissement de Descartes :

$$|\gamma| \equiv \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \left|\frac{p'}{p}\right| \quad \text{avec} \quad |p| = 2\ \text{km}\ ;\ p' \approx f' \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A'B'} = 1,25\ \text{mm} \qquad (89)$$

La distance objectif-pellicule est d'environ 50 mm $(=f')$.

2.b. Pour construire l'image de la tour, on construit d'abord l'image intermédiaire $\mathrm{A'B'}$ (image de AB par $(\mathrm{L_1})$ seule). Comme B est pratiquement à l'infini, cette image est simplement obtenue en prenant l'intersection de $\mathrm{BO_1}$ avec le plan focal image de $(\mathrm{L_1})$. On obtient alors le point $\mathrm{B'}$. Ensuite, on construit l'image de $\mathrm{B'}$ par $(\mathrm{L_2})$. On utilise le rayon $\mathrm{O_2B'}$ qui n'est pas dévié, et le rayon parallèle à l'axe optique et passant par $\mathrm{B'}$. Ce dernier rayon émerge de $(\mathrm{L_2})$ en passant par $\mathrm{F'_2}$. À l'intersection des deux rayons, on a $\mathrm{B''}$, l'image finale de B donnée par le doublet. $\mathrm{A'B'}$ joue le rôle d'objet virtuel pour $(\mathrm{L_2})$. $\mathrm{A'}$ est situé entre $\mathrm{O_2}$ et $\mathrm{F_2}$ ($\mathrm{A'}$ est pratiquement confondu avec $\mathrm{F'_1}$).



2.c.α. On utilise le fait que $\mathrm{A'}$ et $\mathrm{A''}$ sont conjugués par rapport à $(\mathrm{L_2})$:

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O_2A''}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O_2A'}}} = \frac{1}{f'_2} \qquad (90)$$

D'où :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O_2A''}}} \approx \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{\mathrm{O_2F'_1}}} = -\frac{1}{25} + \frac{1}{18,8} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{O_2A''}} = 75,8\ \text{mm} \qquad (91)$$

On a :

$$\left|\frac{\mathrm{A''B''}}{\mathrm{A'B'}}\right| = \frac{\mathrm{O_2A''}}{\mathrm{O_2A'}} \approx 4 \quad ; \quad \mathrm{A''B''} \approx 5 \text{ mm} \tag{92}$$

L'encombrement du téléobjectif est $\mathrm{O_1A''} = 31,2 + 75,8 = 107$ mm.

2.c.β. La tour étant très éloignée, son image se forme dans le plan focal image de la lentille. En utilisant la formule du grandissement de Descartes, on obtient :

$$\frac{\mathrm{A''B''}}{\mathrm{AB}} \approx \frac{f'_u}{|p|} \tag{93}$$

Avec AB = 50 m , $|p| = 2$ km , A''B'' = 5 mm , on trouve $f'_u = 200$ mm. *Le dispositif serait environ 2 fois plus encombrant que le téléobjectif de la question précédente.*

5 **CONSEIL : Il est fortement conseillé d'étudier les parties 3 et 5 pages 471 et 482 avant d'aborder cet exercice.**

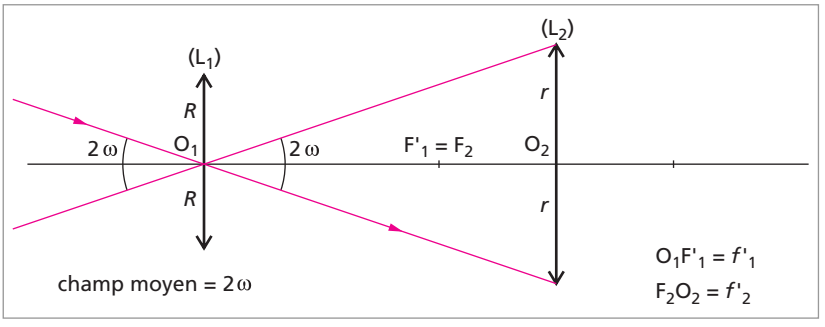
1. La limite de résolution angulaire (due à la diffraction) est donnée au paragraphe 3.5. page 475 :

$$\alpha = \frac{0,6\lambda}{nR} = \frac{0,6 \times 0,56.10^{-6}}{0,05} = 6,8.10^{-6} \text{ rad} \tag{94}$$

α' étant l'acuité visuelle, le grossissement utile G_u est égal à :

$$G_u = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{3.10^{-4}}{6,8.10^{-6}} = 44 \tag{95}$$

2. Voir le paragraphe 3.4. page 474. *Le champ moyen* 2ω *de la lunette est l'angle sous lequel l'oculaire* (L_2) *est vu de* $\mathrm{O_1}$ *(centre de l'objectif).*



ω est petit et, d'autre part, on a $f'_2 \ll f'_1$. Dans ces conditions, le grossissement G est pratiquement égal à f'_1/f'_2. On peut donc écrire :

$$2\omega \approx \frac{d}{f'_1 + f'_2} \approx \frac{d}{f'_1} = \frac{d}{f'_2}\frac{f'_2}{f'_1} \approx \frac{d}{f'_2}\frac{1}{G} = \frac{1}{2G} \tag{96}$$

(on a utilisé la donnée de l'énoncé : $d/f'_2 = 0,5$). *On observe que le grossissement et le champ varient en sens inverse.* Pour voir la Lune en entier, on doit avoir : $2\alpha_L \leqslant 2\omega$ ($2\alpha_L$ est le

diamètre apparent de la Lune). Soit :

$$30' = 0,5.\frac{\pi}{180}\text{rad} \leqslant \frac{1}{2G} \quad \Longrightarrow \quad G \leqslant 57,3 \tag{97}$$

3. On a :

$$G \approx \frac{f_1'}{f_2'} = 50 = \frac{2\alpha_L'}{2\alpha_L} \quad \Longrightarrow \quad 2\alpha_L' = 50 \times 30' = 25^\circ \tag{98}$$

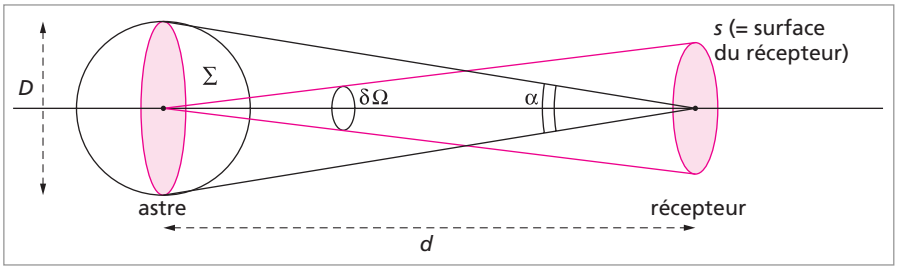
Le grossissement de la lunette est de 50. L'image de la Lune est vue à travers la lunette sous un angle de 25 degrés.

4. Le cercle oculaire (C.O.) est l'image de l'objectif donnée par l'oculaire. Comme $f_1' \gg f_2'$, *le cercle oculaire est pratiquement dans le plan focal image de l'oculaire*. De plus, un simple dessin montre que :

$$r_{\text{C.O.}} \approx R.\frac{f_2'}{f_1'} = 1 \text{ mm} \tag{99}$$

Remarque : pour plus de détails, se reporter à la correction de l'exercice 7 page 515 sur le microscope où cette question sur le cercle oculaire est également traitée.

5. Voir le paragraphe 5.3. page 484.



On écrit que la puissance lumineuse reçue par le récepteur, qui vaut $e.s$, est égale à la puissance émise par l'astre dans l'angle solide $\delta\Omega$. Rappelons que $\delta\Omega = s/d^2$ et que $\alpha \approx D/d$. En supposant que l'astre obéit à la loi de Lambert, on obtient :

$$es = L\Sigma\delta\Omega = L\frac{\pi D^2}{4}\frac{s}{d^2} \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{\pi L}{4}\left(\frac{D}{d}\right)^2 \quad \text{soit :} \quad e = \pi L\frac{\alpha^2}{4} \tag{100}$$

Une étoile (qu'elle soit observée à l'œil nu ou à la lunette) apparaîtra comme ponctuelle. Un seul élément rétinien sera alors impressionné. En revanche, la Lune est un objet étendu. Le diamètre apparent d'un élément rétinien est $2\alpha_1 = 1'$. L'angle solide correspondant est $\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos\alpha_1) \approx \pi\alpha_1^2$.
Observation à l'œil nu : *s est la surface de la pupille*. Pour la Lune, le flux lumineux total reçu est $F_{\text{tot}} = es$. Un élément rétinien reçoit $F = F_{\text{tot}}\ (\Omega_1/\Omega_L) \approx es(\alpha_1/\alpha_L)^2$. Pour l'étoile, le flux lumineux total reçu est $F'_{\text{tot}} = e's$. Un élément rétinien reçoit $F' = F'_{\text{tot}}$.

On en déduit le rapport recherché :

$$\frac{F}{F'} = \frac{e}{e'}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_L}\right)^2 = 254.\left(\frac{1}{30}\right)^2 = 0,28 \qquad (101)$$

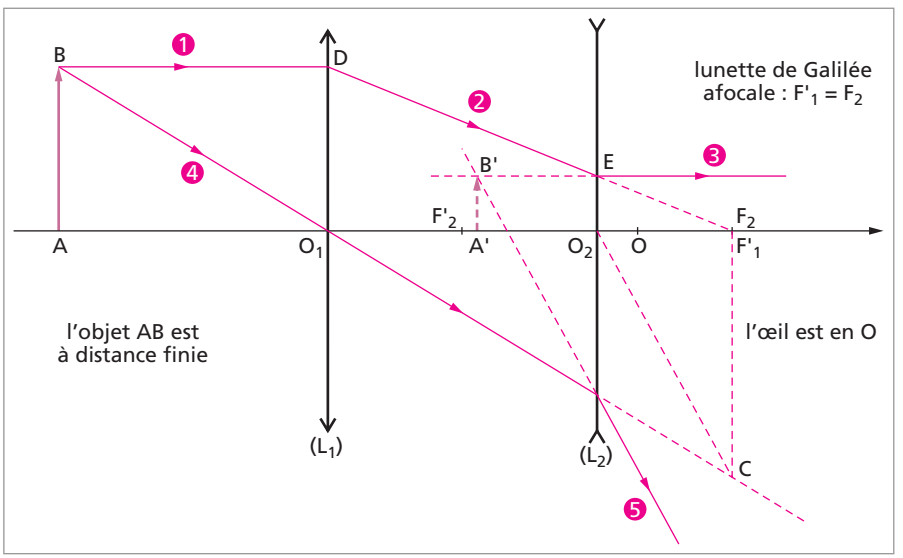
Observation à la lunette : *s est, maintenant, la surface de l'objectif* (en effet, toute la lumière collectée par l'objectif atteint effectivement la rétine – le diamètre du cercle oculaire ($\approx$ 2 mm) est inférieur au diamètre de la pupille ($\approx$ 3 mm)).
Pour la Lune, le flux lumineux total reçu est $F_{\text{tot}} = es$. Un élément rétinien reçoit $F = F_{\text{tot}}\,(\Omega_1/\Omega'_L) \approx es(\alpha_1/\alpha'_L)^2$.
Pour l'étoile, le flux lumineux total reçu est $F'_{\text{tot}} = e's$. Un élément rétinien reçoit $F' = F'_{\text{tot}}$
On en déduit le rapport F/F' dans le cas de l'observation à la lunette :

$$\frac{F}{F'} = \frac{e}{e'}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha'_L}\right)^2 = \frac{e}{e'}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_L}\right)^2\left(\frac{\alpha_L}{\alpha'_L}\right)^2 = \frac{0,28}{50^2} = 1,1.10^{-4} \qquad (102)$$

Conclusion : que ce soit pour l'observation de la Lune ou de l'étoile, il y a plus de lumière collectée quand on observe à la lunette. Cependant, avec l'étoile (objet ponctuel), toute la lumière reste concentrée sur un élément rétinien. En revanche, avec la Lune (objet étendu), un nombre plus grand d'éléments rétiniens est impressionné quand on fait l'observation à la lunette. Le flux lumineux, plus important que dans l'observation à l'œil nu, sera également plus étalé sur la rétine.

6 **CONSEIL : La relation de conjugaison de Newton montre, ici, toute son efficacité. Son utilisation est suggérée par l'énoncé car plusieurs quantités intervenant dans l'exercice ont leur origine au foyer de l'une des lentilles.**

1.



Dans la figure ci-dessus, le rayon BD est parallèle à l'axe optique. Donc DE passe par F'_1. D'autre part, F'_1 et F_2 sont confondus. Donc, ce rayon émerge de (L_2) parallèlement à l'axe optique (rayon 3). Le rayon BO_1 traverse (L_1) sans être dévié. Son prolongement coupe le plan focal objet de (L_2) en C. Ce rayon émerge de (L_2) en étant parallèle à O_2C (d'où le rayon 5 parallèle à O_2C). L'image B′ de B est à l'intersection des rayons 3 et 5. *L'image* A′B′ *de* AB *est virtuelle et droite. La lunette de Galilée est adaptée à l'observation d'objets terrestres.*

Le grandissement linéaire est :

$$\gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2E}}{\overline{O_1D}} = \frac{f_2}{f'_1} = \frac{1}{3} \tag{103}$$

Dans un système afocal, le grandissement linéaire est indépendant de la place de l'objet.

A et A′ étant conjugués dans la lunette, on a $A \overset{(L_1)}{\longmapsto} A'_1 \overset{(L_2)}{\longmapsto} A'$.

L'application de la relation de conjugaison de Newton conduit à :

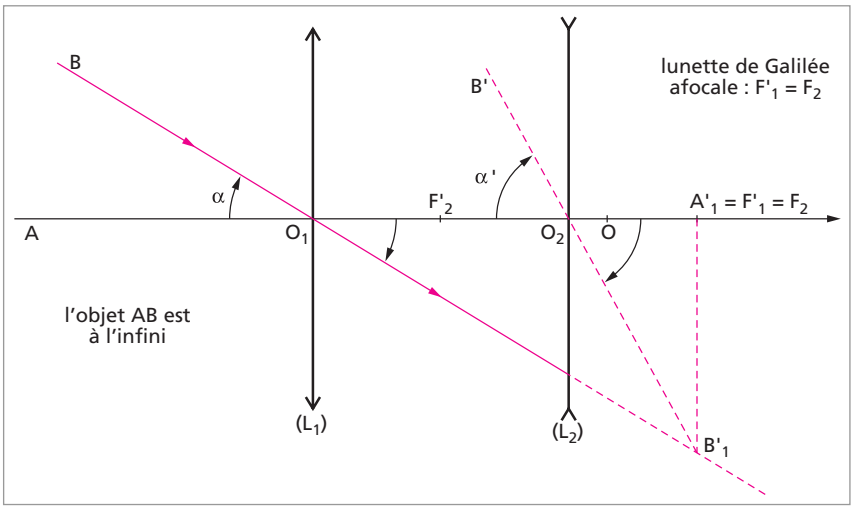
$$\overline{F_1A} \cdot \overline{F'_1A'_1} = -f_1'^2 \quad \text{pour} \quad (L_1) \tag{104}$$

$$\overline{F_2A'_1} \cdot \overline{F'_2A'} = -f_2'^2 \quad \text{pour} \quad (L_2) \tag{105}$$

En utilisant $F'_1 = F_2$ et en divisant membre à membre, on obtient :

$$\frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F_1A}} = \left(\frac{f'_2}{f'_1}\right)^2 = \frac{1}{9} \tag{106}$$

1.a. L'objet AB est maintenant à l'infini (voir figure ci-dessous).



On a : $B \overset{(L_1)}{\longmapsto} B'_1 \overset{(L_2)}{\longmapsto} B'$

B étant à l'infini, B'_1 est dans le plan focal image de (L_1) qui est aussi le plan focal objet de (L_2). B′ est donc à l'infini. Les angles α et α′ étant petits, on a :

$$\alpha \approx \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{O_1A'_1}} = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{f'_1} \quad ; \quad \alpha' \approx \frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{O_2A'_1}} = \frac{\overline{A'_1B'_1}}{f_2}$$

Le grossissement pour un objet à l'infini est donc égal à :

$$G_\infty \equiv \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{f_1'}{f_2} = 3 \tag{107}$$

On constate que $\gamma G_\infty = 1$.

1.b. L'objet AB est à distance finie (voir figure du 1.).

$$\text{On a :} \qquad \alpha \approx \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad ; \quad \alpha' \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \tag{108}$$

$$\text{d'où :} \qquad G \equiv \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\,\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \gamma\,\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{1}{3}\,\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \tag{109}$$

Exprimons $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ en fonction de x ($= \overline{F_1A}$). Pour cela, utilisons la relation (106) : $\overline{F_2'A'} = \overline{F_1A}/9 = x/9$. On a alors, en centimètres :

$$\overline{OA} = \overline{OF_1} + \overline{F_1A} \;=\; -27 + x \tag{110}$$

$$\overline{OA'} = \overline{OF_2'} + \overline{F_2'A'} \;=\; -7 + x/9 \tag{111}$$

En reportant dans (109), on obtient :

$$G = \frac{1}{3}\left(\frac{-27+x}{-7+x/9}\right) = 3\left(\frac{-27+x}{-63+x}\right) \qquad \text{avec } x \text{ en cm.} \tag{112}$$

On retrouve bien que $G \to 3$ quand $x \to -\infty$.

2. On veut que l'image finale soit dans le domaine de vision distincte c'est-à-dire qu'elle soit à une distance de l'œil comprise entre Δ et δ. Soit, algébriquement :

$$-\Delta \;<\; \overline{OA'} \;<\; -\delta \tag{113}$$

$$-\infty \;<\; \overline{OA'} \;<\; -20 \text{ cm} \tag{114}$$

$$-\infty \;<\; \overline{F_2'A'} = \overline{F_2'O} + \overline{OA'} \;<\; -13 \text{ cm} \tag{115}$$

$$-\infty \;<\; x = 9\,\overline{F_2'A'} \;<\; -117 \text{ cm} \tag{116}$$

$$-\infty \;<\; \overline{O_1A} \;<\; -117 - 15 = -132 \text{ cm} \tag{117}$$

À travers la lunette, l'observateur peut voir nettement tous les objets distants de l'objectif de la lunette d'au moins 1,32 m. Les valeurs extrêmes du grossissement sont :

$$G(x = -117 \text{ cm}) = 2,4 \quad ; \quad G(-\infty) = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2,4 < G < 3$$

3. La lunette doit donner de l'objet à l'infini une image qui se situe au *punctum remotum*, PR, de l'observateur si l'on veut que celui-ci effectue une observation sans accomoder (c'est-à-dire sans fatiguer sa vue). D'où :

$$\text{A à l'infini} \quad \overset{(L_1)}{\longmapsto} \quad A_1' \,(= F_1') \quad \overset{(L_2)}{\longmapsto} \quad A' = \text{PR}$$

Ce qui impose $\overline{OA'} = -25$ cm.
On modifie la position de O_1, centre de l'objectif (L_1), et la lunette ne va plus être afocale. Toutefois, on continuera d'avoir $\overline{O_2O} = +2$ cm et $\overline{F_2'O} = +7$ cm ; d'où l'on déduit : $\overline{F_2'A'} = \overline{F_2'O} + \overline{OA'} = +7 - 25 = -18$ cm.

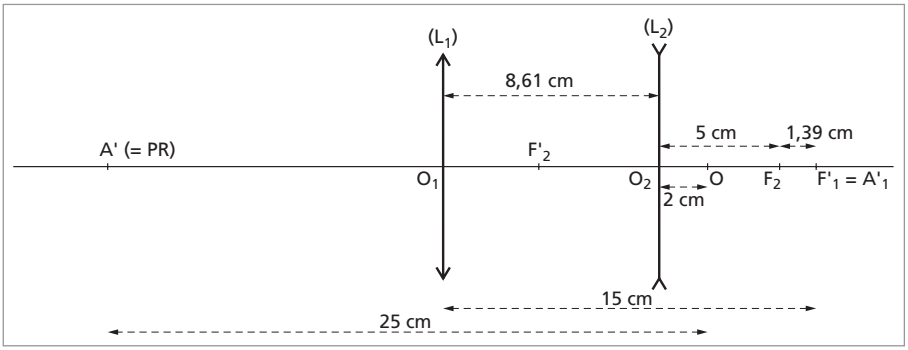
La relation de conjugaison de Newton appliquée à (L_2) donne :

$$\overline{F_2A'_1}.\overline{F'_2A'} = -f'^2_2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{F_2A'_1} = +1,39 \text{ cm} = \overline{F_2F'_1} \tag{118}$$

On obtient ainsi la nouvelle valeur du tirage $\overline{O_1O_2}$:

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2O_2} = 15 - 1,39 - 5 = 8,61 \text{ cm} \tag{119}$$

Ce qui conduit à la figure ci-dessous.



7 **CONSEIL : Cet exercice, très complet, passe en revue pratiquement toutes les notions de base concernant les instruments d'optique. Avant de l'aborder, il est souhaitable d'avoir étudié les parties 1, 2 et 3 du cours. La relation de conjugaison de Newton, utilisée à plusieurs reprises, est à retenir. La notion importante d'aplanétisme est discutée dans les questions 3) et 4). Le critère de Rayleigh que tout candidat au CAPES doit connaître absolument est présenté dans la question 5).**

1.1. Rappelons les conditions de Gauss :

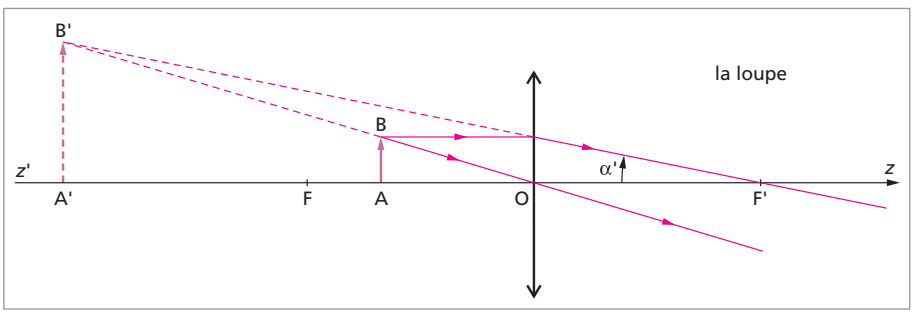
– les rayons lumineux font un petit angle avec l'axe optique ;

– les angles d'incidence sur les surfaces sont faibles.

Formules de Descartes (avec $p = \overline{OA}$; $p' = \overline{OA'}$; $f = \overline{OF}$; $f' = \overline{OF'} = -f$) :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \qquad \gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p} \tag{120}$$

1.2.a.



$$\sigma \equiv \overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = -f + p \implies p = f + \sigma$$
$$\sigma' \equiv \overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'} = -f' + p' \implies p' = f' + \sigma'$$

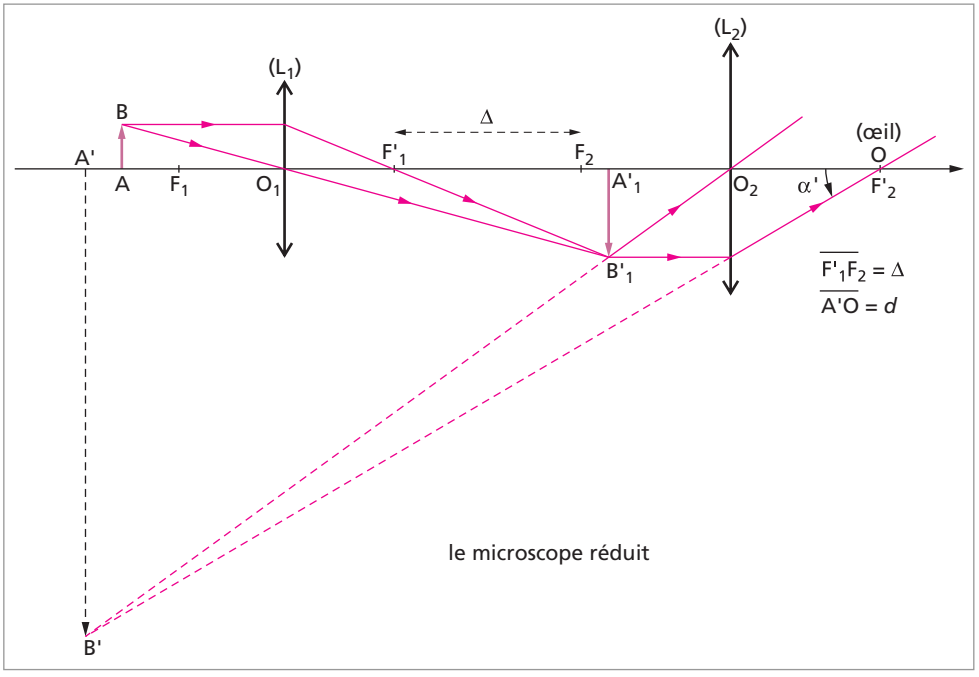
En reportant p et p' dans la formule de conjugaison de Descartes et en utilisant $f' = -f$, on obtiendra la formule de Newton :

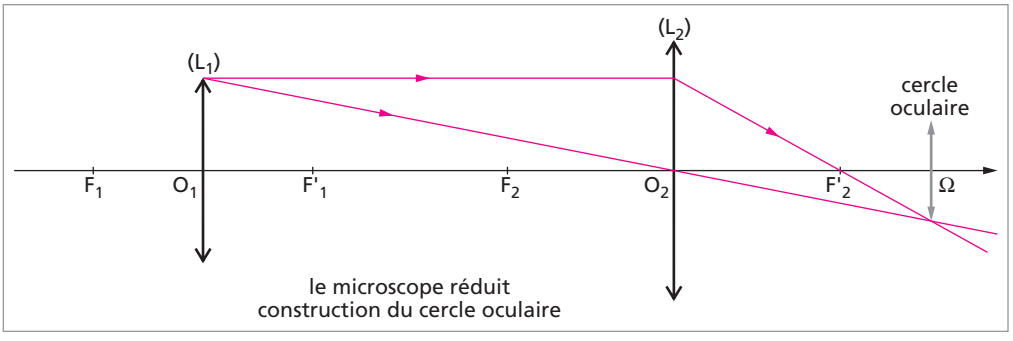
$$\sigma\sigma' = -f^2 = -f'^2 = ff' \tag{121}$$

1.2.b.

$$\alpha' \approx -\frac{\overline{AB}}{f'} \qquad P_L = \left|\frac{\alpha'}{\overline{AB}}\right| \approx \frac{1}{f'} \tag{122}$$

2.1.a.





A'_1 doit se placer entre F_2 et O_2 pour que l'oculaire joue le rôle de loupe. Dans la pratique, A'_1 est très près de F_2.

2.1.b. A'_1 et A' sont conjugués par rapport à (L_2) ; la formule de Newton conduit à :

$$\overline{F_2A'_1}.\overline{F'_2A'} = -f'^2_2 \quad ; \quad \overline{F'_2A'} \approx \overline{OA'} = -d \quad \Longrightarrow \quad \overline{F_2A'_1} \approx \frac{f'^2_2}{d} \tag{123}$$

$$\gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'_1B'_1}}.\frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A'_1}}.\frac{\overline{O_1A'_1}}{\overline{O_1A}} \approx \frac{-d}{-f'_2}.\frac{\Delta}{-f'_1} = -\frac{d\Delta}{f'_1f'_2} \tag{124}$$

$$P = \left|\frac{\alpha'}{AB}\right| = \left|\frac{\alpha'}{A'B'}\right|.\left|\frac{A'B'}{AB}\right| \approx \frac{1}{d}.|\gamma| = \frac{\Delta}{f'_1f'_2} \tag{125}$$

Numériquement : $\overline{F_2A'_1} = 1,7$ mm ; $P = 4390\ \delta$.

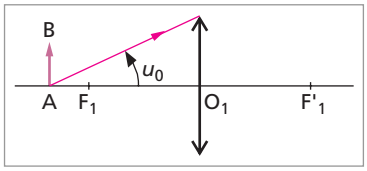
2.2.

$$P = \left|\frac{\alpha'}{\delta_0}\right| \geqslant \frac{\epsilon}{\delta_0} \geqslant \frac{\epsilon_{\min}}{\delta_0} \quad \Longrightarrow \quad P_{\min} = \frac{\epsilon_{\min}}{\delta_0} = 2174\ \delta \tag{126}$$

2.3.a. O_1 et Ω sont conjugués par rapport à (L_2). La formule de Newton s'écrit :

$$\overline{F_2O_1}.\overline{F'_2\Omega} = -f'^2_2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{F'_2\Omega} = \frac{-f'^2_2}{-\Delta - f'_1} \approx \frac{f'^2_2}{\Delta} \tag{127}$$

D'où l'on déduit que $\overline{F'_2\Omega}/f'_2 \approx f'_2/\Delta \ll 1$. Le cercle oculaire est pratiquement dans le plan focal objet de (L_2). Comme c'est au niveau du cercle oculaire que le faisceau de lumière est le plus étroit, c'est ici, c'est-à-dire pratiquement en F'_2, que l'observateur doit placer son œil.



$$\frac{a}{D} = \frac{O_2\Omega}{O_1O_2} \approx \frac{f'_2}{\Delta} \quad \Longrightarrow \quad a \approx \frac{Df'_2}{\Delta} \tag{128}$$

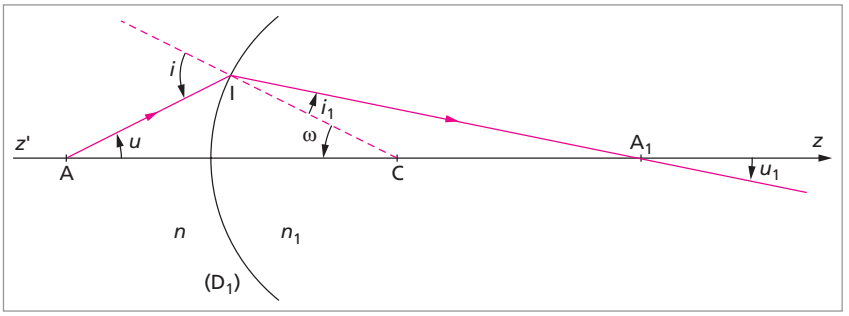
$$P = \frac{\Delta}{f'_1f'_2} = \frac{D}{af'_1} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{D}{Pf'_1} \tag{129}$$

Donc a décroît si P croît. Numériquement : $\overline{F'_2\Omega} = 2,33$ mm ; $D = 10,54$ mm

$$\tan u_0 \approx (D/2)/f'_1 \quad \Longrightarrow \quad u_0 \approx 69^0.$$

L'objectif ne fonctionne pas dans les conditions de Gauss – contrairement à l'oculaire.

3. Le microscope réel



3.1. Dans le triangle IAC, on a :

$$\frac{\sin(\pi - i)}{\overline{AC}} = \frac{\sin\omega}{\overline{AI}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\omega = \sin i \, \frac{\overline{IA}}{\overline{CA}} \tag{130}$$

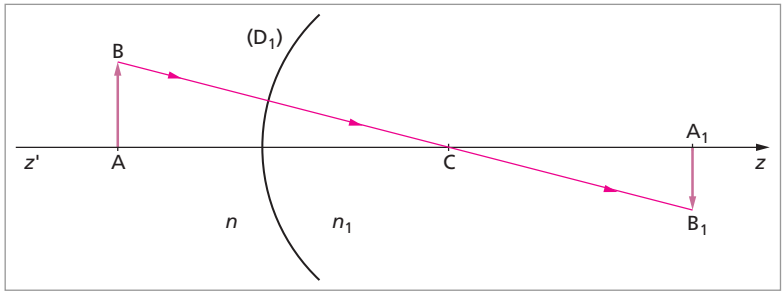
Dans le triangle ICA_1, on a :

$$\frac{\sin(\pi - \omega)}{\overline{IA_1}} = \frac{\sin i_1}{\overline{CA_1}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\omega = \sin i_1 \, \frac{\overline{IA_1}}{\overline{CA_1}} \tag{131}$$

En égalant les deux expressions précédentes de $\sin\omega$ et en utilisant la loi de Descartes pour la réfraction, $n_1 \sin i_1 = n \sin i$, on établit facilement que :

$$n\frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n_1\frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1}} \tag{132}$$

3.2.



$AB \perp z'z \quad \Longrightarrow \quad A_1B_1 \perp z'z$ d'après l'hypothèse d'aplanétisme.

D'autre part, un rayon passant par C n'est pas dévié. On en déduit que B, C et B_1 sont alignés. D'où, à l'aide du théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}} \tag{133}$$

Des équations (132) et (133), on déduit :

$$n\frac{\overline{AB}}{\overline{IA}} = n_1\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{IA_1}} \tag{134}$$

De plus, dans le triangle IAA_1, on a la relation :

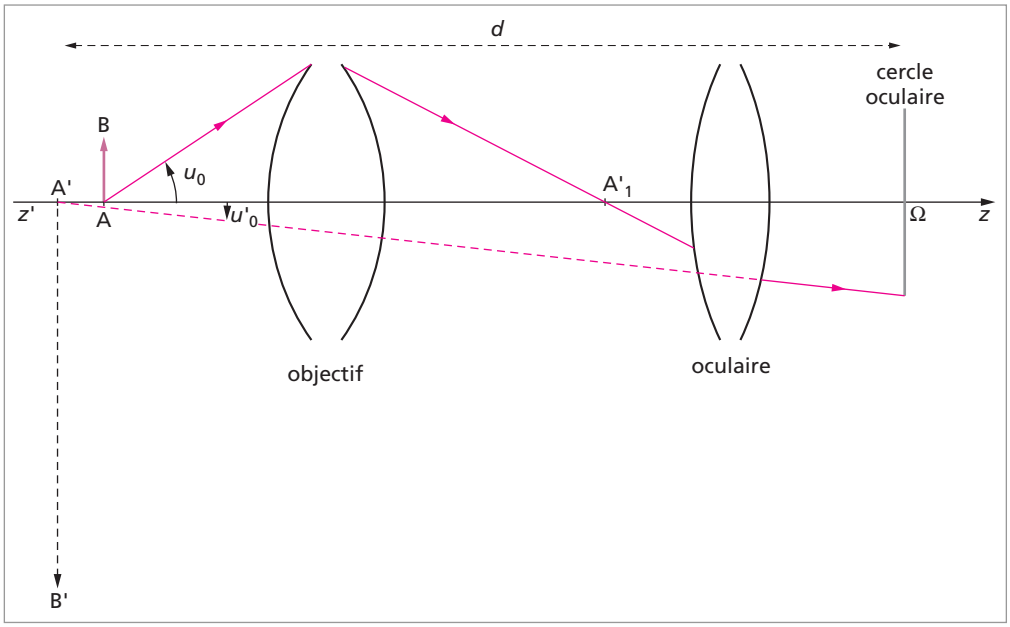
$$\frac{\sin u}{\overline{IA_1}} = \frac{\sin u_1}{\overline{IA}} \tag{135}$$

En combinant avec (134), on établit la relation désirée :

$$n\overline{AB}\sin u = n_1\overline{A_1B_1}\sin u_1 \tag{136}$$

qui constitue la condition d'aplanétisme d'Abbe.

4.



4.1. La lumière traverse une série de dioptres. Lors de la traversée de chaque dioptre la quantité « $n\overline{AB}\sin u$ » est conservée. On a donc $(n\overline{AB}\sin u)_{\text{initial}} = (n\overline{AB}\sin u)_{\text{final}}$ d'où, avec les notations de la question et, également, $n' = 1$:

$$n\overline{AB}\sin u_0 = \overline{A'B'}\sin u'_0 \tag{137}$$

4.2.a. $\overline{A'B'} \approx -d\,\alpha'$; $\sin u'_0 \approx -(a/2)/d$.

$$P = \left|\frac{\alpha'}{AB}\right| = \left|\frac{\alpha'}{A'B'}\,\frac{A'B'}{AB}\right| \approx \frac{1}{d}\left|\frac{n\sin u_0}{\sin u'_0}\right| = \frac{2\,n\,\sin u_0}{a} = \frac{2\,O_n}{a} \tag{138}$$

$$\text{D'où :}\quad a = \frac{2\,O_n}{P} \tag{139}$$

À l'aide de la condition $\alpha' \geqslant \epsilon$, on peut écrire :

$$P = \left|\frac{\alpha'}{\mathrm{AB}}\right| \geqslant \frac{\epsilon}{\mathrm{AB}} \implies \mathrm{AB} \geqslant \frac{\epsilon}{P} \implies \delta = \frac{\epsilon}{P} = \frac{\epsilon\, a}{a\, P} = \frac{\sigma}{2\,\mathrm{O}_n} \qquad (140)$$

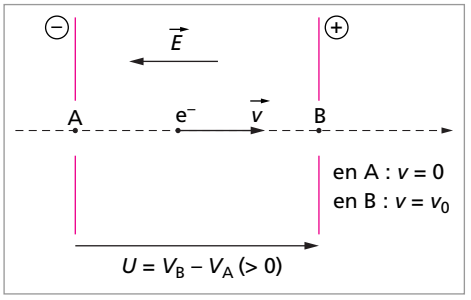
4.2.b. On abaisse la valeur de δ en choisissant σ le plus petit possible et O_n le plus grand possible (ce qui implique notamment que $\sin u_0$ soit grand, donc que l'objectif ne fonctionne pas dans les conditions de Gauss). A.N. $a\,P = 2,6$.

5. On sait que a est inférieur à a_P. C'est donc le cercle oculaire qui diffracte. Revenons à l'expression de la puissance P :

$$P = \left|\frac{\alpha'}{\mathrm{AB}}\right| = \frac{2\,\mathrm{O}_n}{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{AB} = \frac{a\,|\alpha'|}{2\,\mathrm{O}_n} \geqslant \frac{a\,(1,22\lambda/a)}{2\,\mathrm{O}_n} = \frac{0,61\,\lambda}{\mathrm{O}_n} \qquad (141)$$

D'où la limite de résolution intrinsèque dûe à la diffraction :

$$\delta_0 = \frac{0,61\,\lambda}{\mathrm{O}_n} = 0,23\ \mu\mathrm{m} \qquad (142)$$



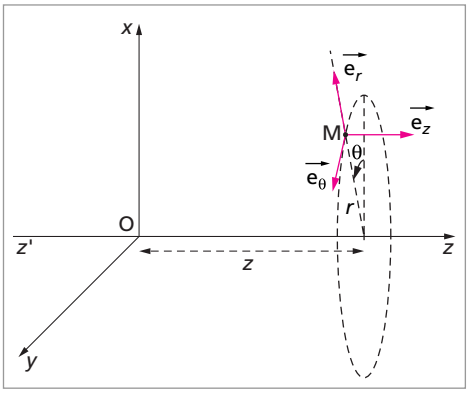
6.1. Avec le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = q(V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B}) = -e(-U) = eU$$

D'où $U = mv_0^2/(2e) = 2,6$ kV.

6.2. L'électron subit la force de Lorentz, $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, qui est orthogonale à $\vec{v}$ donc qui ne travaille pas. Le théorème de l'énergie cinétique montre que $\|\vec{v}\|$ est conservé. Par contre, la direction de $\vec{v}$ est modifiée par l'action du champ magnétique.
Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au mouvement d'un électron :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad (143)$$



D'autre part, en coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_z\vec{e}_z \qquad \text{car } B_\theta = 0 \qquad (144)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \qquad (145)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \qquad (146)$$

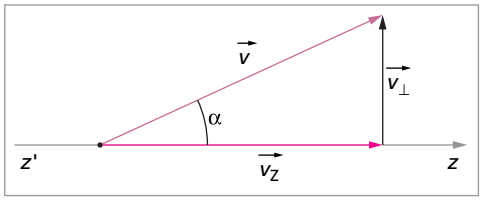
En reportant dans l'équation (143), on obtient les 3 équations suivantes :

$$\text{sur } \vec{e}_r \qquad \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \frac{q}{m}\left(r\dot{\theta}B_z\right) \tag{147}$$

$$\text{sur } \vec{e}_\theta \qquad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{q}{m}\left(\dot{z}B_r - \dot{r}B_z\right) \tag{148}$$

$$\text{sur } \vec{e}_z \qquad \ddot{z} = \frac{q}{m}\left(-r\dot{\theta}B_r\right) \tag{149}$$

Rappelons que $q = -e$.



6.3. $v^2 = v_0^2 = v_z^2 + v_\perp^2 = v_z^2(1 + \tan^2\alpha)$. Or, $\tan\alpha \ll 1$. Donc $v_0 \approx v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

6.4. Dérivons la quantité $r^2\dot{\theta}$ par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{q}{m}\left(r\dot{z}B_r - r\dot{r}B_z\right) \tag{150}$$

(On a utilisé l'équation (148)). D'autre part, d'après l'énoncé :

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad r\dot{z}B_r - r\dot{r}B_z = r\dot{z}\left(-\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) - r\dot{r}B_z \tag{151}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(r^2\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + 2r\dot{r}B_z\right) = -\frac{1}{2}\left(r^2\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t}B_z\right) \tag{152}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2B_z\right) \tag{153}$$

Finalement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = -\frac{q}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2B_z\right) = \mathrm{K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2B_z\right) \tag{154}$$

avec $\mathrm{K} = \dfrac{e}{2m}$. En intégrant par rapport au temps avec $\dot{\theta} = 0$ si $B = 0$, on a :

$$r^2\dot{\theta} = \frac{e}{2m}r^2B_z \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{e}{2m}B_z \tag{155}$$

6.5.a. Les équations (147) et (155) donnent :

$$\ddot{r} = -\frac{re^2}{4m^2}B_z^2 \tag{156}$$

En outre $\dot{r} = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}z)(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t) \approx (\mathrm{d}r/\mathrm{d}z)v_0$; $\ddot{r} \approx (\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}z^2)v_0^2$. On reporte dans (156), et on obtient finalement :

$$v_0^2 \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{r\mathrm{e}^2}{4m^2} B_z^2 \tag{157}$$

6.5.b. Compte tenu de $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \tan\alpha$, l'équation précédente s'écrit :

$$v_0^2 \frac{\mathrm{d}\,\tan\alpha}{\mathrm{d}z} = -\frac{r\mathrm{e}^2}{4m^2} B_z^2 \tag{158}$$

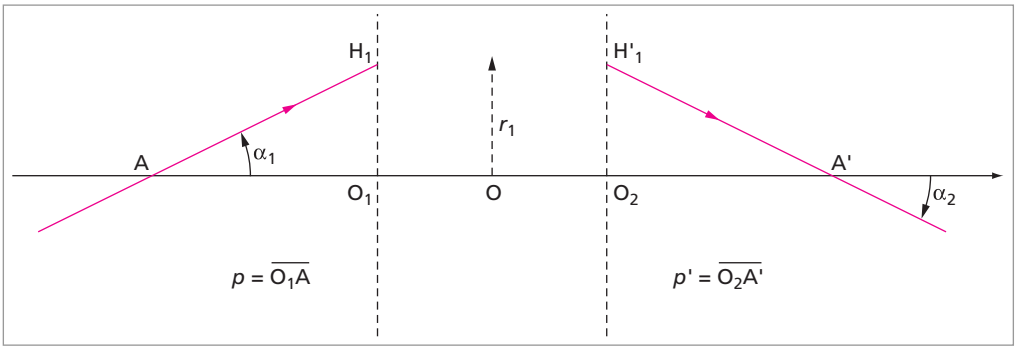
On intègre entre z_1 et z_2 :

$$v_0^2\,(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) = -\frac{\mathrm{e}^2}{4m^2}\int_{z_1}^{z_2} r B_z^2\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{e}^2}{4m^2}\,S \tag{159}$$

Soit :

$$\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1 = -\frac{\mathrm{e}^2 S}{4m^2 v_0^2} < 0. \quad \text{Donc, la lentille est convergente.} \tag{160}$$

6.5.c. (Voir la figure ci-dessous).



$$\tan\alpha_1 = -\frac{r_1}{p} \qquad \tan\alpha_2 = -\frac{r_1}{p'}$$

En reportant dans (160), on obtient :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

avec :

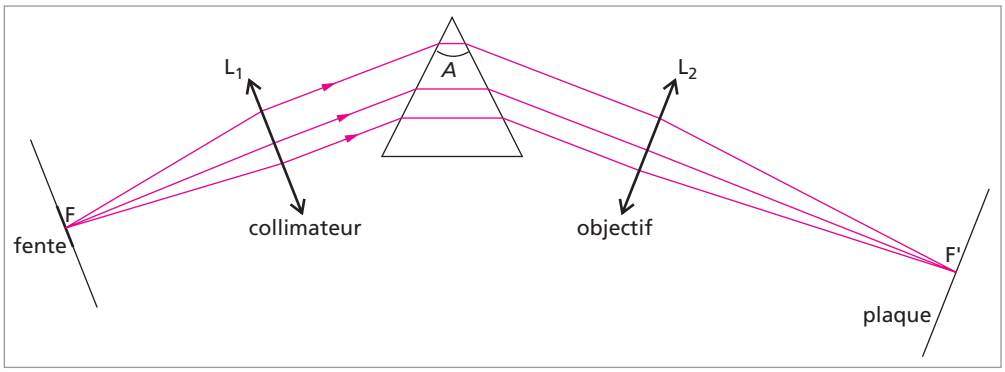
$$f' = \frac{4\,m^2\,v_0^2\,r_1}{\mathrm{e}^2\,S} = \frac{4\,m^2\,v_0^2}{\mathrm{e}^2(z_2 - z_1)B_1^2} = 0,23\ \mathrm{m} \tag{161}$$

6.6. Limite de résolution du microscope électronique :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v_0} \quad ; \quad \delta_\varepsilon = \frac{0,61\,\lambda}{\sin u_0} = \frac{0,61\,h}{m\,v_0 \sin u_0} = 1,5\ \mathrm{nm} \tag{162}$$

La constante de Planck h s'exprime en J.s (unité d'action).

8 **CONSEIL : Il convient d'avoir étudié la partie 3 page 476 avant d'aborder cet exercice qui, en fait, la complète. Les formules du prisme sont à connaître absolument.**



1. Formules du prisme (en notation « standard ») :

$$\sin i = n \sin r \qquad \sin i' = n \sin r' \qquad r + r' = A \qquad D = i + i' - A \tag{163}$$

Au minimum de déviation, on a :

$$i = i' \qquad r = r' = \frac{A}{2} \qquad D_m = 2i - A \tag{164}$$

2. La source étant supposée infiniment fine, i est le même pour les deux radiations. On va différentier les équations (163) avec i et A constants :

$$0 = \mathrm{d}n \sin r + n \cos r \, \mathrm{d}r \tag{165}$$

$$\cos i' \, \mathrm{d}i' = \mathrm{d}n \sin r' + n \cos r' \, \mathrm{d}r' \tag{166}$$

$$\mathrm{d}r + \mathrm{d}r' = 0 \tag{167}$$

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}i' \tag{168}$$

Pour chacune des 2 radiations, les relations (164) sont vraies de manière approchée. Des équations (164), (166) et (167), on déduit :

$$\cos i \, \mathrm{d}i' = \mathrm{d}n \sin r - n \cos r \, \mathrm{d}r \tag{169}$$

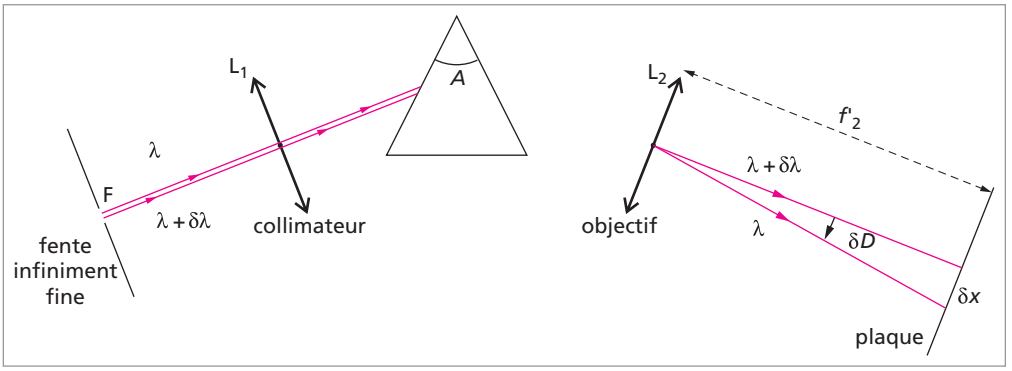
En sommant membre à membre les éqs.(165) et (169), on obtient :

$$\cos i \, \mathrm{d}i' = 2 \, \mathrm{d}n \sin r \tag{170}$$

Les équations (168), (170) et (163), conduisent à :

$$\mathrm{d}D = \frac{2 \, \mathrm{d}n \sin r}{\cos i} = \frac{2 \, \mathrm{d}n}{n} \tan i \tag{171}$$

Dans un souci de clarté, on n'indique sur les figures pages suivantes que les *directions* des rayons émergeant du prisme c'est-à-dire les rayons sortant par le centre de la lentille L_2.



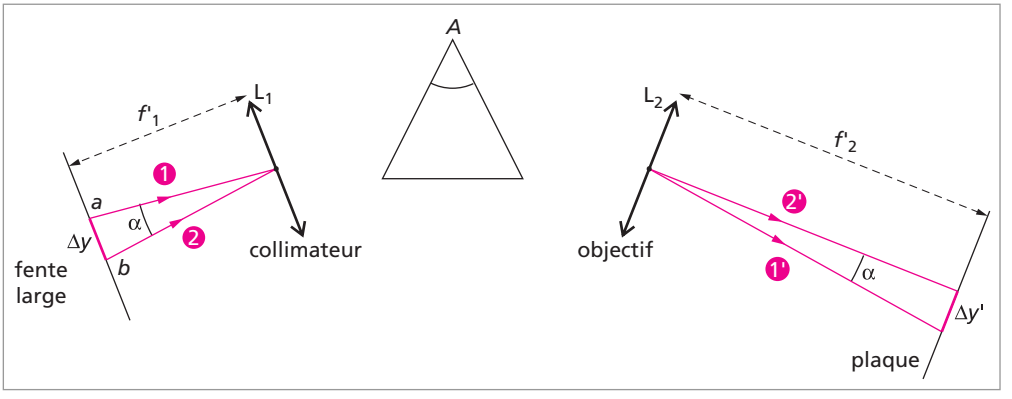
dD étant un angle petit, on a :

$$\mathrm{d}x \approx f_2' \, \mathrm{d}D$$

d'où, pour une petite variation δn de l'indice :

$$\delta x = 2 \, \frac{\delta n}{n} \, \tan i \, f_2' \qquad (172)$$

3. La fente-source a maintenant des bords a et b séparés d'une distance Δy. Les rayons issus de a subiront, à cause du prisme, une déviation approximativement égale à D_m (la courbe $D = f(i)$ est très plate au voisinage de son minimum). Il en ira de même pour ceux issus de b. On est donc conduit à la figure ci-dessous.



D'où l'on déduit :

$$\alpha \approx \frac{\Delta y}{f_1'} \approx \frac{\Delta y'}{f_2'} \quad \Longrightarrow \quad \Delta y' = \Delta y \, \frac{f_2'}{f_1'} \qquad (173)$$

4. Les deux longueurs d'onde seront séparées si $\delta x \geqslant \Delta y'$. La limite de résolution est atteinte lorsque l'égalité est réalisée. On aura alors :

$$2 \, \frac{\delta n}{n} \, \tan i \, f_2' = \Delta y \, \frac{f_2'}{f_1'} \qquad (174)$$

Soit :

$$\frac{1}{\delta n} = \frac{2\,\tan i\, f_1'}{n\,\Delta y} \tag{175}$$

On en déduit le pouvoir de résolution du spectrographe si les effets de diffraction sont négligés :

$$R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \left(\frac{\lambda\,\delta n}{\delta\lambda}\right)\frac{1}{\delta n} = \left(\frac{\lambda\,\delta n}{\delta\lambda}\right)\left(\frac{2\,\tan i\, f_1'}{n\,\Delta y}\right) \tag{176}$$

et, finalement, la relation cherchée :

$$R = 2\,\tan i\,\frac{f_1'}{\Delta y}\,\frac{\mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\,n)}{\mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\,\lambda)} \tag{177}$$

5. Au minimum de déviation, $r = A/2 = 30^0$; $\sin i = n \sin r = 0,825$; $\tan i = 1,46$.
La condition de séparation des raies est $\delta x \geqslant \Delta y'$ soit :

$$2\,\frac{\delta n}{n}\,\tan i \geqslant \frac{\Delta y}{f_1'} \tag{178}$$

Pour calculer δn, on utilise les données de l'énoncé : à une variation de λ de 350 nm correspond une variation de l'indice de 0,04. Pour un $\delta\lambda$ de $0,1$ nm, on aura donc approximativement : $\delta n = 0,04 \times 0,1/350 = 1,14.10^{-5}$. En reportant les valeurs de δn et $\tan i$ dans (178), on aboutit, finalement, à la condition $\Delta y \leqslant 20$ µm.

9 **CONSEIL : Il est souhaitable avant de résoudre cet exercice d'avoir étudié la partie 4 page 477.**

1.1.a. On a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

1.1.b. On aura réflexion totale si $n_1 > n_2$ et si $i_1 > i_{1\max}$ avec :
$n_1 \sin i_{1\max} = n_2 \sin(\pi/2)$ soit $\sin i_{1\max} = n_2/n_1$. ($i_{1\max}$ est l'angle de réfraction limite quand la lumière va du milieu d'indice n_2 vers le milieu d'indice n_1).

1.2.a. En appliquant la deuxième loi de Descartes aux deux dioptres sucessifs, on obtient

$$n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}$$

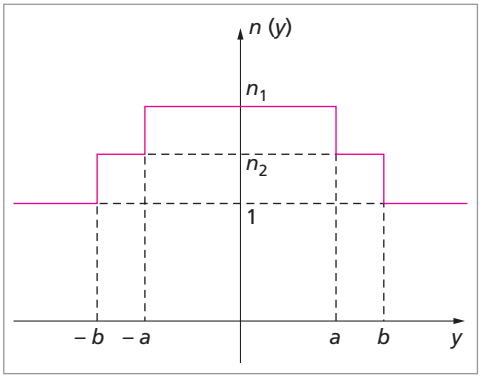
1.2.b. La relation ci-dessus montre que la quantité $n_j \sin i_j$ est constante (indépendante de j).

1.3.a. Le milieu à gradient d'indice peut être considéré comme un milieu multicouche dont l'épaisseur de chacune des couches tend vers 0. Dans ces conditions, la grandeur n_j devient une fonction $n(y)$. La question précédente montre alors que la quantité $n(y) \sin i$ est constante le long du rayon.

1.3.b. D'après l'énoncé, $\vec{e}_{\mathrm{N}}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n(y) = n(y)/R > 0$.
Or, $\vec{e}_{\mathrm{N}} = e_{\mathrm{N}x}\,\vec{e}_x + e_{\mathrm{N}y}\,\vec{e}_y$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n(y) = \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\vec{e}_y$. On en déduit $e_{\mathrm{N}y}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} > 0$.

Or, d'après la figure, e_{Ny} est négatif. Donc $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ l'est également. Ainsi, n est une fonction décroissante de y. Remarquons que le rayon lumineux a sa concavité orientée dans le sens des n croissants.

2.1.a. Voir figure ci-contre.



2.1.b. On doit avoir réflexion totale au niveau du dioptre coeur-gaine, ce qui conduit à :

$$i > i_{\max} \quad \text{avec} \quad \sin i_{\max} = n_2/n_1.$$

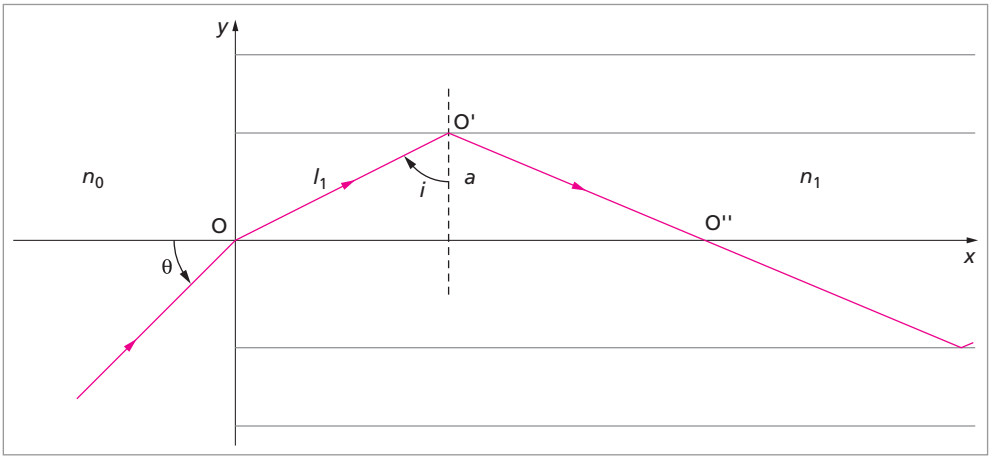
2.1.c. La deuxième loi de Descartes appliquée au dioptre d'entrée donne :

$$n_0 \sin \Theta = n_1 \sin(\pi/2 - i)$$

soit $n_0 \sin \Theta = n_1 \cos i$.
D'autre part $i > i_{\max}$ entraîne que $\cos i < \cos i_{\max}$ avec $\cos i_{\max} = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}$.
On a donc, finalement $n_0 \sin \Theta < n_1 \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}$ soit, avec $n_0 = 1$, $\sin \Theta < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.
Ce qui équivaut à $\Theta < \Theta_0$ avec $\Theta_0 = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

2.1.d. L'ouverture numérique est $\Omega = n_0 \sin \Theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

2.1.e.



D'après la figure précédente, l étant la distance parcourue entre le point O et le point de $q^{\text{ième}}$ réflexion, on a $(L) = n_1 l = n_1(2q - 1)l_1$ avec $l_1 = \mathrm{OO'}$ (O' est le point de première réflexion). $l_1 = a/\cos i = an_1/\sin \Theta$. D'où $(L) = (2q - 1)\dfrac{an_1^2}{\sin \Theta}$.

2.1.f. Toujours d'après la figure précédente : $x_k = k\ \mathrm{OO''}$ avec $\mathrm{OO''} = 2l_1 \sin i$.
Or, $\sin\Theta = n_1 \cos i$, d'où $\sin i = \sqrt{1-(\sin\Theta/n_1)^2}$. Ce qui conduit à :

$$\mathrm{OO''} = \frac{2\ a\ n_1}{\sin\Theta}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\Theta}{n_1}\right)^2}$$

et, finalement, au résultat :

$$x_k = 2ka\sqrt{\frac{n_1^2}{\sin^2\Theta}-1}$$

2.1.g. Numériquement, on obtient $\Theta_0 = 20,3^0$ et $\Omega = 0,35$.

2.2.1. Vu son inclinaison, le rayon lumineux parcourt, en réalité, la distance $x/\sin i$ et, ceci, à la vitesse c/n_1. D'où :

$$t = \frac{xn_1}{\mathrm{c}\sin i} = \frac{xn_1}{\mathrm{c}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\Theta}{n_1}\right)^2}}$$

Plus l'angle Θ est grand et plus le temps mis pour atteindre le plan d'abscisse x est important.

2.2.2.a. Pour $\Theta = 0$, on a : $t = xn_1/\mathrm{c}$
Pour $\Theta = \Theta_0$, on a :

$$t + \Delta t = \frac{xn_1}{\mathrm{c}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\Theta_0}{n_1}\right)^2}} = \frac{xn_1}{\mathrm{c}}\frac{n_1}{n_2}$$

D'où :

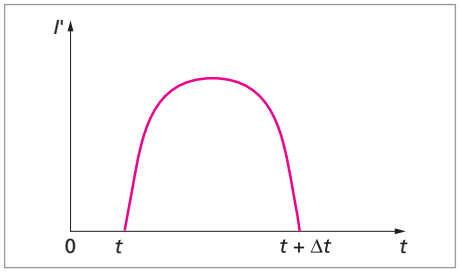
$$\Delta t = \frac{xn_1}{\mathrm{c}}\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)$$

2.2.2.b. La forme précise de la courbe $I' = f(t)$ dépendra de la répartition angulaire de l'intensité lumineuse à l'entrée. Qualitativement, on peut tracer le profil suivant.

2.2.2.c. Le détecteur pourra séparer les deux signaux si $\tau \geqslant \Delta t$. On aura donc : $\tau_m = \Delta t$.

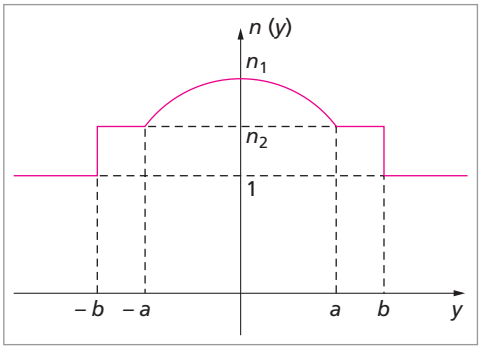
2.2.2.d. $\nu_{\mathrm{M}} = 1/\tau_m = 1/\Delta t$
$= \mathrm{c}n_2/(xn_1(n_1-n_2)) = 7,3.10^6$ impulsions par seconde.

2.2.2.e. a n'intervient pas dans l'expression de ν_{M}. On peut donc dire que la variation de a n'influence pas ν_{M} si l'on reste dans le cadre de l'optique géométrique.



2.2.2.f. La diffraction n'intervient pratiquement pas ici car le paramètre λ/a est très petit devant 1 ($\lambda/a \approx 0,02$). Ceci justifie le traitement précédent à l'aide de l'optique géométrique.

3.1. Voir figure ci-contre.



3.2. D'après la question 1.3.b), le rayon lumineux a sa concavité orientée vers les n croissants. Ainsi, le vecteur $\vec{e}_N$ pointera systématiquement vers l'axe des x c'est-à-dire vers la région où n est maximum.

3.3. $(1-X)^\alpha \approx 1 - \alpha X$ si $|X| \ll 1$.
Or, $\dfrac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$ et $|y| < a$. On a donc :

$$n(y) \approx n_1(1 - Ay^2) \text{ avec } A = \frac{n_1 - n_2}{n_1 a^2}\ .$$

3.4. $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \approx dx$ si $|dy/dx| \ll 1$. La tangente aux rayons doit donc faire un angle faible avec l'axe optique (conditions de Gauss). Pratiquement, ceci implique que l'angle d'incidence Θ, à l'entrée de la fibre, soit faible.

3.5. Comme $ds \approx dx$, on peut écrire :

$$\vec{u} = \frac{dx}{ds}\vec{e}_x + \frac{dy}{ds}\vec{e}_y \approx \vec{e}_x + \frac{dy}{dx}\vec{e}_y$$

D'autre part, $\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}\, n$. On a donc :

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} \approx \frac{d(n\vec{u})}{dx} = n\frac{d\vec{u}}{dx} = n\frac{d^2y}{dx^2}\vec{e}_y = \overrightarrow{\text{grad}}\, n = \frac{dn}{dy}\vec{e}_y$$

D'où $n\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dn}{dy}$. Soit $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(n)\dfrac{dn}{dy}$ avec $f(n) = 1/n$.

3.6. On a, d'après la question 3.3, $\dfrac{dn}{dy} = -2An_1y$. Ce qui entraîne
$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{n}\dfrac{dn}{dy} = \dfrac{1}{n_1(1-Ay^2)}\dfrac{dn}{dy} \approx \dfrac{1}{n_1}\dfrac{dn}{dy} = -2Ay$ et, finalement :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + By = 0 \qquad \text{avec} \qquad B = 2A = 2\,\frac{n_1 - n_2}{n_1 a^2}$$

3.7. La solution générale de l'équation précédente s'écrit $y(x) = \alpha\sin(\sqrt{B}x) + \beta\cos(\sqrt{B}x)$.
Le rayon étant injecté en O sous l'angle Θ, on a $y(0) = 0$ soit $\beta = 0$.
De plus, la relation $n_0 \sin\Theta = n_1 \sin\Theta'$ conduit, avec Θ et Θ' petits, à $n_0\Theta \approx n_1\Theta'$.

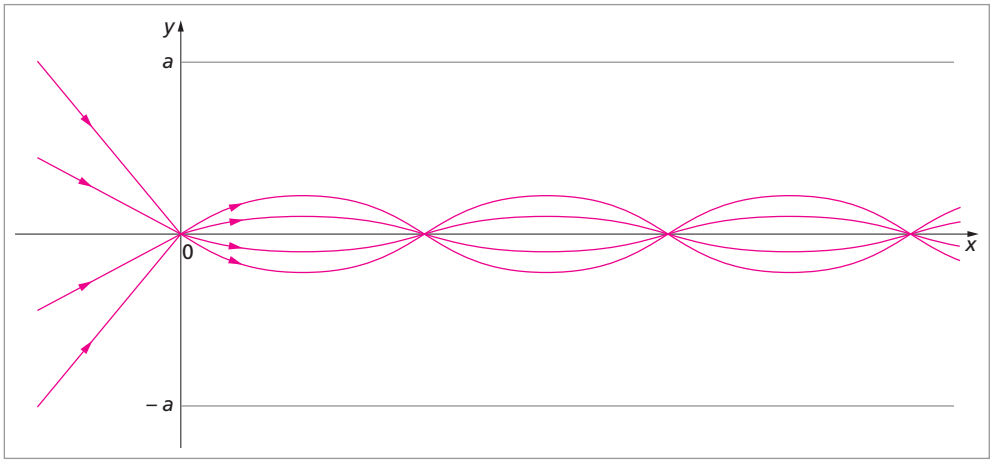
Enfin, $y'(0) = \alpha\sqrt{B} = \text{tg}\Theta' \approx \Theta' = \Theta/n_1$. D'où $\alpha = \Theta/(n_1\sqrt{B})$ et le résultat final :

$$y(x) = \frac{\Theta}{n_1\sqrt{B}}\sin(\sqrt{B}x)$$

3.8. On doit avoir $\sqrt{B}\ x = k\pi$ (k entier) d'où $x = k\pi/\sqrt{B}$. Ces abscisses sont indépendantes de Θ.

3.9. $\vec{u}$ est parallèle à Ox quand $|y(x)|$ est maximum donc quand $|\sin(\sqrt{B}x)| = 1$. On a alors : $|y_M/a| = \dfrac{\Theta}{an_1\sqrt{B}} = \dfrac{\Theta}{\sqrt{2n_1(n_1 - n_2)}} \approx 2,9.10^{-2}$. Les approximations faites auparavant sont donc justifiées.

3.10.



3.11. Avec les fibres à gradient d'indice, l'inclinaison des rayons n'entraîne pratiquement aucun élargissement du signal, contrairement à ce que l'on a vu pour les fibres à saut d'indice. La capacité de transmission des fibres à gradient d'indice est donc bien supérieure.

4.1. $\Sigma = \dfrac{10}{25}\log 10 = \dfrac{10}{25} = 0,4$ dB/km.

Chapitre 7

Optique ondulatoire

Ce chapitre expose les conséquences de la nature ondulatoire de la lumière. Une première partie (§ 1 à 4) présente les propriétés de la lumière en tant qu'onde électromagnétique. Elle complète ainsi le chapitre d'électromagnétisme et celui sur les ondes. Les deuxième et troisième parties traitent des phénomènes d'interférence (§ 5 à 8) et de diffraction (§ 9 à 13). Enfin la dernière partie (§ 14 à 15) présente le principe de fonctionnement des lasers. Cette partie complète le chapitre de physique moderne.

1. Description d'une onde électromagnétique
1.1. Onde électromagnétique monochromatique plane, polarisée rectilignement, dans le vide
1.2. Onde électromagnétique monochromatique plane dans un milieu d'indice *n*
1.3. Amplitude complexe et intensité de l'onde lumineuse
1.4. Quelques ordres de grandeur

2. La polarisation de la lumière
2.1. Lumière polarisée : polarisation linéaire, circulaire, elliptique
2.2. Polariseur, loi de Malus

3. Cohérence temporelle
3.1. Un modèle simple de cohérence temporelle
3.2. Quelques ordres de grandeur
3.3. Lumière naturelle (ou non polarisée)

4. Coefficients de réflexion et de transmission (à incidence normale)
4.1. Coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude
4.2. Coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie

5. Les trous de Young
5.1. Description
5.2. Méthode de calcul des déphasages en optique physique
5.3. Intensité des interférences lumineuses
5.4. Description de la figure d'interférences, interfrange
5.5. Quelques variations sur le thème « trous de Young »
5.6. Observations des interférences de type trous de Young

6. Interférences non localisées et interférences localisées

7. Interférences par division d'amplitude
7.1. Franges d'égale inclinaison
7.2. Franges d'égale épaisseur

8. Interféromètres
8.1. Interféromètre à deux ondes (ou interféromètre à faisceaux séparés)
8.2. Interféromètre à ondes multiples (ou de Fabry-Perot)

9. Principe de Huygens – Fresnel
9.1. Qu'est ce que la diffraction ?
9.2. Principe de Huygens – Fresnel
9.3. Validité du principe de Huygens – Fresnel
9.4. Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer

10. Diffraction à l'infini par une fente
10.1. Diffraction par une fente infinie éclairée sous incidence normale
10.2. Diffraction par une fente infinie éclairée sous incidence oblique

11. Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire

12. Diffraction par une ouverture circulaire, limite de résolution des instruments d'optique
12.1. Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire
12.2. Limite de résolution d'un instrument d'optique

13. Diffraction à l'infini par deux écrans complémentaires, théorème de Babinet

14. Processus d'interaction entre la matière et le rayonnement. Émission stimulée
14.1. Rappels
14.2. Description qualitative des processus d'interaction
14.3. Description quantitative : émission spontanée
14.4. Description quantitative : absorption
14.5. Description quantitative : émission stimulée
14.6. Équilibre thermodynamique, rayonnement du corps noir, relations entre coefficients d'Einstein

15. Principes de fonctionnement d'un laser
15.1. Cavité optique
15.2. Milieu amplificateur
15.3. Propriétés du rayonnement émis par un laser

1. Description d'une onde électromagnétique

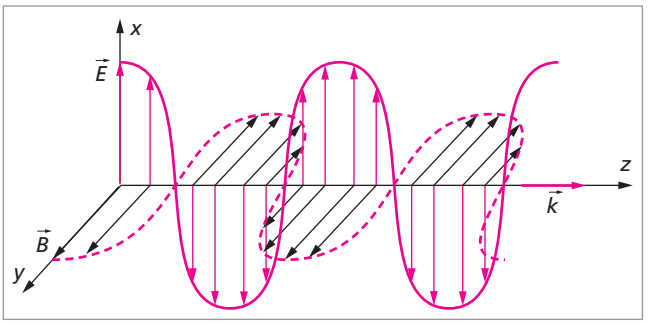
La lumière est une onde électromagnétique. La description qu'on donne de l'onde lumineuse en optique physique est la transcription de celle qu'on donne de l'onde électromagnétique en électromagnétisme.

1.1. Onde électromagnétique monochromatique plane, polarisée rectilignement, dans le vide

L'onde électromagnétique est composée de deux champs oscillants dans l'espace et dans le temps, le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$. Pour une onde plane, se propageant selon Oz, et polarisée rectilignement (selon l'axe Ox), on a :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{u_x} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{u_y} \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires et forment un trièdre (direct) avec le **vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{u_z}$. La figure ci-contre représente les champs électrique et magnétique de l'onde électromagnétique plane, se propageant selon Oz et polarisée rectilignement (selon Ox) à un instant t donné, en différents points de l'espace.



La **longueur d'onde** λ (qui est par définition la période spatiale des champs) est reliée au **nombre d'onde** k par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

et la période temporelle T d'oscillation des champs est reliée à la **pulsation** ω par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

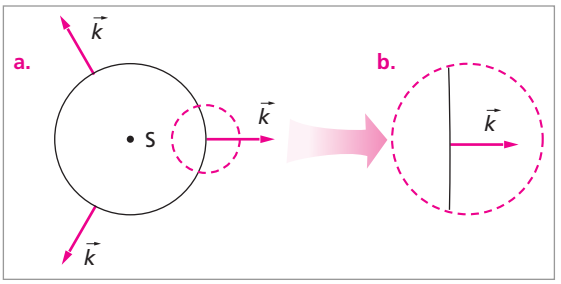
La **fréquence** de l'onde est définie par $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Enfin on a $\lambda = cT$, donc $k = \frac{\omega}{c}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide (on retiendra $c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

Dans l'expression précédente, on appelle **phase** (à l'instant t) le terme $\phi = kz - \omega t$. Par définition, la **surface d'onde** est une surface équiphase, c'est-à-dire telle que la phase ϕ

soit constante. Dans le cas présent, les surfaces d'onde sont donc des plans (c'est pour cela qu'on parle d'onde plane), parallèles au plan O*xy*. Ces plans sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde, soit $\overrightarrow{k}$; cette propriété est toujours vraie même si la surface d'onde n'est pas plane :

Propriété : La direction de propagation de l'onde est perpendiculaire à la surface d'onde.

Remarque : ne pas croire que toutes les ondes électromagnétiques sont planes : par exemple une source ponctuelle S qui émet dans toutes les directions de l'espace émet une onde sphérique, c'est-à-dire une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères (ici de centre S). Par contre, localement (*cf.* figure b), on peut toujours assimiler une partie d'une onde quelconque à une onde plane (cela consiste à assimiler la surface d'onde – les sphères de centre S – à leurs plans tangents), d'où l'importance conceptuelle de l'onde plane.



La densité d'énergie du champ électromagnétique est $u = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et le flux d'énergie électromagnétique, c'est-à-dire la puissance électromagnétique par unité de surface transportée par le champ électromagnétique, est donné par le vecteur de Poynting $\overrightarrow{P} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$. Si on moyenne ces quantités sur une période d'oscillation T des champs, on obtient pour l'onde électromagnétique plane :

$$\langle u \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \langle \overrightarrow{P} \rangle_T = c \langle u \rangle_T \overrightarrow{u_z} \tag{2}$$

L'onde électromagnétique transporte donc à la vitesse c une densité d'énergie proportionnelle au carré de l'amplitude du champ.
Pour décrire une onde électromagnétique, il est habituel d'utiliser la **notation complexe**. On introduit alors des vecteurs champs complexes $\overrightarrow{E_c}$ et $\overrightarrow{B_c}$, dont les parties réelles représentent les champs électrique et magnétique physiques (*i.e.* mesurables) : $\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e(\overrightarrow{E_c})$ et $\overrightarrow{B} = \mathcal{R}e(\overrightarrow{B_c})$. Pour l'onde électromagnétique plane, ces champs complexes sont donc :

$$\overrightarrow{E_c} = \overrightarrow{u_x} E_0 \, e^{i\phi} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B_c} = \overrightarrow{u_y} \frac{E_0}{c} e^{i\phi} \tag{3}$$

Remarques : prendre les champs complexes proportionnels à $e^{i\phi} = e^{i(kz-\omega t)}$ est arbitraire, on aurait pu aussi les choisir proportionnels à $e^{-i\phi} = e^{i(\omega t-kz)}$. De plus, l'amplitude E_0 peut être complexe (par exemple pour prendre en compte des origines des z ou des t différentes), ce que nous supposerons désormais. La notation complexe permet de calculer directement les valeurs moyennes de la densité d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting, quantités quadratiques, sur une période d'oscillation T. Pour l'onde plane, on obtient :

$$\langle u \rangle_T = \frac{\varepsilon_0}{2} E_c E_c^* = \frac{\varepsilon_0}{2} |E_c|^2 \qquad \text{et} \qquad \langle P \rangle_T = c \langle u \rangle_T = \frac{c\varepsilon_0}{2} |E_c|^2 \tag{4}$$

1.2. Onde électromagnétique monochromatique plane dans un milieu d'indice *n*

On envisage maintenant la propagation de la même onde monochromatique, de pulsation ω, dans un milieu diélectrique, de permittivité relative ε_r, donc d'**indice optique** $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ (on suppose ici le milieu magnétiquement parfait, soit $\mu_r = 1$). De plus on suppose le milieu parfaitement transparent, de sorte que n est réel. Dans un tel milieu d'indice optique n, la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique est :

$$\boxed{v_n = \frac{c}{n}} \qquad (\text{avec } n > 1)$$

Lorsqu'elle passe du vide au milieu d'indice n, l'onde monochromatique conserve la même pulsation, donc la même période. En revanche, puisque sa vitesse de propagation change, sa longueur d'onde et son nombre d'onde changent. Si on désigne par λ_n et k_n ces quantités, mesurées dans le milieu d'indice n, on montre qu'elles sont reliées aux grandeurs correspondantes λ et k mesurées dans le vide par :

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \qquad \text{et} \qquad k_n = nk \tag{5}$$

Les champs électrique et magnétique associés à cette onde sont dans le milieu d'indice n :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= \overrightarrow{u_x} E_0 \cos(k_n z - \omega t) \\ \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{u_y} \frac{nE_0}{c} \cos(k_n z - \omega t) \end{aligned} \tag{6}$$

La phase ϕ de l'onde à l'instant t est maintenant :

$$\phi = k_n z - \omega t = k(nz) - \omega t \tag{7}$$

Ainsi, la phase dans un milieu d'indice n a exactement la même expression que dans le vide, à condition de remplacer z par nz, c'est-à-dire la distance géométrique z par le chemin optique nz.

En optique, on s'intéressera en général non pas à la phase d'une onde, mais à la différence de phase entre deux ondes. À titre d'exemple, considérons une onde (plane, monochromatique) passant par les points M_1, puis M_2 (tous les deux dans le milieu d'indice n). La différence de phase (à un instant donné t) de l'onde entre ces deux points est :

$$\Delta\phi = \phi(M_2) - \phi(M_1) = k(nl) = k\delta \tag{8}$$

On a introduit ici le **chemin optique** δ entre M_1 et M_2 :

$$\boxed{\delta = nl}$$

où l est la distance géométrique $l = M_1M_2$. Physiquement, le chemin optique δ correspond à la distance à parcourir dans le vide pour introduire un déphasage $\Delta\phi$ identique à celui introduit par le parcours de la distance l dans le milieu d'indice n.
Si l'onde atteint M_1 avant M_2, $\Delta\phi > 0$, dans ce cas on dit que l'onde en M_2 est **en retard** par rapport à celle en M_1. Dans le cas contraire, si $\Delta\phi < 0$ est négatif, on dit que l'onde en M_2 est **en avance** par rapport à celle en M_1.

Remarque : le signe de $\Delta\phi$ lorsque l'onde 2 est en avance ou en retard par rapport à l'onde 1 est directement relié au choix de signe effectué lors de l'introduction de la notation complexe.

La densité d'énergie et le vecteur de Poynting de l'onde dans un milieu d'indice n, moyennés sur une période d'oscillation des champs, sont reliés au champ électrique E_c en notation complexe par :

$$\langle u\rangle_T = n^2\frac{\varepsilon_0}{2}|E_c|^2 \qquad \text{et} \qquad \langle P\rangle_T = \frac{c}{n}\langle u\rangle_T = \frac{nc\varepsilon_0}{2}|E_c|^2 \tag{9}$$

Remarque : l'expression des champs de l'onde plane dans un milieu d'indice n (équations 6) se déduit de l'expression correspondante pour une onde plane dans le vide (équations 1) en remplaçant la vitesse de la lumière dans le vide c par celle dans le milieu d'indice n (soit c/n). Il n'en est pas de même pour l'expression de la densité d'énergie électromagnétique $\langle u\rangle_T$ (comparez les équations 9 et 4). Ceci est dû à ce que la densité d'énergie électromagnétique u est proportionnelle au carré du champ électrique **et** à la permittivité ε du milieu.

1.3. Amplitude complexe et intensité de l'onde lumineuse

En optique, le champ électrique E_c en notation complexe est appelé **amplitude de l'onde lumineuse**. C'est une quantité complexe, notée s. Par ailleurs, **l'intensité de l'onde lumineuse** I caractérise le flux d'énergie électromagnétique, c'est-à-dire la puissance par unité de surface transportée par cette onde (soit encore son vecteur de Poynting). Elle est donc proportionnelle à $|E_c|^2 = |s|^2 = ss^*$ et on pose $I = ss^*$:

$$\boxed{s = E_c \qquad \text{et} \qquad I = ss^*} \tag{10}$$

La puissance électromagnétique par unité de surface transportée par l'onde est directement proportionnelle à l'intensité I :

$$\langle P \rangle_T = \frac{nc\,\varepsilon_0}{2} I \qquad \text{(10 bis)}$$

Remarque : formellement il y a proportionnalité (et non égalité) entre I et $\langle P \rangle_T$. (compte tenu de la définition donnée de s). Toutefois ce coefficient de proportionnalité n'a que peu d'importance pratique, parce qu'on s'intéressera toujours à déterminer des valeurs relatives d'intensité lumineuse. Enfin il ne comprend que des constantes fondamentales, hormis l'indice du milieu (et de manière pratique, on fait toujours les mesures d'intensité dans le même milieu, l'air ($n = 1$)).

1.4. Quelques ordres de grandeur

On vient de voir que les ondes lumineuses sont des ondes électromagnétiques, et donc que l'optique n'est somme toute qu'une partie de l'électromagnétisme. Il est intéressant de comprendre ce qui distingue ce domaine qu'il est convenu d'appeler « optique » du reste de l'électromagnétisme.

En optique physique, on ne mesure jamais le champ électrique de l'onde, on ne mesure que la puissance transportée par l'onde lumineuse. Ceci est évidemment lié à des considérations expérimentales : on ne dispose pas (ou plutôt on ne disposait pas jusqu'à l'introduction des lasers et de l'optique non linéaire) d'appareil permettant de mesurer le champ électrique d'une onde dans le domaine visible ou infrarouge. Par contre on sait mesurer le champ électrique d'une onde dans le domaine micro-onde et en suivre l'évolution au cours du temps (c'est-à-dire pour une micro-onde monochromatique, visualiser la sinusoïde de période T, par exemple sur un oscilloscope). Dans le domaine visible ou dans le domaine infrarouge, on ne dispose pas d'appareil suffisamment rapide pour faire la même chose. Donc l'optique commence à partir du moment où l'on ne sait plus mesurer d'autres grandeurs physiques que **moyennées sur des temps longs** τ_{obs} par rapport à la période T des oscillations. Par ailleurs, l'optique physique décrit la lumière dans le cadre de l'électromagnétisme, c'est-à-dire comme un phénomène purement ondulatoire. Aucune référence n'est faite à son caractère corpusculaire, *i.e.* quantique. Ainsi la description de la lumière dans ce cadre n'est par exemple valable que si on détecte beaucoup de photons pendant le temps caractéristique de détection τ_{obs} ; elle sera donc satisfaisante à cet égard à condition que les puissances mises en cause ne soient pas trop faibles et que les photons ne soient pas trop énergétiques, donc que la longueur d'onde de l'onde électromagnétique associée ne soit pas trop courte.

En pratique, l'optique physique est utile dans un **large domaine spectral**, **contenant l'infrarouge, le domaine visible et l'ultraviolet** ; à plus basse fréquence (domaine micro-onde), on dispose d'appareils de mesure dont le temps caractéristique de détection τ_{obs} est plus court que la période T des oscillations du champ, à plus haute fréquence (domaine des rayons X), les effets quantiques deviennent dominants.

Il est utile de connaître les ordres de grandeur des longueurs d'onde dans ces différents domaines spectraux :

Ultraviolet (UV)	10 nm à 400 nm
UV lointain	10 nm à 100 nm
UV proche	100 nm à 400 nm
Domaine visible	400 nm à 750 nm
Bleu	En dessous de 500 nm
Vert	Vers 550 nm
Jaune	Vers 600 nm
Rouge	En dessus de 630 nm
Infrarouge (IR)	750 nm à 300 μm
IR proche	750 nm à 10 μm
IR lointain	10 μm à 300 μm

Un bon nombre de manuels utilisent l'angström (Å) comme unité de longueur pour les longueurs d'onde en optique : 1 Å = 0,1 nm. Toutefois l'angström n'est pas une unité légale (il faut donc éviter de l'utiliser dans un cadre officiel, en particulier dans un concours).

2. La polarisation de la lumière

2.1. Lumière polarisée : polarisation linéaire, circulaire, elliptique

Définition : On appelle polarisation la direction du champ électrique de l'onde.

On parle de **polarisation linéaire** lorsque le champ électrique a toujours la même direction Dans ce cas, l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$, pris en un point donné de l'espace, décrit un segment de droite au cours du temps.

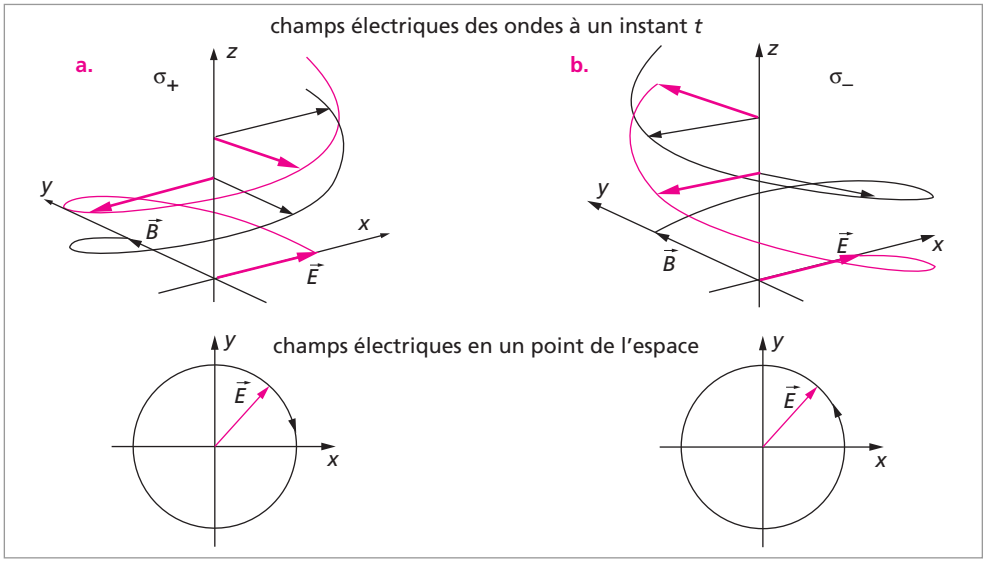
Exemple : l'onde décrite dans le paragraphe **1.1.** est polarisée linéairement**.**

Il existe d'autres types de polarisation.
Pour une onde de **polarisation circulaire**, le champ électrique s'écrit, pour une onde se propageant selon Oz :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u_x} \cos(kz - \omega t) + \varepsilon E_0 \overrightarrow{u_y} \sin(kz - \omega t) \qquad (11)$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. Suivant le signe de ε, on parle de polarisation **circulaire gauche** pour $\varepsilon = +1$, ou **droite** pour $\varepsilon = -1$. En un point donné de l'espace (i.e. pour z fixé),

l'extrémité du vecteur champ électrique décrit un cercle (dans le plan Oxy) au cours du temps, d'où le nom de polarisation circulaire. Suivant que la polarisation est droite ou gauche, le sens de rotation est différent (cf. figure ci-dessous). À chaque instant, et en tout point de l'espace, on a $\left|\overrightarrow{E}\right| = E_0$. Par ailleurs, comme pour toute onde électromagnétique, le champ magnétique forme un trièdre direct avec la direction de propagation et le champ électrique, donc, en un point donné de l'espace, le champ magnétique tourne aussi au cours du temps, comme le champ électrique.



Une onde de **polarisation elliptique**, se propageant selon Oz, a un champ électrique :

$$\overrightarrow{E} = E_{0x}\overrightarrow{u_x}\cos(kz - \omega t) + \varepsilon E_{0y}\overrightarrow{u_y}\sin(kz - \omega t) \qquad (12)$$

où, a priori, $E_{0x} \neq E_{0y}$. Selon le signe de ε, on distingue là encore les polarisations **elliptiques gauche** (pour $\varepsilon = +1$), ou **droite** (pour $\varepsilon = -1$). En un point donné de l'espace, l'extrémité du vecteur champ électrique décrit maintenant une ellipse.
Sur les expressions (11) et (12), les ondes polarisées circulairement ou elliptiquement apparaissent clairement comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement, l'une selon Ox, l'autre selon Oy, déphasées de $\pi/2$ l'une par rapport à l'autre.

2.2. Polariseur, loi de Malus

Un **polariseur** est un composant optique qui ne transmet que les ondes incidentes polarisées linéairement dans une certaine direction (par exemple Ox), appelée parfois « axe » du polariseur. Les ondes polarisées dans la direction perpendiculaire (Oy) sont soit absorbées, soit réfléchies. Dans les polariseurs les plus courants, constitués de molécules organiques allongées, qu'on peut s'imaginer comme des fils conducteurs, et orientées parallèlement les unes aux autres, les ondes polarisées dans la direction des molécules sont absorbées

(on peut considérer que leur champ électrique induit un déplacement de charges, i.e. un courant, dans les molécules, donc les ondes correspondantes sont amorties), tandis que celles polarisées perpendiculairement à cette direction sont transmises (leur champ électrique ne peut induire de courant dans la direction transverse à l'axe des molécules). Le polariseur agit donc comme un filtre, qui ne laisse passer que les ondes incidentes polarisées dans une certaine direction (Ox).
Quelle que soit la polarisation de la lumière incidente, le polariseur transmet donc une onde polarisée linéairement (dans la direction Ox). Par exemple, si on éclaire un tel polariseur avec l'onde polarisée elliptiquement dont on a décrit le champ électrique par l'équation (12), il transmet la partie de l'onde polarisée suivant Ox, et absorbe celle polarisée suivant Oy. L'onde sortant du polariseur a donc un champ électrique :

$$\overrightarrow{E} = E_{0x}\overrightarrow{u_x}\cos(kz - \omega t) \tag{13}$$

et on peut constater directement sur cette expression qu'elle est polarisée linéairement, selon Ox.
Un cas particulier important est celui où l'onde incidente est polarisée **linéairement** dans une direction faisant un angle θ avec l'axe Ox du polariseur Cette direction est colinéaire au vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ tel que $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$. L'onde incidente se décompose en deux composantes, l'une polarisée suivant l'axe Ox du polariseur, et l'autre selon Oy :

$$\overrightarrow{E} = E_0\cos\theta\overrightarrow{u_x}\cos(kz - \omega t) + E_0\sin\theta\overrightarrow{u_y}\cos(kz - \omega t) \tag{14}$$

Ainsi l'onde transmise par le polariseur est décrite par le champ électrique :

$$\overrightarrow{E} = E_0\cos\theta\overrightarrow{u_x}\cos(kz - \omega t) \tag{15}$$

et son intensité I est donc reliée à celle I_0 de l'onde incidente par :

$$\boxed{I = I_0\cos^2\theta} \tag{16}$$

Ce résultat constitue la **loi de Malus**. Attention à ne pas l'appliquer dans tous les cas : elle ne s'applique que si l'onde incidente est polarisée rectilignement.

3. Cohérence temporelle

En optique (visible, UV ou IR) les détecteurs mesurent l'intensité I du rayonnement, c'est-à-dire la valeur moyenne du flux d'énergie électromagnétique sur un temps τ_{obs} long, et en particulier beaucoup plus long que la période T des oscillations du champ. La résolution temporelle de l'instrument de mesure, τ_{obs}, est suffisamment longue pour être aussi en général plus longue qu'un autre temps caractéristique de la lumière, le temps de cohérence. L'objectif de ce paragraphe est de comprendre cette notion.

3.1. Un modèle simple de cohérence temporelle

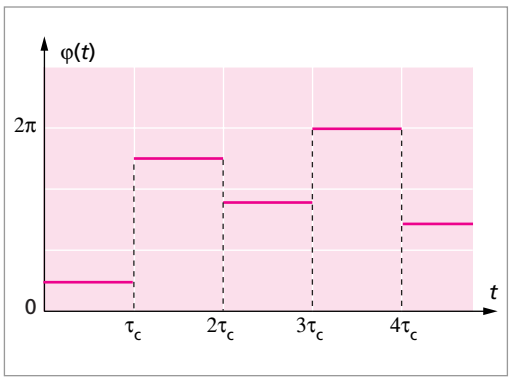
Jusqu'à maintenant, lorsqu'on a étudié l'onde plane, on a envisagé une onde parfaitement monochromatique, décrite par exemple par le champ (onde polarisée selon Ox et se propageant selon Oz) :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{u_x} E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{1}$$

Une telle onde lumineuse correspond à une idéalisation de la réalité physique. En particulier l'équation (1) décrit une onde qui existe quel que soit t (donc de $t = -\infty$ à $t = +\infty$). Une source lumineuse réelle, parce qu'elle n'émet pas une onde pendant un temps infini, ne peut pas être parfaitement monochromatique.
Pour rendre compte des propriétés d'une source quasi-monochromatique, on utilise parfois le modèle simple suivant : on considère que le champ de l'onde émise par la source varie sinusoïdalement avec le temps, mais que, après un certain temps τ_c, sa phase varie abruptement. Ce champ s'écrit donc :

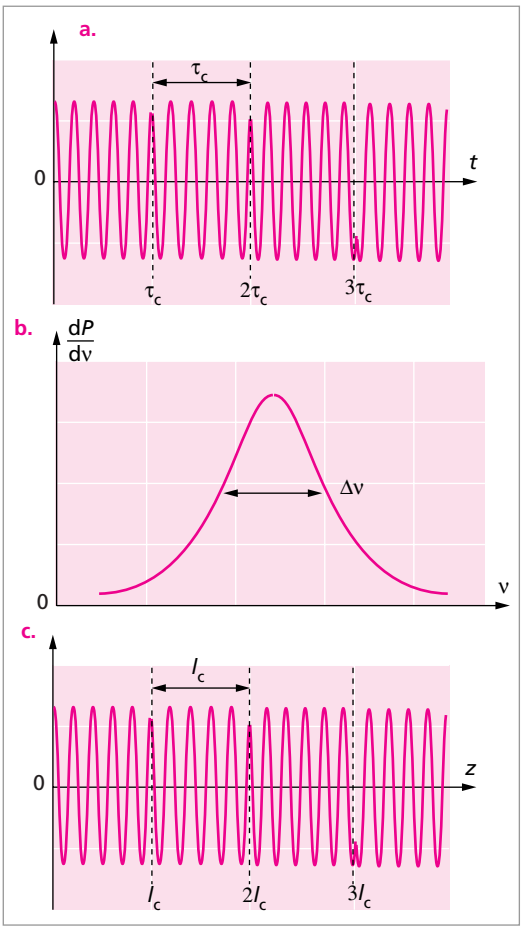
$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{u_x} E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi(t)) \tag{17}$$

(toujours pour une onde polarisée selon Ox). Dans cette expression, le terme de phase $\varphi(t)$ est une fonction aléatoire, qui, tous les τ_c, change de valeur. Cette valeur reste évidemment comprise entre 0 et 2π (fig. ci-contre). Ainsi tout se passe comme si, au bout d'un temps τ_c, le champ en un point donné de l'espace perd la mémoire de sa phase, sa nouvelle phase est alors tirée au hasard, et elle subsiste pendant un temps τ_c. τ_c est appelé **temps de cohérence**.



Physiquement, ce modèle décrit par exemple la lumière émise par une lampe à décharge (comme les lampes spectrales utilisées pour étalonner un spectromètre). Dans une lampe à décharge, les atomes sont excités par la décharge (donc par des collisions), puis ils se désexcitent en émettant de la lumière. Chaque atome peut émettre de la lumière pendant un certain temps, sa durée de vie dans l'état excité. Pendant ce temps il subit en général beaucoup de collisions (avec le gaz résiduel de la lampe ou avec les particules chargées de la décharge) ; chacune de ces collisions lui fait perdre la mémoire de la phase du champ qu'il émet. Donc le temps de cohérence apparaît ici comme le temps moyen entre deux collisions. Le modèle que nous venons de décrire est simpliste dans la mesure où, dans le réalité, il y a par exemple des fluctuations du temps entre deux collisions consécutives subies par un atome.

La figure ci-contre montre le champ de l'onde en un point donné : entre deux changements de phase séparés par τ_c, le champ évolue sinusoïdalement ; dans ce modèle, aux changements de phase, le champ subit une discontinuité. Ceci entraîne que l'onde n'est plus parfaitement monochromatique. En d'autres termes cette lumière quasi-monochromatique a une certaine **largeur spectrale**, caractérisée par la largeur $\Delta\nu$. La signification de $\Delta\nu$ est donnée par la figure b, où est représentée la puissance transportée par l'onde par unité de fréquence $\frac{dP}{d\nu}$ (c'est-à-dire la grandeur mesurée par un spectromètre) ; cette grandeur ne prend des valeurs non nulles qu'autour de la valeur $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, et sur un domaine spectral d'extension typique $\Delta\nu$. On peut montrer que $\Delta\nu$ est relié au temps de cohérence ; on a :



$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau_c} \qquad (17)$$

Ce résultat est une conséquence directe des propriétés de la transformée de Fourier. Enfin, sur la figure c, est représenté le champ de l'onde à un instant donné, en différents points de l'espace. Dans des régions données de l'espace, ce champ varie sinusoïdalement avec z. Chacune de ces régions s'appelle un **train d'ondes**. Dans le vide l'ensemble de l'onde se déplace à la vitesse c, et donc la longueur d'un train d'ondes est :

$$l_c = c\tau_c \qquad (18)$$

l_c est appelé **longueur de cohérence**.
Lorsqu'il a une différence de phase aléatoire entre les champs en deux points différents, on dit que les deux ondes correspondantes sont **incohérentes**. Par exemple deux trains d'ondes consécutifs sont incohérents.

3.2. Quelques ordres de grandeur

L'interprétation du temps de cohérence exposé dans le **3.1** est propre à une lampe à décharge. Toutefois le phénomène de cohérence temporelle est très général. Comme on l'a vu plus haut, toute source émet un rayonnement de largeur spectrale $\Delta\nu$ finie. Ce rayonnement peut toujours être vu comme une succession de trains d'ondes dont la durée est le temps de cohérence $\tau_c = \Delta\nu^{-1}$ (la relation (17) est toujours valable) et dont la longueur dans le vide est la longueur de cohérence $l_c = c\tau_c$.

On retiendra que la largeur spectrale d'une lampe à décharge basse pression est typiquement $\Delta\nu \cong 1$ GHz, soit $\tau_c \cong 1$ ns, ou encore $l_c \cong 0{,}3$ m. Cette largeur spectrale est limitée par l'effet Doppler. Pour une lampe à décharge à plus haute pression, où les collisions jouent un rôle dominant, la largeur spectrale est plus grande, de l'ordre de $\Delta\nu \cong 10$ GHz. Au contraire la largeur spectrale d'une source laser peut être beaucoup plus faible, et évidemment elle dépend du laser. Un ordre de grandeur raisonnable est $\Delta\nu \cong 1$ MHz, soit $\tau_c \cong 10\ \mu$s ; mais on sait construire des lasers spectralement beaucoup plus fins.

Les propriétés spectrales d'une source de lumière blanche peuvent être décrites de la même façon. On peut raisonnablement considérer que la largeur spectrale d'une source de lumière blanche est typiquement de l'ordre de grandeur de la largeur du domaine visible ; on prendra ici $\Delta\lambda \cong 300$ nm, donc le temps de cohérence d'une lumière blanche est typiquement de 2 fois la période des oscillations du champ dans le domaine visible, et la longueur de cohérence de 2 fois la longueur d'onde typique dans le domaine visible.

De façon très générale, le temps de cohérence est plus court que le temps caractéristique de détection τ_{obs}, sauf dans quelques cas extrêmes où l'on choisit simultanément une source très cohérente (laser de haute définition spectrale) et un appareil de détection rapide. Dans tous les cas usuels, on a : $\tau_c \ll \tau_{obs}$. C'est en particulier toujours le cas quand l'œil est le détecteur. Le temps τ_{obs} de réponse caractéristique de l'œil est le **temps de persistance rétinienne**, soit typiquement 0,3 s.

3.3. Lumière naturelle (ou non polarisée)

La plupart des sources lumineuses émettent non pas de la lumière polarisée, mais de la **lumière naturelle**, appelée aussi **lumière non polarisée**. On peut concevoir la lumière naturelle comme la superposition de deux ondes de même amplitude, l'une polarisée selon Ox et l'autre selon Oy, ces deux ondes étant incohérentes entre elles. Ceci signifie que les trains d'onde polarisés selon Ox ont une différence de phase totalement aléatoire avec les trains d'onde polarisés selon Oy : tous les temps de cohérence τ_c, cette différence de phase prend une nouvelle valeur, quelconque entre 0 et 2π, sans rapport avec la précédente valeur. La lumière naturelle peut donc être décrite par le champ :

$$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_x}\cos(kz - \omega t + \varphi_x(t)) + E_0\overrightarrow{u_y}\cos(kz - \omega t + \varphi_y(t)) \qquad (19)$$

Attention à ne pas confondre la lumière naturelle où la différence de phase entre les ondes polarisées selon Ox et Oy varie aléatoirement tous les τ_c avec de la lumière polarisée circulairement ou elliptiquement où cette différence est constante au cours du temps. Lorsqu'on envoie de la lumière naturelle, d'intensité I_0, sur un polariseur, on obtient de la lumière polarisée linéairement, avec une intensité $I = I_0/2$ (dans l'hypothèse où on utilise un polariseur parfait, i.e. sans absorption ; avec les polariseurs organiques de laboratoire, le rapport I/I_0 est plutôt de l'ordre de 40 %).
La plupart du temps, on manipule de la lumière naturelle (et non de la lumière polarisée). C'est ce qui justifie que l'amplitude s est considérée en optique physique comme une grandeur scalaire (et non vectorielle). En effet, en utilisant la notation complexe, la relation (19) peut encore s'écrire :

$$\overrightarrow{E_c} = \overrightarrow{u_x} E_{0x} e^{i(kz-\omega t)} + \overrightarrow{u_y} E_{0y} e^{i(kz-\omega t)} \qquad (20)$$

avec $E_{0x} = E_0 e^{i\varphi_x(t)}$ et $E_{0y} = E_0 e^{i\varphi_y(t)}$. Les amplitudes complexes des deux ondes polarisées selon Ox ou Oy ont donc exactement la même forme :

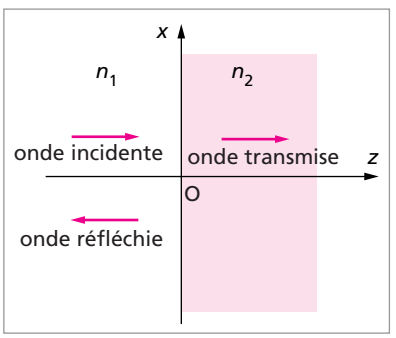
$$s = s_0 e^{i(kz-\omega t)} \qquad (21)$$

C'est l'amplitude complexe (scalaire) qu'on utilise dès qu'on a de la lumière non polarisée, c'est-à-dire dans la quasi-totalité des cas que vous rencontrerez.

4. Coefficients de réflexion et de transmission (à incidence normale)

4.1. Coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude

On considère ici un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 (*cf.* figure ci-contre). On éclaire ce dioptre du côté du milieu d'indice n_1, par une onde plane, sous incidence normale. Son vecteur d'onde est donc $\overrightarrow{k_i} = k_i \overrightarrow{u_z} = n_1 \frac{\omega}{c} \overrightarrow{u_z}$. Cette onde donne lieu à une onde réfléchie, de vecteur d'onde $-\overrightarrow{k_i}$, et à une onde transmise, de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_t} = k_t \overrightarrow{u_z} = n_2 \frac{\omega}{c} \overrightarrow{u_z}$. Les champs électriques complexes de ces ondes (qu'on supposera toutes polarisées dans le plan Oxz) sont :



$$\overrightarrow{E_i} = E_{i0} e^{i(k_i z-\omega t)} \overrightarrow{u_x}, \qquad \overrightarrow{E_r} = E_{r0} e^{i(-k_i z-\omega t)} \overrightarrow{u_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{E_t} = E_{t0} e^{i(k_t z-\omega t)} \overrightarrow{u_x} \qquad (22)$$

et leurs champs magnétiques, toujours en notation complexe, s'en déduisent. On a :

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{n_1}{c} E_{i0} e^{i(k_i z-\omega t)} \overrightarrow{u_y}, \quad \overrightarrow{B_r} = -\frac{n_1}{c} E_{r0} e^{i(-k_i z-\omega t)} \overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_t} = \frac{n_2}{c} E_{t0} e^{i(k_t z-\omega t)} \overrightarrow{u_y} \qquad (23)$$

Remarque : attention au signe de $\overrightarrow{B_r}$: se souvenir que, pour une onde plane, on a $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{k}}{\omega} \wedge \overrightarrow{E}$ et que le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est $-\overrightarrow{k_i}$.

À la limite entre les 2 milieux, les composantes tangentielles (à l'interface) de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ ($\overrightarrow{B} = \mu\overrightarrow{H}$ dans un milieu linéaire) et les composantes normales de $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{D}$ ($\overrightarrow{D} = \varepsilon\overrightarrow{E}$ dans un milieu linéaire) se conservent (*cf.* chapitres électromagnétisme et ondes). Les deux milieux étant supposés magnétiquement parfaits ($\mu = \mu_0$), les composantes tangentielles de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ se conservent de part et d'autre de l'interface (c'est-à-dire ici en $z = 0$), donc :

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \qquad \text{et} \qquad n_1 E_{i0} - n_1 E_{r0} = n_2 E_{t0} \tag{24}$$

On définit les **coefficients de réflexion** r et **de transmission** t **de l'amplitude** de l'onde par :

$$\boxed{r = \frac{s_r}{s_i} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{t = \frac{s_t}{s_i} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}} \tag{25}$$

où s_i, s_r et s_t sont les amplitudes des ondes incidente, réfléchie et transmise.
Ces coefficients, pour un dioptre plan éclairé sous incidence normale, peuvent être exprimés en fonction des indices n_1 et n_2 :

$$\boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \tag{26}$$

Remarques : pour une incidence oblique, ces expressions ne sont plus valables (*cf.* chapitre 5 sur les ondes, exercice 4). r et t dépendent de la polarisation de l'onde incidente et de l'angle d'incidence.
On a toujours $t > 0$, alors que r est du signe de $n_1 - n_2$. Ainsi l'onde transmise juste après le dioptre est toujours en phase avec l'onde incidente (juste avant le dioptre). En revanche, au voisinage du dioptre, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente si $n_1 > n_2$, et en opposition de phase si $n_1 < n_2$.

4.2. Coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie

Soient $\langle P \rangle_i$, $\langle P \rangle_r$ et $\langle P \rangle_t$ les puissances par unité de surface transportées par les ondes incidente, réfléchie et transmise. Les coefficients de réflexion R et de transmission T de l'énergie sont donc définis par :

$$\boxed{R = \frac{\langle P \rangle_r}{\langle P \rangle_i}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{T = \frac{\langle P \rangle_t}{\langle P \rangle_i}} \tag{27}$$

On a donc :

$$\boxed{R = r^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{T = \frac{n_2}{n_1} t^2} \tag{28}$$

La conservation de l'énergie entraîne :

$$\boxed{R + T = 1} \tag{29}$$

Remarque : attention à ne pas confondre R et T avec r et t. D'autre part $T \neq t^2$. Le coefficient de proportionnalité entre $\langle P \rangle$ et I dans l'expression (10 bis) joue ici un rôle. Sa dépendance en n, donc le rapport n_2/n_1 qui s'introduit ici, traduit le fait que l'onde, donc l'énergie, ne se propagent pas à la même vitesse dans les deux milieux d'indice n_1 et n_2.

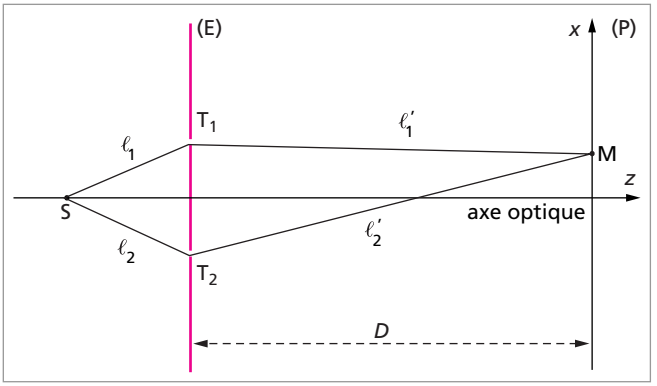
5. Les trous de Young

Les interférences lumineuses sont traditionnellement enseignées à partir de l'exemple des trous de Young. Les interférences qu'on obtient ainsi ne sont pas visibles avec une source étendue (i.e. possédant une dimension transversale importante), par contre on peut les observer en tout point de l'espace (et non pas seulement sur une surface privilégiée). En fait, il existe deux catégories de situations où on peut observer des interférences lumineuses, qui sont résumées dans le tableau suivant :

Interférences **non localisées**	Observables uniquement avec une source ponctuelle	Observable dans toute une région de l'espace
Interférences **localisées**	Observables avec une source étendue	Observables uniquement sur une surface donnée

Les trous de Young appartiennent à la première catégorie. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous étudierons des exemples appartenant à la seconde catégorie (franges d'égale épaisseur, franges d'égale inclinaison). En dehors de leur intérêt pédagogique, les interférences non localisées ont très peu d'applications pratiques. Lorsqu'on utilise des interférences (par exemple pour mesurer soit des longueurs d'onde, soit des distances), on se sert d'interférences localisées (précisément pour pouvoir utiliser des sources étendues plus lumineuses). Les interféromètres connus (interféromètre de Michelson, interféromètre à ondes multiples ou de Fabry-Perot) produisent tous des interférences localisées s'ils sont éclairés par des sources étendues.

5.1. Description



L'expérience des trous de Young est décrite par la figure ci-contre. S est une source monochromatique (de longueur d'onde λ), ponctuelle. Un écran (E) est percé de deux trous T_1 et T_2, eux aussi ponctuels. On observe la lumière arrivant sur un écran P placé dans le demi-espace aval (demi-espace à droite de E dans la figure 1) ; cet écran est habituellement placé parallèlement à l'écran E, de façon à ce que les distances des 2 trous T_1 et T_2 à l'écran P soient égales. On appelle D cette distance. On verra dans la partie diffraction que chacun des trous T_1 et T_2, parce qu'il est ponctuel (i.e. parce que ses dimensions transversales sont petites devant λ), diffuse dans toutes des directions du demi-espace aval ; en d'autres termes il se comporte comme une source ponctuelle. Cette source secondaire émet une amplitude de même phase que celle de l'onde qui l'éclaire.

5.2. Méthode de calcul des déphasages en optique physique

Lorsqu'une source ponctuelle située en S émet une onde s dans la direction ST_1, cette onde (que l'on considérera localement comme plane), au point A tel que $z = SA$ et à l'instant t, peut s'écrire :

$$s(A) = s_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{30}$$

Il arrive en A à l'instant t le champ qui est parti de S à l'instant $t - z/c$ (on supposera pour l'instant qu'on est dans le vide ou dans un milieu d'indice $n = 1$), ce que l'on traduit en écrivant $s(A)$ sous la forme :

$$s(A) = s_0 e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} \tag{31}$$

Dans cette expression, s_0 apparaît comme l'amplitude lumineuse émise à l'instant $t = 0$ par la source S dans la direction ST_1 (lorsqu'on assimile l'onde au voisinage de A à une onde plane), et l'amplitude lumineuse émise à l'instant t par la source dans les mêmes conditions s'écrit :

$$s(S) = s_0 e^{-i\omega t} \tag{32}$$

On a donc :

$$s(A) = s(S)e^{ikz} = s(S)e^{i\Delta\phi} \tag{33}$$

où $\Delta\phi = \phi(A) - \phi(S)$ est la différence de phase de l'onde entre les points S et A (on parle encore de déphasage entre S et A). Ici $\Delta\phi = kz$, où $z = SA$. On constate donc que

l'onde en A est en retard (*cf.* p. 536) par rapport à l'onde en S, ce qui n'est pas étonnant, puisque l'onde doit parcourir le chemin SA pour parvenir en A.
Si on suppose maintenant que la propagation se fait dans un milieu d'indice n, on obtiendra de la même façon :

$$s(\mathrm{A}) = s(\mathrm{S})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\phi} \tag{34}$$

avec :

$$\Delta\phi = k_n z = k\delta \tag{35}$$

où $\delta = nz$ est le chemin optique entre S et A . On appelle encore δ **différence de marche** entre S et A. Conformément aux notations introduites dans le **1**, dans l'expression (35), k représente le nombre d'onde dans le vide et k_n le nombre d'onde dans le milieu d'indice n. En fait on a choisi la phase de l'onde en S à l'instant t comme référence de phase pour exprimer la phase en A au même instant. Bien entendu on aurait pu choisir comme référence de phase n'importe quel point B situé entre S et A à la place de S. On retiendra :

$$\boxed{\Delta\phi = \phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) = k\delta} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\delta = (\mathrm{BA}) = n\mathrm{AB}} \tag{36}$$

Pour éviter les confusions, on notera aussi (BA) la différence de marche δ entre B et A.

5.3. Intensité des interférences lumineuses

Pour l'expérience des trous de Young, on pose $\ell_1 = \mathrm{ST}_1$ et $\ell_2 = \mathrm{ST}_2$ (*cf.* figure p. 547). Les points T_1 et T_2 reçoivent de la source S des amplitudes lumineuses :

$$s(\mathrm{T}_1) = s_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ell_1} \qquad \text{et} \qquad s(\mathrm{T}_2) = s_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ell_2} \tag{37}$$

En effet, la source S émet de façon isotrope, donc elle envoie des ondes lumineuses de même intensité vers T_1 et T_2. Dans les expressions de $s(\mathrm{T}_1)$ et $s(\mathrm{T}_2)$, il apparaît donc le même préfacteur s_0 caractérisant la source.

Remarque : en toute rigueur, ceci n'est pas rigoureusement vrai dès que $\ell_1 \neq \ell_2$. En effet, la source S émet une onde sphérique dont l'amplitude en un point M varie en $1/r$, où $r = \mathrm{SM}$ est la distance de M à la source, on a :

$$s(\mathrm{M}) = \frac{a}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr - \omega t)}$$

où a est une constante caractéristique de la source. Le préfacteur $s_0 = \dfrac{a}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ dépend donc de r. Toutefois ce préfacteur varie avec r beaucoup plus lentement que le terme de phase $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$, et on peut très valablement en négliger les variations dans la mise en équation de l'expérience des trous de Young.

À leur tour, les points T_1 et T_2 se comportent vis-à-vis du demi-espace aval comme des sources d'amplitudes :

$$s_1(T_1) = s'_0 e^{ik\ell_1} \qquad \text{et} \qquad s_2(T_2) = s'_0 e^{ik\ell_2} \tag{37}$$

Remarque : dans l'équation (37), on considère le même préfacteur pour les 2 trous T_1 et T_2. Ceci est justifié si les deux trous sont identiques (en particulier s'ils ont même surface). On reviendra plus loin (cf. p.. 554) sur ce point.

En M et à l'instant t, les amplitudes des ondes lumineuses émises s'écrivent :

$$s_1(M) = s_1(T_1)e^{ik\ell'_1} = s'_0 e^{ik(\ell_1+\ell'_1)} \qquad \text{et} \qquad s_2(M) = s_2(T_2)e^{ik\ell'_2} = s'_0 e^{ik(\ell_2+\ell'_2)} \tag{38}$$

où $\ell'_1 = T_1M$ et $\ell'_2 = T_2M$ (cf. figure p. 547). $s_1(M)$ et $s_2(M)$ représentent des champs électriques (à une constante multiplicative près), donc ils s'ajoutent.

Remarque : en toute rigueur, ils s'ajoutent vectoriellement et les amplitudes complexes scalaires s s'ajoutent algébriquement. Pour le justifier considérons pour l'instant que la source est polarisée perpendiculairement au plan de la figure p. 547. Dans ce cas, tous les champs électriques décrits sont orientés perpendiculairement à ce plan et il est donc légitime d'ajouter algébriquement les amplitudes lumineuses s. On reviendra sur ce point.

Ainsi l'amplitude lumineuse totale en M est :

$$s(M) = s_1(T_1)e^{ik\ell'_1} + s_2(T_2)e^{ik\ell'_2} = s'_0\left(e^{ik(\ell_1+\ell'_1)} + e^{ik(\ell_2+\ell'_2)}\right) \tag{39}$$

On en déduit l'intensité lumineuse en M :

$$I = ss^* = |s'_0|^2\,(2 + 2\cos k\delta) \tag{40}$$

où $\delta = (\ell_2+\ell'_2)-(\ell_1+\ell'_1) = (ST_2)+(T_2M)-(ST_1)-(T_1M) = (ST_2M)-(ST_1M)$ est la différence de marche entre les deux rayons lumineux issus de S, passant respectivement par T_2 et par T_1 et arrivant en M.
Cette intensité est maximale si $\Delta\phi = k\delta = n2\pi$, où n est un entier, donc si $\delta = n\lambda$, alors $I = 4\,|s'_0|^2$. Ceci est la condition pour obtenir une frange brillante. Au contraire l'intensité est minimale si $\Delta\phi = k\delta = (n + \frac{1}{2})\ 2\pi$, donc si $\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$. Ceci est la condition pour obtenir une frange sombre. L'intensité de la frange sombre est ici $I = 0$: la frange sombre est noire.
Condition pour obtenir une frange brillante : la différence de marche entre les deux trajets qui interfèrent est un nombre **entier** de longueurs d'onde

$$\boxed{\delta = n\lambda}$$

Condition pour obtenir une frange sombre : la différence de marche entre les deux trajets qui interfèrent est un nombre **demi-entier** de longueurs d'onde :

$$\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Remarque : la longueur d'onde qui intervient dans ces conditions est celle dans le vide.

5.4. Description de la figure d'interférences, interfrange

Pour décrire plus en détail la figure d'interférences, il faut calculer ℓ_1' et ℓ_2' en fonction des coordonnées du point M. Dans les conditions expérimentales usuelles, tous les rayons lumineux sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique du système (i.e. la direction perpendiculaire à l'écran (E)). En d'autres termes, les angles entre ces faisceaux lumineux et l'axe optique sont petits, on retrouve les conditions de l'optique paraxiale.
Considérons l'axe perpendiculaire à (E) et passant par le milieu du segment T_1T_2 (axe optique). On choisit pour origine O l'intersection de cet axe avec l'écran (P). Le point M de l'écran (P) est repéré par ses deux coordonnées x et y, l'axe Ox étant parallèle à T_1T_2. Enfin on pose $T_1T_2 = a$. Puisque les angles entre les faisceaux lumineux et l'axe optique sont petits, x, y et a sont très petits par rapport à D.
Dans ces conditions, sans approximation, ℓ_1' et ℓ_2' en fonction de x s'écrivent :

$$\begin{aligned}\ell_2' - \ell_1' &= \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} \\ &= D\left[\sqrt{1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2}}\right]\end{aligned} \tag{41}$$

En développant l'expression précédente en fonction des quantités $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$ et $\frac{a}{D}$, on obtient :

$$\ell_2' - \ell_1' = \frac{xa}{D} \tag{42}$$

Si la source S est placée sur l'axe optique, $\ell_1 = \ell_2$. Dans ce cas, on a :

$$\delta = \frac{xa}{D} \tag{43}$$

Les franges brillantes correspondent donc à $x = n\dfrac{\lambda D}{a}$ (où n est un entier). Ce sont des droites parallèles à l'axe Oy, (c'est-à-dire perpendiculaires à T_1T_2), équidistantes. La distance i entre deux franges brillantes consécutives est appelée l'**interfrange** ; on a :

$$i = \frac{\lambda D}{a} \tag{44}$$

Les franges sombres correspondent à $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$. Elles aussi sont des droites parallèles à Oy, elles sont situées à égale distance de deux franges brillantes, de sorte que la distance entre deux franges sombres consécutives est aussi égale à l'interfrange. Au centre de la figure d'interférences (en $x = 0$), il y a une frange brillante.

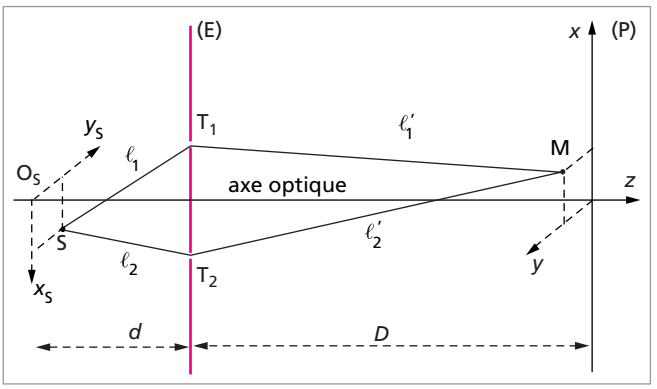
Définition : On appelle ordre d'interférence la quantité $p = \frac{\delta}{\lambda}$.

L'ordre d'interférence est donc entier sur une frange brillante, demi-entier sur une frange sombre. On dit aussi que les interférences sont constructives si p est entier ; les champs électriques des deux ondes sont orientés dans le même sens. Si p est demi-entier, les interférences sont dites destructives ; les champs électriques des deux ondes sont opposés. La **frange centrale** correspond à $\delta = 0$ (ou $p = 0$). C'est une frange brillante. Elle est située sur l'axe des y (d'équation $x = 0$).

5.5. Quelques variations sur le thème « trous de Young »

• Source S décentrée

On suppose ici que $\ell_1 \neq \ell_2$. d est la distance de la source à l'écran (E) et O_S l'intersection de l'axe optique et du plan parallèle à (E) et contenant S. On repère la source S par ses coordonnées x_S et y_S dans ce plan (cf. figure ci-contre, les axes $O_S x_S$ et $O_S y_S$ sont orientés de façon opposée à Ox et Oy). Puisque les angles entre les faisceaux lumineux et l'axe optique sont petits, x_S et y_S sont petits devant d.



En utilisant la même méthode que pour calculer $\ell_2' - \ell_1'$, on obtient :

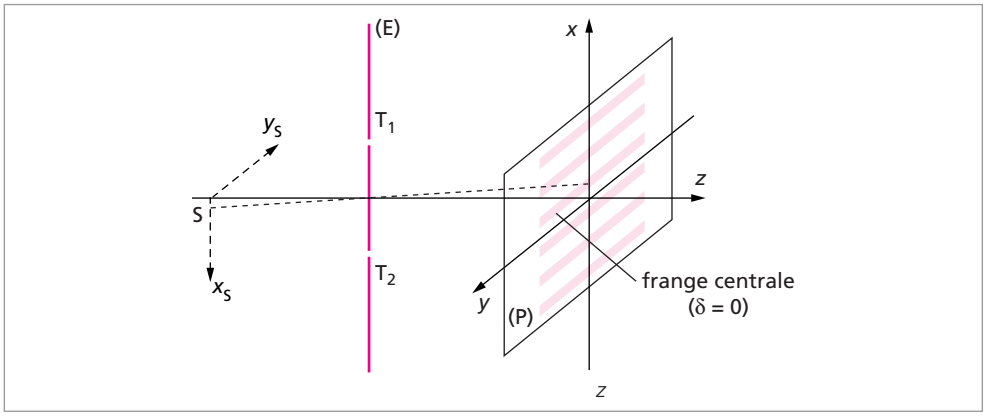
$$\ell_2 - \ell_1 = -\frac{x_s a}{d} \tag{45}$$

et

$$\delta = a\left(\frac{x}{D} - \frac{x_s}{d}\right) \tag{46}$$

La frange centrale ($\delta = 0$) est située en $x = x_s\frac{D}{d}$. La figure d'interférences s'est donc déplacée dans la direction opposée à celle selon laquelle on a déplacé la source S Les déplacements de la source S et de la figure d'interférences sont homothétiques, avec

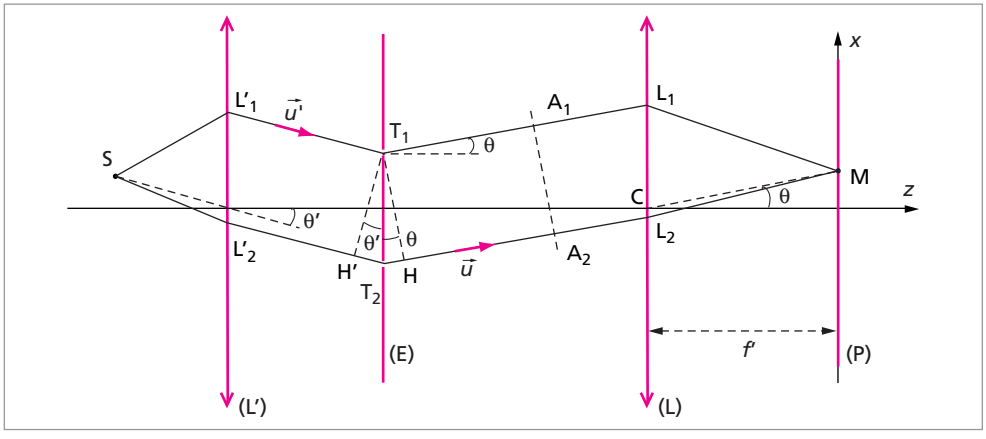
un facteur D/d ; la source S, le milieu de T_1T_2 et le centre de la figure d'interférences (appartenant à la frange centrale) sont donc alignés (voir figure ci-dessous).



Dans ce cas, les 2 sources fictives T_1 et T_2 ne sont plus en phase (cf. équation (37)).

• Observation des interférences à l'infini. Source S à l'infini

Dans un premier temps, on veut ici observer les interférences à l'infini. Ceci est très facile à faire expérimentalement : il suffit d'observer les interférences sur un écran (P) situé dans le plan focal image d'une lentille (figure ci-dessous).



Pour calculer la différence de marche $\delta_2 = (T_2L_2M) - (T_1L_1M)$ on utilise cette fois des moyens "plus physiques".

On observe les interférences en M. Soit θ l'angle entre l'axe optique et CM. Les 2 rayons venant de T_1 et T_2, et qui interfèrent en M, sont 2 rayons parallèles, faisant un angle θ avec l'axe optique. Ce sont 2 rayons de l'onde plane focalisée en M par la lentille (L). Sur la figure, on a tracé un plan d'onde de cette onde (plan A_1A_2). Le point M constitue une seconde surface d'onde du faisceau (une fois qu'il est focalisé). Le chemin optique entre 2 surfaces d'ondes est le même en suivant n'importe quel rayon, donc

$(A_1L_1M) = (A_2L_2M)$. Soit maintenant H la projection de T_1 sur T_2L_2. Le plan T_1H est aussi un plan d'onde du faisceau de rayons parallèles, donc $(T_1L_1M) = (HL_2M)$. Ainsi la différence de marche $\delta_2 = (T_2L_2M) - (T_1L_1M)$ est égale à $\delta_2 = (T_2H)$. On supposera désormais que l'indice n du milieu dans lequel est plongé l'écran (E) est égal à 1. On peut alors écrire :

$$\delta_2 = T_2H = \overrightarrow{T_2T_1}\,\vec{u} = a\theta \tag{47}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'onde diffusée (cf. figure).

Remarque : On aurait pu obtenir le même résultat à partir de celui obtenu plus haut (équation (43)), en faisant tendre D vers l'infini, mais en maintenant le rapport $x/D = \theta$ constant.

De la même façon qu'on a rejeté l'écran à l'infini, on peut aussi rejeter la source S à l'infini. L'onde qui éclaire l'écran (E) est alors une onde plane. Pour réaliser expérimentalement une telle situation, il suffit de placer une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille (figure p. 552). En utilisant les mêmes arguments que précédemment, la différence de marche $\delta_1 = (SL_2'T_2) - (SL_1'T_1)$ s'écrit :

$$\delta_1 = H'T_2 = -\overrightarrow{T_2T_1}\,\vec{u}' = -a\theta' \tag{48}$$

où H' est la projection de T_1 sur $L_2'T_2$, $\vec{u}'$ le vecteur unitaire dans la direction de l'onde incidente et θ' l'angle entre cette direction et l'axe optique (défini avec les mêmes conventions de signe que θ, voir figure)
Globalement, dans le cas où on éclaire l'écran (E) par une onde plane (i.e. S est rejeté à l'infini) et où on observe les interférences à l'infini, la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent est :

$$\boxed{\delta = \delta_1 + \delta_2 = a(\theta - \theta')} \tag{49}$$

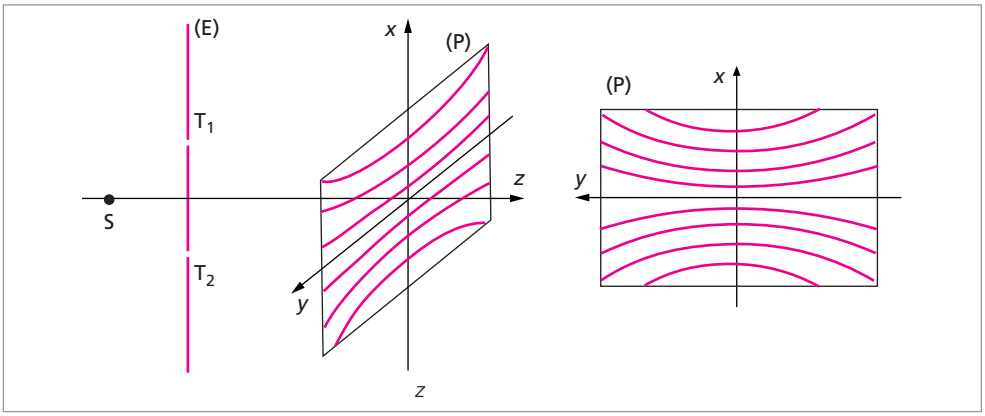
et le déphasage entre ces 2 rayons est :

$$\boxed{\Delta\phi = k\delta = \overrightarrow{T_2T_1}(\vec{k} - \vec{k}')} \tag{50}$$

où $\vec{k}'$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs d'onde des ondes incidentes et transmises. Notez que la frange centrale est observée dans la direction $\theta = \theta'$ (c'est-à-dire dans la direction de l'onde incidente).

• Figure d'interférences sans l'approximation paraxiale
On se replace ici dans le cadre de l'expérience décrite au **5.1** (en particulier on suppose $\ell_1 = \ell_2$ de sorte que les 2 sources fictives T_1 et T_2 sont en phase). Par contre, on ne fait pas l'approximation paraxiale, ce qui signifie qu'on ne suppose plus que tous les rayons lumineux sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique du système. Du point de vue

expérimental, ceci n'est pas très facile à réaliser dans une expérience d'optique, mais est facilement réalisé dans des expériences d'interférences d'ondes à la surface d'un liquide.
Les franges brillantes (respectivement sombres) sont obtenues lorsque la condition $\delta = \ell_2 - \ell_1 = n\lambda$ (respectivement $\delta = \ell_2 - \ell_1 = (n + \frac{1}{2})\lambda$) est vérifiée. Dans les deux cas, on doit donc avoir $\delta = \ell_2 - \ell_1 = C^{ste}$. Or $\ell_2 - \ell_1 = C^{ste}$ est l'équation d'un hyperboloïde de foyers T_1 et T_2 (surface obtenue en faisant tourner autour de son axe T_1T_2 une hyperbole de foyers T_1 et T_2). La frange correspondante, intersection de cet hyperboloïde et du plan (E) (l'écran), est une hyperbole. La figure d'interférences a donc l'allure indiquée sur la figure ci-dessous. Dans le 5.4, on a étudié le centre de cette figure d'interférences, là où les hyperboles peuvent être assimilées à leur tangente au sommet.



• **Deux trous T_1 et T_2 de tailles différentes**.
Si les deux trous T_1 et T_2 sont de surfaces différentes, ils laissent passer des intensités lumineuses différentes ; on ne peut donc plus considérer que leurs amplitudes complexes ont même module L'équation (37) devient donc :

$$s_1(T_1) = s'_1 e^{ik\ell_1} \qquad \text{et} \qquad s_2(T_2) = s'_2 e^{ik\ell_2} \tag{51}$$

avec $s'_1 \neq s'_2$. Il est raisonnable de considérer que l'intensité transmise par chacune des sources est proportionnelle à la surface du trou correspondant, et à l'intensité de l'onde qui l'éclaire ; pour le trou i ($i = 1$ ou 2), de surface S_i, éclairée par une onde d'intensité $I_0 = |s_0|^2$, on a donc :

$$I_i = |s_i(T_i)|^2 = A^2 S_i |s_0|^2 \qquad \text{d'où} \qquad s'_i = A\sqrt{S_i} s_0 \tag{52}$$

Ainsi l'amplitude lumineuse totale en M est :

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) = s'_1 e^{ik(\ell_1 + \ell'_1)} + s'_2 e^{ik(\ell_2 + \ell'_2)} \tag{53}$$

et l'intensité en M :

$$I = ss^* = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(k\delta) \tag{54}$$

où $\delta = \ell'_2 + \ell_2 - \ell'_1 - \ell_1$. I_1 et I_2 sont les intensités reçues en M si seule la source T_1 ou T_2 l'éclaire (l'autre trou étant bouché).

Les franges brillantes et sombres sont au même endroit que lorsque les 2 trous ont la même surface, mais les franges sombres ne sont plus noires, elles ont une intensité $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$. Et l'intensité des franges brillantes est $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$. La figure d'interférences est donc moins contrastée.
Pour rendre compte de cet effet, on introduit le **contraste** C, défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{55}$$

Si $I_1 = I_2$ (c'est-à-dire si les deux trous ont la même surface), le contraste est égal à 1 ; dès que $I_1 \neq I_2$, $C < 1$.

• Remplacement des 2 sources fictives T_1 et T_2 par 2 sources incohérentes
On remplace ici les deux trous T_1 et T_2 (qui jouent pour le demi-espace situé en aval de l'écran E le rôle de 2 sources fictives) par 2 sources incohérentes, 2 lampes par exemple. Que devient alors la figure d'interférences ?
Chaque lampe émet des trains d'onde, de durée τ_c, mais de façon non corrélée avec l'autre lampe. Leurs amplitudes sont :

$$s_1(T_1) = s_{01}e^{i\varphi_1(t)} \qquad \text{et} \qquad s_2(T_2) = s_{02}e^{i\varphi_2(t)} \tag{56}$$

où leurs phases φ_1 et φ_2 prennent des valeurs différentes tous les temps τ_c (φ_1 et φ_2 sont deux fonctions analogues à celle représentée par la figure p. 541). De plus les valeurs prises par φ_1 à un instant donné sont différentes de celles prises par φ_2 au même instant, de sorte que la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ entre ces 2 sources prend elle aussi des valeurs différentes tous les temps τ_c. C'est en fait à cette propriété qu'on se réfère lorsqu'on dit que 2 sources sont incohérentes. Inversement deux sources sont dites cohérentes si leur différence de phase garde la même valeur pendant le temps d'observation τ_{obs}, beaucoup plus long que τ_c. C'était le cas des 2 sources fictives T_1 et T_2 dans l'exemple précédent (**5.1**.).
Le point M reçoit de la lumière provenant des 2 sources et l'amplitude lumineuse totale en M est donc :

$$s(M) = s_1(T_1)e^{ik\ell'_1} + s_2(T_2)e^{ik\ell'_2} = s_{01}e^{(ik\ell'_1+\varphi_1)} + s_{02}e^{(ik\ell'_2+\varphi_2)} \tag{57}$$

d'où l'intensité lumineuse en M :

$$ss^* = |s_{01}|^2 + |s_{02}|^2 + 2s_{01}s_{02}\cos\Delta\phi \tag{58}$$

où $\Delta\phi = k(\ell'_1 - \ell'_2) + \Delta\varphi$ est la différence de phase des 2 ondes reçues par le point M. Puisque $\Delta\varphi$ change de valeur tous les temps τ_c, il en est de même de $\Delta\phi$. Ce qu'on mesure en fait n'est pas ss^*, mais la valeur moyenne de ss^* pendant le temps d'observation τ_{obs}, soit $I = \langle ss^* \rangle_{\tau_{obs}}$.

Remarque : jusqu'à maintenant, on n'avait pas eu besoin de faire cette distinction, car on avait toujours observé des intensités lumineuses qui ne variaient pas au cours du temps (i.e. qui ne fluctuaient pas tous les temps τ_c).

ss^* représente l'intensité lumineuse qu'on observerait à un instant donné si on disposait d'un détecteur ayant un temps d'observation beaucoup plus court que τ_c. Puisque, au cours du temps d'observation τ_{obs}, beaucoup plus long que τ_c, $\Delta\phi$ peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 2π :

$$\langle \cos \Delta\phi \rangle_{\tau_{obs}} = 0 \tag{59}$$

et

$$I = |s_{01}|^2 + |s_{02}|^2 = I_1 + I_2 \tag{60}$$

où I_1 (respectivement I_2) est l'intensité reçue en M si seule la source T_1 (respectivement T_2) fonctionne. Dans ce cas, il n'y a donc pas interférence, et l'intensité reçue en M est la somme des intensités provenant de chacune des sources.
Ce raisonnement permet de comprendre physiquement pourquoi on ne voit pas alors de franges d'interférence : si on disposait d'un détecteur ayant un temps d'observation beaucoup plus court que τ_c, on verrait une figure d'interférence et, tous les temps τ_c, cette figure d'interférences serait différente (puisque $\Delta\phi$ est différent). Or le détecteur dont on dispose réellement a un temps d'observation τ_{obs} beaucoup plus long que τ_c, ainsi on détecte la superposition des différentes figures d'interférences qui ont existé pendant le temps d'observation. Ces figures étant déphasées aléatoirement, les franges brillantes des unes coïncident avec les franges sombres des autres : les franges d'interférences se brouillent.

Propriété : **Les amplitudes émises par 2 sources cohérentes s'ajoutent. Les intensités émises par 2 sources incohérentes s'ajoutent.**

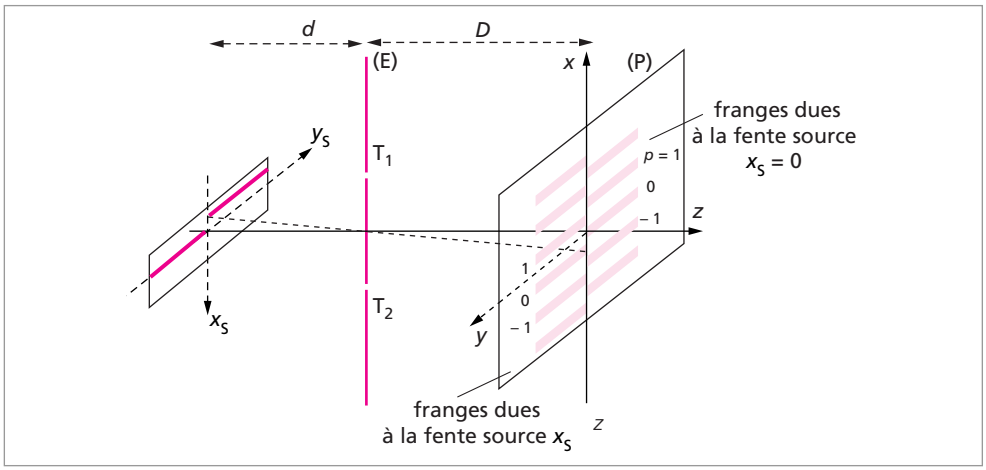
• Source étendue, cohérence spatiale

Une source étendue est une source dont on ne peut négliger les dimensions transversales. Chaque point d'une source étendue doit être considéré comme une source ponctuelle. Deux points différents d'une même source étendue sont deux sources ponctuelles incohérentes. On peut s'en rendre compte dans le cas d'un exemple, si la source étendue est une lampe à décharge haute pression : la lumière émise en deux points différents de cette source est émise par des atomes différents, qui subissent des collisions à des instants différents, et qui à un instant donné émettent de la lumière avec une phase différente. Deux zones différentes de la lampe sont donc deux sources incohérentes.
Considérons d'abord que la source étendue S soit une fente infiniment mince et orientée selon $O_s y_s$ (figure p. 551). Chaque point de la source est une source ponctuelle qui produit une figure d'interférences sur l'écran (P). Les sources ponctuelles étant incohérentes entre elles, on observe la superposition de toutes les figures d'interférences qu'elles produisent. Or toutes ces figures d'interférences sont identiques (en particulier on peut constater que

toutes leurs franges centrales coïncident avec l'axe des y et que tous les interfranges sont égaux). La figure d'interférences observée est donc la même qu'avec une source ponctuelle.

> ***Remarque :*** ceci n'est vrai que parce que la figure d'interférences est invariante par translation dans la direction de la fente (selon Oy). En particulier ça ne serait pas vrai hors du cadre de l'approximation paraxiale.

On envisage maintenant comme source une fente toujours orientée selon $O_s y_s$, mais de largeur finie. On peut considérer cette source comme la juxtaposition de fentes infiniment minces, toutes parallèles à $O_s y_s$, mais situées à des abscisses x_s différentes. Correspondant à des points différents de la source étendue, ces différentes fentes sources sont incohérentes entre elles.



Chacune produit une figure d'interférences, mais ces figures d'interférences ne sont pas identiques. Elles ont encore même interfrange, mais leurs franges centrales ne sont pas superposées. La fente source située en x_s produit une figure d'interférences dont la frange centrale est située en $x = x_s \dfrac{D}{d}$ (*cf.* fig. ci-dessous). La figure d'interférences créée par la fente large est la superposition de toutes ces figures d'interférences (puisque toutes les fentes infiniment minces sont incohérentes entre elles. Mais subsiste-t-il encore des franges dans la figure d'interférences ainsi produite ? La réponse à cette question dépend de la largeur e de la fente source. Plus précisément, si la fente source a une largeur e, les franges centrales des figures d'interférences créées par chacune des fentes sources élémentaires (infiniment minces) se répartissent dans une largeur $e\dfrac{D}{d}$.

– Si cette grandeur est petite devant l'interfrange $i = \dfrac{\lambda D}{a}$, donc si :

$$\frac{e}{d} \ll \frac{\lambda}{a} \tag{61}$$

la frange centrale n'est pratiquement pas élargie et la figure d'interférences a toujours la même allure.

Remarque : l'équation (61) signifie que la largeur angulaire de la source doit être beaucoup plus faible que celle de la frange centrale, c'est-à-dire que l'interfrange angulaire.

– Si $e\dfrac{D}{d}$ n'est pas beaucoup plus faible que l'interfrange, on voit encore des franges, mais le contraste diminue (les franges sombres ne sont plus noires). Si $e\dfrac{D}{d} = i$, les franges disparaissent (quel que soit le point M de l'écran (P), il existe une fente source élémentaire produisant une frange brillante en ce point et une autre produisant une frange noire au même endroit ; les 2 systèmes de franges se détruisent).
Cet exemple montre qu'on ne peut pas observer des franges d'interférences dans une expérience de type trous de Young (interférences non localisées) avec une source étendue.
Une autre conséquence est que, si on utilise une fente source infiniment mince, mais faisant un petit angle ε avec l'axe $O_s y_s$, on ne verra plus de franges à moins que la hauteur ℓ de la fente source et l'angle ε ne soient pas trop grands.

Remarque : À titre d'exercice, montrer que, dans ce cas, la figure d'interférences n'est pas affectée tant que $\ell\varepsilon \ll \lambda d/a$.

• Interférences en lumière polarisée
Imaginons qu'on polarise les 2 sources fictives T_1 et T_2 orthogonalement (par exemple en plaçant 2 polariseurs croisés, l'un devant le trou T_1, l'autre devant le trou T_2). Il en résulte que les champs électriques $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ rayonnés par ces 2 sources sont perpendiculaires. Le champ électrique total (c'est-à-dire l'amplitude de l'onde lumineuse) en M est $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$, et l'intensité lumineuse I est donc proportionnelle à $(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2})^2 = \overrightarrow{E_1^2} + \overrightarrow{E_2^2}$ (puisque $\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_2} = 0$, le terme d'interférence disparaît). On a donc $I = I_1 + I_2$. Et on ne voit pas de franges.

Propriété : En lumière polarisée, seules les ondes polarisées dans la même direction interférent.

Ceci permet de mieux comprendre l'origine des franges observées en lumière naturelle. On s'intéresse ici au cas où la source S dans l'expérience décrite par la figure p.547 est une source de lumière naturelle. Comme nous l'avons vu plus haut, la lumière naturelle peut être décomposée en deux ondes polarisées linéairement dans 2 directions orthogonales, ces 2 ondes étant incohérentes. Soient a et b ces 2 polarisations (si toutes les ondes se propagent suivant Oz, on peut prendre $a = x$ et $b = y$). Les 2 trous T_1 et T_2, éclairés en lumière naturelle, diffusent de la lumière naturelle. Ils se comportent donc, vis-à-vis du demi-espace aval, comme 2 sources fictives de lumière naturelle. Dans la suite, la lumière polarisée selon a et provenant de la source T_1 sera désignée par a_1, on

définit de même a_2, b_1 et b_2. a_1 ne peut interférer qu'avec a_2 (ondes cohérentes de même polarisation), produisant une première figure d'interférences (pour observer parfaitement cette figure, il suffit de polariser la source S dans la direction a, c'est-à-dire d'intercaler un polariseur orienté selon a entre S et l'écran (E)) ; de même b_1 ne peut interférer qu'avec b_2, produisant ainsi une seconde figure d'interférences identique à la première. Lorsqu'on observe les franges en lumière naturelle, on observe en fait la superposition de ces deux figures d'interférences.

• Interférences en lumière polychromatique ou en lumière blanche

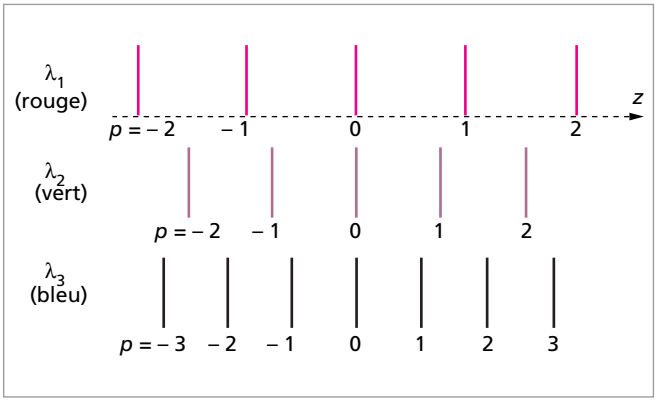
La source S est polychromatique, émettant deux longueurs d'onde (dans le vide) différentes. Il est facile de voir que, même si elles sont en phase à un instant donné et en un point donné de l'espace, deux ondes de longueurs d'onde différentes vont très rapidement se déphaser. Pendant la durée de l'observation τ_{obs} (supposée suffisamment grande), leur déphasage peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 2π :

Propriété : On ne peut pas observer d'interférence entre deux ondes de longueur d'onde différente.

Remarque : on sait faire battre (c'est-à-dire faire interférer) deux lasers très stables ayant des longueurs d'onde légèrement différentes (c'est même le principe de base de la métrologie moderne des fréquences et des longueurs). Mais dans ce type d'expériences (réalisables dans un laboratoire de métrologie, mais pas encore dans un lycée !), le détecteur a un temps de réponse τ_{obs} court devant la période des battements.

Si on réalise l'expérience des trous de Young avec une source polychromatique, émettant 2 raies de longueurs d'onde λ_1 et λ_2, on observera donc la superposition des 2 systèmes de franges obtenus l'un à la longueur d'onde λ_1, l'autre à la longueur d'onde λ_2. Notons que ces 2 systèmes de franges ont des interfranges différents (puisque l'interfrange i dépend de la longueur d'onde λ, cf équation (44)).

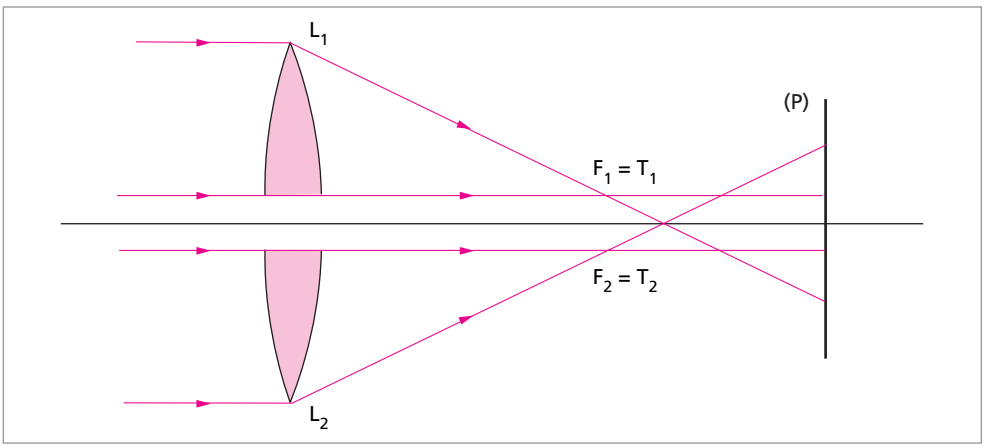
Il est de même si on utilise une source de lumière blanche (contenant toutes les longueurs d'onde du spectre visible), à ceci près qu'on observera la superposition non pas de 2, mais d'une infinité de systèmes de franges (une par longueur d'onde présente dans le spectre). Le principe est présenté ci-contre.



Quelle que soit λ, tous les systèmes de franges ont leur frange centrale au même endroit, en $x = 0$. Sur cette droite, toutes les longueurs d'onde sont présentes (dans les mêmes proportions que dans le spectre de la source utilisée). La frange centrale de la figure d'interférences est donc blanche.
L'interfrange "bleu" du système de franges produit par une longueur d'onde bleue est plus petit que l'interfrange "rouge". C'est pourquoi les premières franges sont **irisées** : elles ont une couleur bleue à l'intérieur, i.e. du côté de la frange centrale, et rouge à l'extérieur. Puis les systèmes de franges associés à chaque couleur sont de plus en plus mélangés. En un point donné M de l'écran (assez loin de la frange centrale), il arrive donc pratiquement de toutes les couleurs. L'œil ne distingue plus de franges et perçoit du blanc, qu'on appelle **blanc d'ordre supérieur**. Si on effectue l'analyse spectrale de la lumière incidente en M, on obtient, non pas un spectre continu, mais un **spectre cannelé**, dans lequel il manque certaines longueurs d'onde (celles pour lesquelles M est situé dans une frange sombre).

5.6. Observations des interférences de type trous de Young

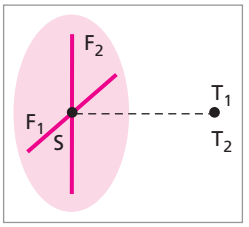
De façon pratique, on observe plus facilement ces interférences en utilisant non pas deux trous, mais 2 fentes parallèles, très minces (fentes de Young, exercice 5). Dans ce cas on peut encore utiliser non pas une source ponctuelle, mais une fente source (parallèle aux deux fentes diffractantes, cf p. 556).
Il existe d'autres dispositifs équivalents (bilentille de Billet, biprisme de Fresnel, miroirs de Fresnel, miroir de Lloyd), dont le principe est toujours le même : il s'agit par un dispositif quelconque d'obtenir deux images différentes S_1 et S_2 de la même source S (par exemple deux demi-lentilles, figure ci-dessous). Ces deux images sont cohérentes et, dans la zone éclairée simultanément par ces 2 images, on observe des interférences. Cette zone est appelée **champ d'interférences**.
D'autres dispositifs (biprisme de Fresnel, miroirs de Fresnel, miroir de Lloyd) sont étudiés en exercice.



6. Interférences non localisées et interférences localisées

Le principe des interférences étudiées au paragraphe précédent est toujours le même : il consiste, à partir d'une source ponctuelle, à "découper" deux zones géométriquement distinctes de la surface d'onde d'une onde émise par cette source. C'est pourquoi on les appelle des **interférences par division de front d'onde**. Avec ces dispositifs, on peut observer les interférences dans toute une région de l'espace. Dans l'expérience du **5.1**, on observe des interférences sur l'écran (P) quelle que soit sa position, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de D. Il en est de même pour l'expérience décrite sur la figure p. 560 (toutefois les interférences ne peuvent être observées qu'à l'intérieur du champ d'interférences). Aussi ces interférences sont appelées **interférences non localisées** (c'est-à-dire dont l'observation n'est pas localisée à une surface donnée). De plus dans le cas particulier des trous de Young, ces interférences ne peuvent pas être observées avec une source étendue.

Si l'on veut utiliser une **source étendue** (c'est-à-dire une source qui soit une surface émettrice, sans limitation de taille de cette surface dans l'une ou l'autre direction), on doit donc procéder autrement. Considérons un point S d'une surface émettrice (figure ci-contre). Pour observer des interférences, il faut au moins faire interférer 2 rayons lumineux issus de cette source ponctuelle S. On appellera ST_1 et ST_2 ces 2 rayons. On a vu (p. 556) qu'on peut encore observer les franges créées par les interférences entre ces 2 rayons avec une fente source, à condition que cette fente soit perpendiculaire au plan ST_1T_2. Pour observer des interférences avec la source étendue, il faut en particulier qu'on puisse observer des interférences avec les 2 fentes sources F_1 et F_2, perpendiculaires (cf. figure ci-dessus). Il faut donc que ST_1 et ST_2 soient simultanément perpendiculaires à F_1 et à F_2. Ceci implique que ST_1 et ST_2 soient confondus. Les interférences sont alors obtenues en partageant la lumière partant dans la même direction $ST_1 = ST_2$ en deux (par exemple avec une lame séparatrice), et en faisant interférer les deux faisceaux cohérents ainsi obtenus. Ces interférences sont appelées **interférences par division d'amplitude**. Ce sont les seules qui peuvent être observées avec une source étendue. Par contre, une source étendue présente une incohérence spatiale (les différents points de la source étendue sont des sources ponctuelles incohérentes). On ne peut alors observer les interférences que sur une surface donnée (le lieu des points où les 2 rayons issus du partage de la lumière émise dans la direction $ST_1 = ST_2$ se recoupent). Ces interférences sont donc **localisées**. On a ainsi justifié l'existence de 2 types d'interférences (*cf.* introduction du **5.**, p. 546) :



Interférences	Localisation	Observées avec une source étendue
par division de front d'onde	non localisées	non
par division d'amplitude	localisées	oui

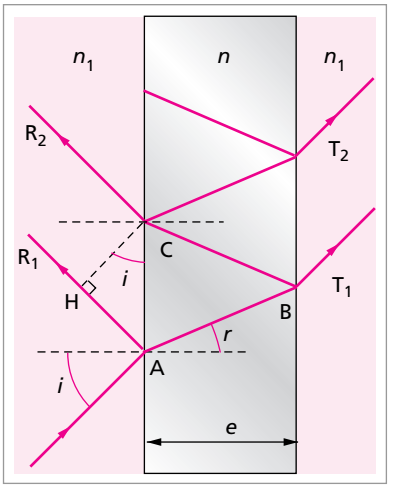
Remarque : un dispositif interférentiel par division d'amplitude éclairé par une source ponctuelle donne des interférences non localisées. C'est l'utilisation d'une source étendue qui conduit à la localisation des interférences.

7. Interférences par division d'amplitude

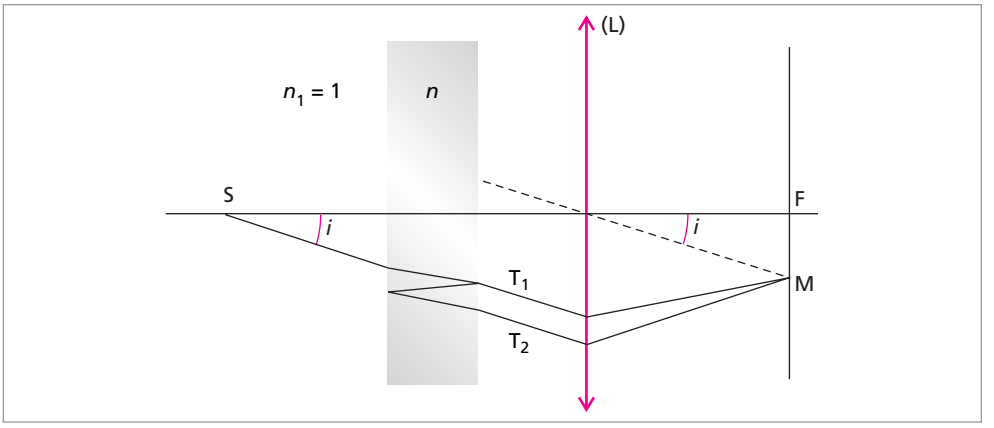
7.1. Franges d'égale inclinaison

• **Lame à faces parallèles**

Considérons une lame à faces parallèles, constituée d'un milieu d'indice n et entourée d'un milieu d'indice n_1. Sur cette lame arrive un faisceau de rayons parallèles, faisant un angle i avec la normale à la lame. Sur le dioptre supérieur de la lame, un rayon incident I donne lieu à un rayon réfléchi R_1 et un rayon réfracté. On appelle r l'angle de réfraction. À son tour, le rayon réfracté donne lieu, sur le dioptre inférieur de la lame, à deux rayons, l'un réfléchi, l'autre réfracté ; c'est le rayon transmis T_1. En réitérant le processus, on obtient les rayons R_2, T_2, etc. Dans le cadre de cette étude, on négligera (pour l'instant) les rayons R_i et T_i avec $i > 2$ (ce sont des rayons peu intenses par rapport aux précédents).



Les rayons R_1 et R_2 sont parallèles. Ils peuvent donc interférer là où ils se croisent, c'est-à-dire à l'infini (en pratique dans le plan focal d'une lentille). Il en est de même pour les rayons transmis T_1 et T_2. Ces interférences sont localisées à l'infini.



Le déphasage (ou la différence de marche δ) entre ces 2 rayons se décompose en deux termes :
– un déphasage lié à la différence de marche "géométrique" entre les 2 rayons ;
– un déphasage complémentaire introduit par l'existence de réflexions sur des milieux d'indice inférieur.

Différence de marche "géométrique" entre les 2 rayons : Considérons les deux rayons réfléchis R_1 et R_2. Leur différence de marche "géométrique" δ_g est due à ce que, à partir de A, ils ne suivent pas le même chemin. Puisque les 2 rayons réfléchis sont parallèles (donc appartiennent à la même onde plane), les chemins optiques entre un même plan d'onde (par exemple le plan CH) et le point M où sont observées les interférences sont les mêmes que l'on suive R_1 ou R_2. Donc (HM) = (CM) ; ainsi la différence de marche "géométrique" δ_g entre R_2 et R_1 est :

$$\delta_g = (\mathrm{AB}) + (\mathrm{BC}) - (\mathrm{AH}) \tag{62}$$

On a $(\mathrm{AB}) = (\mathrm{BC}) = n\mathrm{AB} = n\dfrac{e}{\cos r}$, et $(\mathrm{AH}) = n_1\mathrm{AH} = n_1\mathrm{AC}\sin i$. En utilisant en outre $\mathrm{AC} = 2e\tan r$, ainsi que la relation de Descartes entre i et r :

$$n_1 \sin i = n \sin r \tag{63}$$

on obtient :

$$\boxed{\delta_g = 2ne\cos r} \tag{64}$$

Remarque : ce résultat sert très souvent. Il est donc important de savoir le retrouver sans difficulté. Attention à ne pas oublier le terme −(AH) dans l'expression (62).

Déphasage dû aux réflexions : considérons un dioptre plan séparant deux milieux transparents, d'indices n_1 et n_2 (*cf.* figure p. 356). L'onde incidente l'éclaire du côté du milieu d'indice n_1 et sous incidence normale. En M, les amplitudes $s_r(\mathrm{M})$ et $s_t(\mathrm{M})$ des ondes réfléchie et transmise sont proportionnelles à celle de l'onde incidente en M, $s_i(\mathrm{M})$, les coefficients de proportionnalité étant les coefficients de réflexion r et de transmission t de l'amplitude :

$$\boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \tag{65}$$

– Si la réflexion a lieu sur un milieu d'indice supérieur (à celui du milieu dans lequel se propage l'onde incidente), soit ici si $n_2 > n_1$, r est négatif, et donc en M l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente (en M) ;
– Si au contraire la réflexion a lieu sur un milieu d'indice inférieur, soit si $n_2 < n_1$, r est positif, et donc en M, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente.
Dans tous les cas, t est positif, et donc en M, l'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente.

Propriété : **Dans le cas d'une réflexion sur un milieu d'indice supérieur, et dans ce cas seulement, il s'introduit en M un déphasage de π entre l'onde réfléchie et l'onde incidente.**

Dans le cas où l'onde incidente arrive sur le dioptre sous incidence oblique, les expressions des coefficients r et t diffèrent des expressions (65), mais tant que l'angle d'incidence i n'est pas trop grand, leurs signes sont ceux obtenus à incidence normale. Les conclusions auxquelles on est arrivé pour l'incidence normale sont donc encore valables.
Les deux rayons T_1 et T_2 (ou R_1 et R_2) peuvent donc être déphasés par l'existence d'un nombre différent, sur les 2 trajets, de réflexions sur des milieux d'indice supérieur On caractérisera ce déphasage par une différence de marche supplémentaire δ_r, qui est égal à 0 ou $\lambda/2$ suivant que le déphasage correspondant est 0 ou π.

Remarque : ce déphasage est défini modulo 2π, et par conséquent δ_r est défini modulo λ.

La différence de marche totale est bien évidemment la somme de ces 2 contributions :

$$\delta = \delta_g + \delta_r \tag{66}$$

Sur chacun des trajets de R_1 et R_2, il y a une réflexion. Les deux réflexions sont l'une sur un milieu d'indice inférieur, et l'autre sur un milieu d'indice supérieur (que n soit supérieur ou inférieur à n_1). On a donc :

$$\text{en réflexion } \delta_r = \frac{\lambda}{2} \tag{67}$$

Le rayon T_1 ne subit aucun réflexion, tandis que T_2 subit 2 réflexions. Que ces deux réflexions aient lieu sur des milieux d'indice supérieur (si $n_1 > n$) ou inférieur (si $n_1 < n$) ne change rien, les réflexions n'introduisent globalement aucune différence de phase, et on a :

$$\text{en transmission } \delta_r = 0 \tag{68}$$

• Figure d'interférences observée à l'infini
La lame à face parallèle est éclairée par une source (ponctuelle ou étendue). La lame est donc éclairée par des rayons dont l'angle d'incidence i peut prendre toutes les valeurs (dans une plage donnée). La figure d'interférences est observée dans le plan focal d'une lentille. En M viennent converger tous les rayons transmis faisant un angle i avec l'axe optique. L'ensemble du plan focal est donc éclairé, et la figure d'interférences a évidemment la symétrie cylindrique. Les franges sont donc des anneaux. Un rayon incident, d'angle d'incidence i, engendre deux rayons transmis T_1 et T_2, entre lesquels la différence de marche est $\delta = 2ne\cos r$ (avec $\sin i = n \sin r$). Ainsi :
Au centre de la figure d'interférences, les rayons qui interférent sont tels que $i = 0$ (donc $r = 0$). Leur différence de marche est donc $\delta = 2ne$. L'ordre d'interférence $p = \dfrac{\delta}{\lambda}$ y est élevé. Pour pouvoir observer cette figure d'interférences, il faut donc que la lumière utilisée soit suffisamment cohérente, plus précisément que sa longueur de cohérence ℓ_c soit supérieure à la différence de marche, soit ici : $\ell_c > 2ne$. Cette figure d'interférences ne peut donc pas être observée en lumière blanche.
Plus on s'intéresse à un point M situé à l'extérieur de la figure, plus les rayons qui y convergent ont un angle d'incidence i élevé, donc l'ordre d'interférences p diminue. On

observera donc une succession d'anneaux brillants (quand p est entier) et sombres (quand p est demi-entier).
Si on suppose que le centre de la figure est brillant (donc si l'ordre d'interférence $p_F = \dfrac{2ne}{\lambda}$ y est entier), le j-ième anneau brillant correspond à une différence de marche $\delta = 2ne\cos r = (p_F - j)\lambda$. Dans l'hypothèse où tous les angles sont petits, le rayon angulaire de cet anneau est :

$$i_j = \sqrt{j\frac{n\lambda}{e}} \tag{69}$$

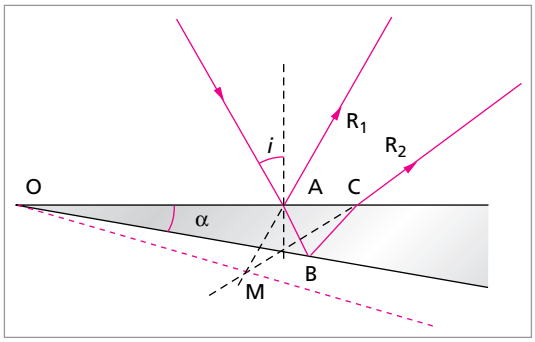
(et son rayon géométrique est $R_j = f\, i_j$ où f est la distance focale de la lentille). Leur rayon croît comme $\sqrt{j}$. Les anneaux sont donc de plus en plus serrés lorsqu'on s'éloigne du centre. Un anneau reçoit des rayons de même inclinaison i, ce qui justifie le nom donné à ces franges (franges d'égale inclinaison).

Remarques : avec une source de lumière blanche, les différentes figures d'interférences associées à chacune des longueurs d'onde se brouillent. Sur l'écran, on ne voit donc plus d'anneaux, mais on obtient du blanc d'ordre supérieur.
Les franges observées en transmission ont un faible contraste. En revanche, on peut aussi observer les franges en réflexion (essayer d'imaginer comment). Les franges ainsi obtenues sont alors beaucoup plus contrastées ($C \approx 1$).

7.2. Franges d'égale épaisseur

• Lame prismatique

Une lame prismatique (c'est-à-dire un coin), d'angle α, est éclairée par une onde plane, d'angle d'incidence i. Un rayon de cette onde plane donne lieu à 2 rayons réfléchis R_1 et R_2, Ces deux rayons ne sont pas parallèles. Ils se coupent à distance finie, et en leur point d'intersection M, on peut observer leur interférence. Si on choisit un autre rayon de l'onde, i.e. un autre point d'arrivée A (l'angle d'incidence étant constant), l'ensemble des points M obtenus forme un plan contenant l'arête de la lame prismatique. Les interférences ne peuvent être observées que sur cette surface, appelée surface de localisation. De nouveau on obtient ici des interférences localisées.



Dans la mesure où les angles sont petits, le plan de localisation est situé au voisinage immédiat de la lame. Ce plan étant virtuel, on observe ces interférences soit en formant l'image du plan de localisation sur l'écran, soit directement à l'œil en accommodant sur le plan de localisation.

La différence de marche géométrique entre les deux rayons est :

$$\delta_g = [(AB) + (BC) - (CM)] - [-(AM)]$$

Dans la mesure où les angles sont petits, cette différence de marche peut être calculée exactement de la même façon qu'au paragraphe **7.1**. On a donc $\delta_g = 2ne\cos r$, où, comme plus haut, r est l'angle de réfraction dans la lame et où e est l'épaisseur de la lame en A, soit $e = \alpha x$ (avec $x = OA$).

Remarque : Ceci revient à confondre l'intersection avec R_1 du cercle de centre M et de rayon MC et le point H, projection de C sur R_1 tel qu'il a été défini précédemment (cf. figure p. 562), ce qui est justifié dans la mesure où α est petit.

Si on observe des franges par réflexion (tel qu'on le fait sur la figure p. 565), il faut aussi tenir compte du déphasage introduit par les réflexions sur les milieux d'indice supérieur ; comme précédemment, on a $\delta_r = \dfrac{\lambda}{2}$. D'où :

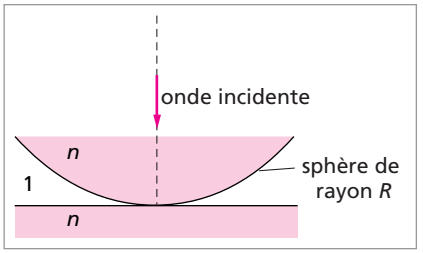
$$\delta = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2} \tag{70}$$

Lorsqu'on observe des points différents de la lame, e varie. Par contre i, donc cos r, ne varie pas. On observera donc une succession de franges brillantes (lorsque δ est un multiple entier de λ, i.e. quand l'ordre d'interférence $p = \delta/\lambda$ est entier) et de franges sombres (lorsque p est un demi-entier).. Les franges sont des droites parallèles à l'arête de la lame prismatique. La distance entre deux franges brillantes consécutives (l'interfrange) est :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha\cos r} \tag{71}$$

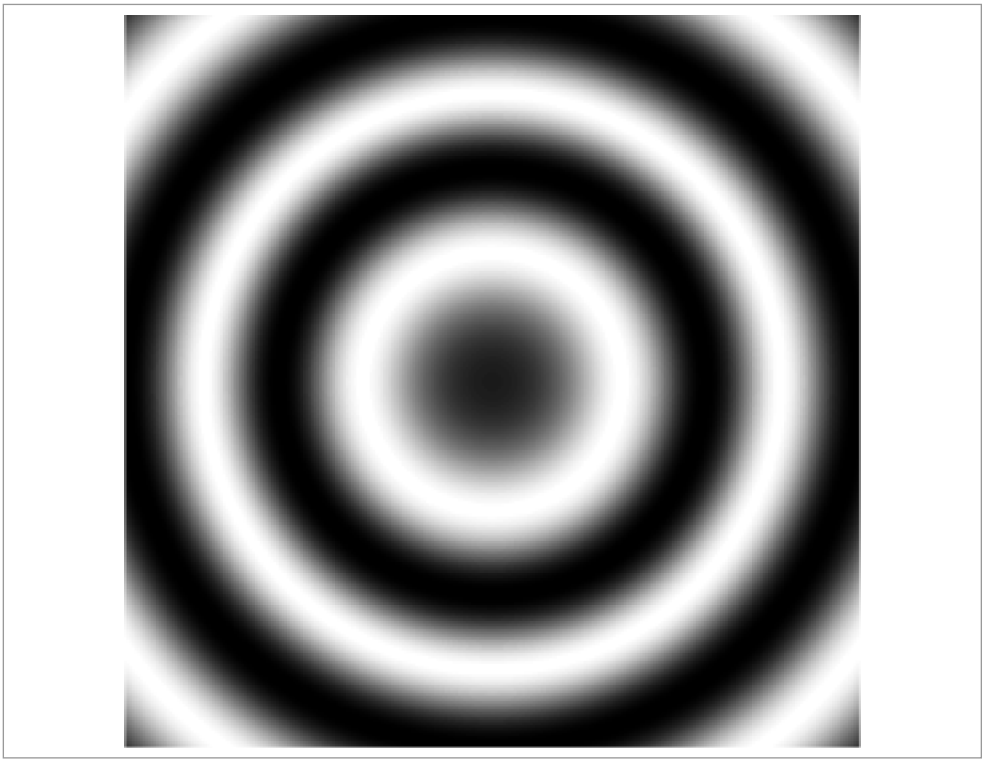
Pour qu'une figure d'interférences puisse être observée, il faut que l'angle d'incidence i soit le même pour tous les rayons incidents (la lame doit être éclairée avec une onde plane). Ici c'est l'épaisseur de la lame qui varie entre les différents points d'observation. Et tous les points d'une même frange correspondent à la même valeur de l'épaisseur e, ce qui justifie le nom donné à ces franges (franges d'égale épaisseur).
Puisque chaque frange est associée à une épaisseur donnée de la lame, la figure d'interférences constitue une carte de la lame, où chaque frange est une ligne de niveau. La distance d'"altitude" entre 2 lignes de niveaux consécutives est $\Delta e = \dfrac{\lambda}{2n\cos r}$ (soit de l'ordre de grandeur d'une fraction de longueur d'onde). Cette capacité qu'on a de visualiser une carte des lignes de niveau est utilisée pour contrôler l'état d'une surface d'un composant optique (on place la surface en cours de polissage en face d'une surface parfaitement plane, on réalise ainsi un coin d'air entre deux morceaux de verre, en observant les franges d'égale épaisseur, on "cartographie" la surface en cours de polissage).

• **Anneaux de Newton**



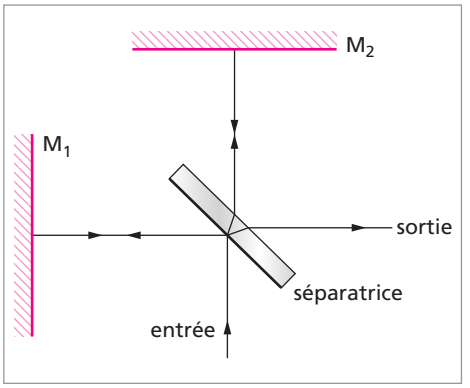
Le principe de la méthode précédente d'étude d'une surface optique est illustré par l'expérience des anneaux de Newton (fig. ci-contre). On pose la face convexe d'une lentille sur la surface plane d'un bloc de verre. La face de la lentille est sphérique, de très grand rayon de courbure R (c'est par exemple une lentille plan-convexe de très grande focale). On a ainsi délimité une lame d'air (d'indice 1), d'épaisseur variable, entre deux pièces de verre (d'indice n). L'ensemble est éclairé par une onde plane monochromatique sous incidence normale ($i = 0$) et la différence de marche entre les deux rayons réfléchis sur chacune des 2 faces de la lame d'air est donc $\delta = 2e + \dfrac{\lambda}{2}$.

La figure d'interférence est constituée d'anneaux, alternativement sombres et brillants, qui correspondent à des lignes d'épaisseur fixée de la lame d'air. Au centre de la figure d'interférence, on a $e = 0$ (la surface sphérique est en contact avec le plan), donc $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$, par conséquent le centre est sombre. Plus on s'éloigne du centre, plus e et donc δ augmentent. On peut calculer le rayon du $j^{\text{ème}}$ anneau sombre : $R_j = \sqrt{j\lambda R}$.



8. Interféromètres

8.1. Interféromètre à deux ondes (ou interféromètre à faisceaux séparés)

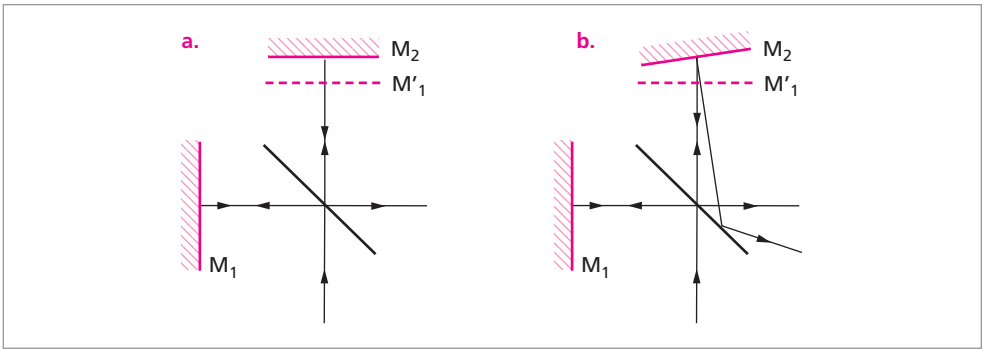


On appelle interféromètre à 2 ondes un interféromètre où les deux ondes qui interfèrent sont séparées géométriquement. Le prototype en est l'**interféromètre de Michelson** (mais il existe d'autres interféromètres à 2 ondes). Dans l'interféromètre de Michelson, le faisceau incident est partagé en deux par une séparatrice (lame semi-réfléchissante constituée d'une lame de verre sur laquelle on a déposé une couche métallique très fine). Chacun des deux faisceaux ainsi obtenus est renvoyé sur lui-même par un miroir. La séparatrice sert de nouveau pour recombiner une partie de ces 2 faisceaux dans la dernière direction (fig. ci-dessus).

Il est plus facile de se représenter l'action de cet interféromètre en matérialisant l'image M_1' de M_1 par la séparatrice (M_1' est le symétrique de M_1 par rapport à la séparatrice) :

– Si M_1' et M_2 sont parallèles, l'interféromètre se comporte comme une lame mince : franges d'égale inclinaison (Fig. a, ci-dessous).

– Si M_1' et M_2 font un angle α, l'interféromètre se comporte comme un coin d'air s : franges d'égale épaisseur (Fig. b, ci-dessous).



Pour modifier la différence de marche δ, il suffit de rallonger un bras sans modifier l'autre. Il y a interférence si deux ondes cohérentes interfèrent. Elles doivent donc être issues du même train d'onde initial. On a donc la condition :

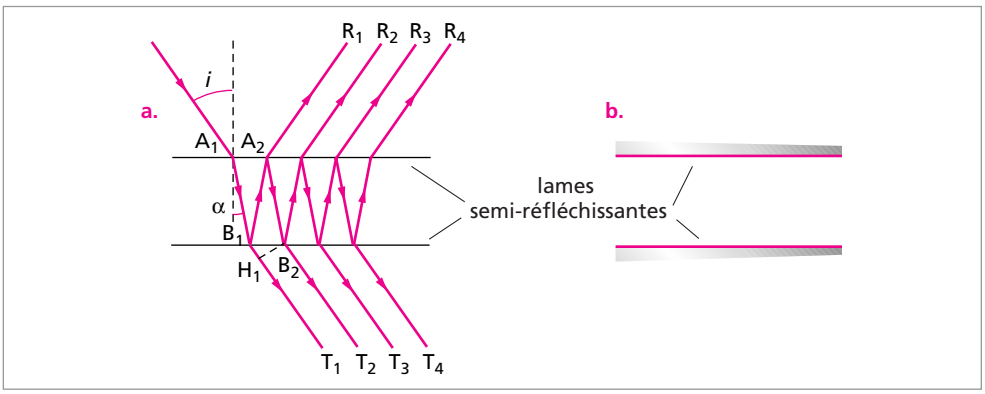
$$\ell_c > \delta \qquad (72)$$

Remarque : cette condition est générale. Ce qui est spécifique aux interféromètres étudiés dans ce paragraphe et dans le paragraphe suivant, c'est qu'ils permettent d'obtenir des ordres d'interférence élevés.

L'interféromètre de Michelson est à la base de nombreuses applications, en particulier de l'interférométrie par transformée de Fourier.

8.2. Interféromètre à ondes multiples (ou de Fabry-Perot)

Un interféromètre de Fabry-Perot (Fig. a, ci-dessous) peut être considéré comme une lame à faces parallèles dont les faces ont reçu un traitement de façon à être semi-réfléchissantes (en général elles ont été métallisées). Leur coefficient de réflexion en est accru, de sorte qu'on ne peut plus négliger les rayons ayant subi plus de 2 réflexions, comme R_3, R_4,... ou T_3, T_4...



De façon pratique, pour réaliser un interféromètre de Fabry-Perot, on utilise souvent une lame d'air délimitée par 2 lames semi-réfléchissantes (Fig. b, ci-dessus). Le traitement semi-réfléchissant est situé sur les faces intérieures des lames. En outre on doit éviter que les faces extérieures soient parallèles entre elles ou aux faces intérieures (pour ne pas générer une deuxième lame à faces parallèles qui perturberait le fonctionnement de la première).

Avec cet interféromètre, on peut observer les interférences de l'ensemble des rayons transmis T_j ($j = 1, 2, 3, ...$), ou encore celles de l'ensemble des rayons réfléchis R_j ($j = 1, 2, 3, ...$). Ces interférences sont localisées à l'infini. En pratique on les observe dans le plan focal d'une lentille La figure d'interférences a évidemment une symétrie cylindrique. On observe donc des anneaux.

Pour décrire quantitativement cette figure d'interférences, on doit calculer l'intensité de la lumière transmise (ou réfléchie) dans la direction i. On s'intéressera ici à la lumière transmise. On appellera i l'angle d'incidence, α l'angle de réfraction à l'intérieur de la lame. On introduit aussi les coefficients de réflexion r et de transmission t des surfaces semi-réfléchissantes. Ces coefficients dépendent du traitement qui a été fait sur ces

surfaces, et non des indices n et n_1 des 2 milieux qu'elles séparent (les formules (65) ne s'appliquent qu'à un dioptre non traité).
On appelle s_0 l'amplitude de l'onde incidente en A_1. L'amplitude s_1 de la première onde transmise T_1 en B_1 est :

$$s_1 = t^2 s_0 e^{i\varphi_0} \qquad \text{avec} \qquad \varphi_0 = 2\pi \frac{(A_1B_1)}{\lambda} \tag{73}$$

car cette onde subit 2 transmissions, et est déphasée par rapport à l'onde incidente par le trajet (A_1B_1). De même, l'amplitude de la deuxième onde transmise T_2 dans le même plan d'onde est :

$$s_2 = tr^2 t s_0 e^{i\delta_g} e^{i\phi} = r^2 e^{i\varphi} s_1 \qquad \text{avec} \qquad \varphi = 2\pi \frac{\delta_g}{\lambda} \tag{74}$$

Cette onde subit une transmission, puis 2 réflexions et enfin une transmission. En outre elle est déphasée par rapport à l'onde T_1 en B_1 par la différence de marche géométrique $\delta_g = (B_1A_2) + (A_2B_2) - (B_1H_1)$ (voir p. 563) :

$$\delta_g = 2ne \cos \alpha \tag{75}$$

Remarque : la différence de marche qui intervient dans l'expression 45 est bien la différence de marche "géométrique" δ_g. En effet le terme supplémentaire calculé p. 563 traduit le signe des coefficients de réflexion. Dans la mesure où r est ici une quantité algébrique (positive ou négative), on tient déjà compte de ce signe. Il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte une deuxième fois en introduisant la différence de marche δ_r.

L'amplitude de l'onde T_2 s'obtient donc à partir de celle de l'onde T_1 en la multipliant par le facteur $r^2 e^{i\varphi}$, qui traduit le fait que, par rapport à l'onde T_1, l'onde T_2 a subi 2 réflexions supplémentaires et a été déphasée par la différence de marche δ_g. De la même façon, par rapport à l'onde T_j, l'onde T_{j+1} a aussi subi 2 réflexions supplémentaires et a aussi été déphasée par la différence de marche $(B_jA_{j+1}) + (A_{j+1}B_{j+1}) - (B_jH_j) = \delta_g$. Donc :

$$s_{j+1} = r^2 e^{i\varphi} s_j \tag{76}$$

L'amplitude s de l'onde totale transmise dans la direction i est la somme des amplitudes de chacune des ondes transmises T_j :

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} s_j = s_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{i\varphi})^k \right) \tag{77}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique, de raison $x = r^2 e^{i\varphi}$. Sachant que $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (si $\|x\| < 1$), on obtient :

$$s = \frac{s_1}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \tag{78}$$

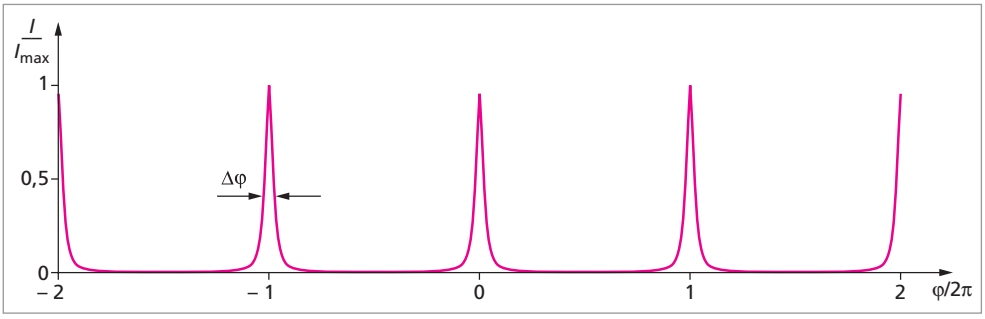
D'où l'intensité de la lumière transmise par l'interféromètre :

$$I = ss^* = \frac{I_{\max}}{1 + m\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} \qquad \text{avec} \qquad I_{\max} = \frac{s_1 s_1^*}{(1-r^2)^2} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \tag{79}$$

Dans cette expression, $I_{\max}$ représente l'intensité maximale qui peut être observée. On l'atteint à chaque fois que φ est un multiple de 2π, c'est-à-dire lorsque 2 ondes transmises consécutives T_j et T_{j+1} sont en phase. Dans ce cas δ_g est égal à un nombre entier de longueur d'onde λ.

On peut constater sur la représentation de $I(\varphi)$ (fig. ci-dessous) que chacun des maxima de I est très étroit. Dans l'hypothèse où $m \gg 1$, il est facile de calculer la largeur à mi-hauteur de ces maxima :

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{m}} \tag{80}$$



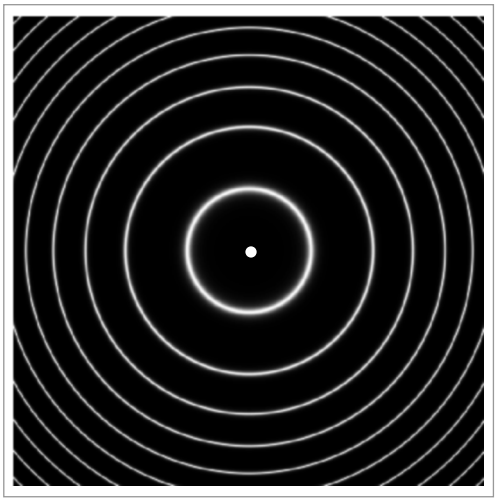
La figure d'interférences observée à l'infini (en pratique dans le plan focal d'une lentille) est constituée d'anneaux. Chacun des anneaux correspond à un des maxima étudiés précédemment (à une valeur de φ correspond une valeur de l'angle de réfraction α, donc une valeur de l'angle d'incidence i, relié à α par la relation de Descartes $n \sin i = n \sin \alpha$). Ces anneaux sont donc étroits (beaucoup plus que ne le sont ceux obtenus dans l'étude des franges d'inclinaison, i.e. avec une lame non traitée), et ils sont d'autant plus étroits que les surfaces de l'interféromètre sont réfléchissantes : à la limite où $R \to 1$, ces anneaux sont infiniment étroits.

Au centre de la figure d'interférences ($i = 0$, donc $\alpha = 0$), la différence de marche entre deux rayons consécutifs est maximum, elle vaut $\delta = 2ne$. Cette différence de marche est en général élevée, et les franges ne pourront donc être observées qu'avec une lumière très monochromatique, c'est-à-dire avec une source ayant une largeur spectrale $\Delta\nu$ faible, ou encore une longueur de cohérence ℓ_c élevée.

Lorsqu'on s'éloigne du centre de la figure d'interférences, i donc α croissent, par conséquent la différence de marche δ entre deux rayons consécutifs décroît. En supposant le centre de la figure d'interférences brillant (donc pour une différence de marche entre 2 rayons consécutifs $\delta = 2ne$ multiple entier de la longueur d'onde), il est facile de calculer

le rayon angulaire du $j^{\text{ème}}$ anneau brillant ; on obtient :

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{j\lambda}{ne}} \tag{81}$$



Les rayons angulaires des anneaux croissent comme $\sqrt{j}$; ils sont donc de plus en plus serrés au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre.

Les applications de l'interféromètre de Fabry-Perot sont nombreuses. Par exemple les couches anti-reflet en sont une application directe. Beaucoup de ces applications sont reliées à sa capacité de produire des anneaux très fins. On peut par exemple s'en servir pour comparer deux longueurs d'onde très proches. Si la source utilisée émet un doublet de longueurs d'onde, comme une lampe à Sodium par exemple, on observera deux séries d'anneaux dont l'étude permet d'obtenir la différence entre les deux longueurs d'onde du doublet. L'interféromètre de Fabry-Perot est donc très utilisé en métrologie optique, soit pour mesurer des longueurs d'onde, soit pour filtrer spectralement un rayonnement (il est à la base du fonctionnement des filtres interférentiels).

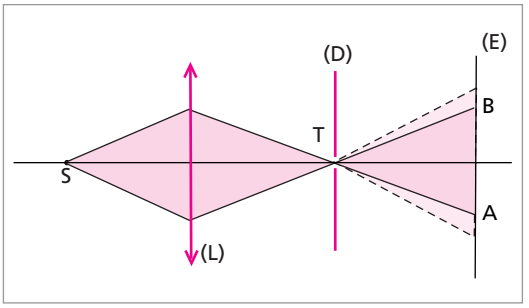
L'interféromètre étudié dans ce paragraphe peut être envisagé différemment : si le coefficient de réflexion des 2 surfaces réfléchissantes tend vers 1 ($R \to 1$), le système devient un système de 2 miroirs parallèles, c'est-à-dire une cavité optique. Si R est grand (mais inférieur à 1), l'interféromètre de Fabry-Perot peut donc être considéré comme une cavité optique avec pertes (les pertes sont la lumière qui en sort, donc celle qu'on a étudiée ici), ou encore comme un résonateur optique. Chacun des maximums d'intensité dans la lumière transmise correspond à une résonance de ce résonateur. Une telle cavité optique avec pertes est un des ingrédients indispensables au fonctionnement d'un laser. La quasi-totalité des lasers peuvent donc être considérés comme un interféromètre de Fabry-Perot à l'intérieur duquel on a mis quelque chose.

9. Principe de Huygens – Fresnel

9.1. Qu'est ce que la diffraction ?

Considérons l'expérience représentée p. 573 : on focalise à l'aide d'une lentille (L) la lumière issue d'une source S sur un trou T percé dans un écran (D). On observe la lumière arrivant sur un écran (E) Si l'on en croît l'optique géométrique, on ne doit pas observer de

la lumière à l'extérieur de la zone AB, c'est-à-dire là où aucun rayon lumineux issu de la lentille (L) et passant par T ne peut accéder en ligne droite. En réalité, si le trou T est assez petit, on observe de la lumière dans cette zone (dite d'ombre géométrique), de plus on y observe aussi des franges. C'est à ce phénomène qu'on se réfère quand on parle de **diffraction**.



Ainsi définie, la diffraction ne peut s'expliquer dans le cadre de l'optique géométrique.

Remarque : en fait ce n'est pas la première fois qu'on rencontre ce phénomène. C'est grâce à lui que dans l'expérience des trous de Young, chacun des trous T_1 et T_2 émet de la lumière dans toutes les directions.

9.2. Principe de Huygens – Fresnel

Pour rendre compte de la propagation de la lumière dans le cadre de l'expérience précédente, il faut faire explicitement intervenir sa nature ondulatoire, et non se limiter à l'optique géométrique.

Principe de Huygens : **Les ondes lumineuses se propageant à l'extérieur d'une surface Σ entourant la source S sont identiques à celles qu'on obtiendrait en supprimant S et en la remplaçant par des sources fictives convenablement choisies sur la surface Σ.**

Postulat de Fresnel : **Un point M de la surface Σ doit être considéré comme une source dont l'amplitude et la phase sont précisément l'amplitude et la phase de l'onde lumineuse produite en M par la source S.**

L'ensemble des deux constitue le principe de Huygens – Fresnel.

9.3. Validité du principe de Huygens – Fresnel

Le principe de Huygens – Fresnel se déduit des équations de Maxwell, moyennant quelques approximations en général justifiées. En toute rigueur, ce n'est donc pas un "principe", mais une conséquence des lois de l'électromagnétisme.

Approfondissement

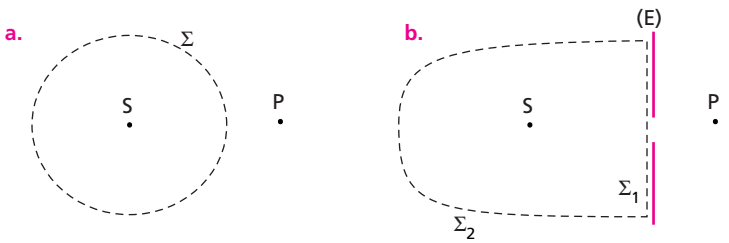
Pour un milieu infini, si la surface Σ entourant la source S est fermée, l'amplitude en un point P extérieur à Σ du champ émis par la source S peut se calculer comme une intégrale de surface portant sur Σ, et ne faisant intervenir que le champ produit par la source S en M $\in \Sigma$ et sa dérivée. Ainsi le principe de Huygens est rigoureusement valable à condition que Σ soit une surface fermée entourant S (et que le milieu soit infini).

Pour la diffraction par un écran (E) percé d'une ouverture T, on peut choisir la surface Σ de façon à ce qu'elle coïncide en partie avec l'écran (Σ_1). Σ_1 est alors complétée par la demi-sphère de très grand rayon Σ_2 de façon à obtenir une surface Σ fermée. Il est possible de montrer que la contribution des sources fictives situées sur Σ_2 au champ reçu en P est nulle (à la limite où elles sont infiniment loin du point P). Seule subsiste alors la contribution des sources fictives situées sur Σ_1.

On fait alors les hypothèses suivantes :

– la présence de l'écran annule le champ rayonné par une source fictive située dans l'ouverture T (c'est cette hypothèse qui est la plus critiquable, en particulier lorsque l'ouverture a une dimension de l'ordre ou plus faible que la longueur d'onde λ).

Dans ces hypothèses, et à condition que les angles entre la normale à la surface Σ_1 et les rayons incident et diffracté soient petits, on montre que le postulat de Fresnel est justifié (à ceci près que la phase de l'onde diffractée diffère de $\pi/2$ de celle de l'onde incidente ; toutefois ce déphasage, qui existe pour toutes les sources fictives M de la surface Σ_1, n'a aucune incidence tant qu'on calcule l'intensité de la lumière diffractée, c'est pourquoi on l'oubliera dans la suite de ce chapitre).



Tant que les angles d'incidence et de réfraction (α' et α, fig. p. 577) sont petits, et tant qu'on s'intéresse à l'intensité de la lumière diffractée (et non à la valeur de sa phase par rapport à celle de la source S au même instant), le principe de Huygens – Fresnel fournit des résultats en parfait accord avec l'expérience, pour des ouvertures diffractantes de taille suffisante ($\geqslant \lambda$).

9.4. Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer

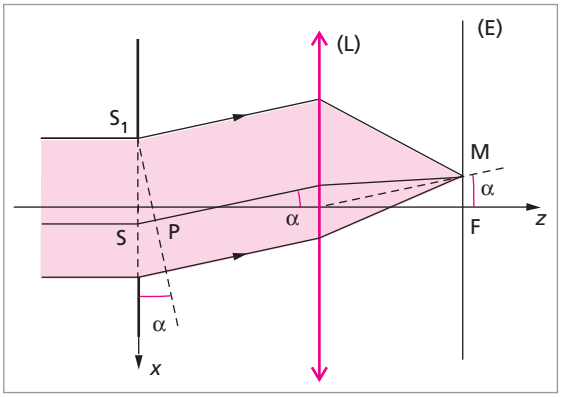
Si on observe la lumière diffractée à distance finie, on parle de **diffraction de Fresnel**. Si on observe la lumière diffractée à l'infini, on parle de **diffraction de Fraunhofer**.

Du point de vue théorique, on n'étudiera ici que la diffraction de Fraunhofer, Toutefois en utilisant le principe de Huygens – Fresnel, il est possible d'étudier la diffraction de Fresnel. Mais cette étude est compliquée, et n'est abordée qu'à un niveau très spécialisé.

Par contre, du point de vue pratique, on passe continûment de l'une à l'autre, par exemple lorsqu'on place l'écran d'observation non pas strictement dans le plan focal de la lentille, mais juste devant ou juste derrière ce plan focal.

10. Diffraction à l'infini par une fente

10.1. Diffraction par une fente infinie éclairée sous incidence normale



On éclaire une fente de largeur a (selon Ox), de longueur infinie (selon Oy), par un faisceau de rayons parallèles, perpendiculairement à la fente (les rayons lumineux sont donc parallèles à Oz, et les plans d'onde du faisceau incident sont parallèles à Oxy) (Fig. ci-contre). On observe la lumière diffractée à l'infini, c'est-à-dire de façon pratique en plaçant un écran E au plan focal image d'une lentille L. En l'absence de diffraction (c'est-à-dire en ne se fiant qu'à l'optique géométrique), il n'arriverait de la lumière qu'en un seul point de l'écran, le foyer F de la lentille. L'existence de lumière ailleurs qu'en ce point est donc caractéristique de la diffraction. Dans tout ce qui suit, la lumière incidente est monochromatique, de longueur d'onde λ.

On utilise le principe de Huygens-Fresnel, en choisissant la surface Σ comme indiqué sur la figure p. 574. Comme il a été vu au 9.3. seules les sources fictives S situées juste derrière la fente éclairent le point M. L'onde lumineuse arrivant en M est donc la somme des amplitudes des ondes émises par les sources fictives délimitées par la fente diffractante. Toutes ces sources sont en phase : la lumière incidente arrive normalement sur l'écran diffractant et le plan Oxy est un plan d'onde. En revanche, les ondes émises par ces sources S ne sont plus en phase lorsqu'elles arrivent en M : les chemins optiques (S_1M) et (SM) ne sont pas égaux. Pour calculer la différence de marche entre les deux chemins (S_1M) et (SM), il faut remarquer que les rayons émergeant des sources fictives S et convergeant en M sont des rayons parallèles (en effet le point M est dans le plan focal de la lentille L). L'onde constituée de ces différents rayons est donc une onde plane. De par la propriété des lentilles minces, les chemins optiques entre un plan d'onde et le point M sont égaux : (S_1M) = (PM). La différence de marche entre les deux chemins (S_1M) et (SM) est donc :

$$\delta = (\mathrm{SM}) - (\mathrm{S_1M}) = (\mathrm{SP}) \tag{82}$$

soit x l'abscisse de S comptée à partir de S_1 ($x = \overline{S_1S}$) et α l'angle du faisceau diffracté par rapport à l'axe optique Oz. En considérant de plus que la fente est placée dans l'air (d'indice $n = 1$), on a :

$$\delta = x \sin\alpha \approx x\alpha \tag{83}$$

On suppose ici que α est petit, c'est-à-dire qu'on est dans les conditions de l'optique paraxiale.
Pour obtenir l'expression de l'amplitude $s(\mathrm{M})$ de l'onde lumineuse en M, on ajoute les amplitudes en M des ondes émises par chacune des sources fictives. Chacune des sources émet une onde d'amplitude proportionnelle à sa surface, donc l'amplitude émise par une fente élémentaire de largeur dx est proportionnelle à sa largeur :

$$\mathrm{d}s(S) = b_f \mathrm{d}x \tag{84}$$

(où b_f est une constante de proportionnalité) et l'amplitude en M de la même onde (émise par S) est déphasée de $k\delta$ (avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$), d'où :

$$\mathrm{d}s(\mathrm{M}) = b_f \mathrm{d}x \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} \tag{85}$$

Ainsi l'amplitude lumineuse totale reçue en M s'écrit :

$$s(\mathrm{M}) = \int \mathrm{d}s(\mathrm{M}) = \int_0^a b_f \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} \mathrm{d}x \tag{86}$$

Remarque : puisqu'il y a une infinité de sources fictives S, repérées par la variable continue x, la somme sur toutes les sources fictives se traduit ici par une intégrale sur x. D'autre part, dans les expressions (85) et (86), on a volontairement oublié le facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\mathrm{PM})}$ dû au déphasage entre le plan d'onde S_1P et le point M. En effet ce facteur est le même pour toutes les sources fictives S, et il disparaîtra lorsqu'on calculera l'intensité $I = |s(\mathrm{M})|^2$ de la lumière diffusée en M.

L'intégrale se calcule aisément, on a :

$$s(\mathrm{M}) = b_f \int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha x} \mathrm{d}x = b_f \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha a} - 1}{\mathrm{i}k\alpha} \tag{87}$$

D'où l'expression de l'intensité de la lumière diffractée en M :

$$I = |s(\mathrm{M})|^2 = |b_f|^2 \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha a} - 1\right|^2}{(k\alpha)^2} = |b_f|^2 \frac{4\sin^2(\frac{ka\alpha}{2})}{(k\alpha)^2} = |b_f|^2 a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka\alpha}{2}\right) \tag{88}$$

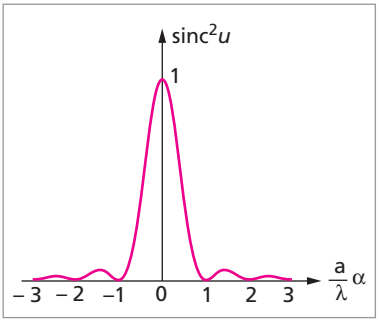
On introduit ici la fonction **sinus cardinal**, sinc, définie par :

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{89}$$

Si $x \to 0$, $\operatorname{sinc}(x) \to 1$. Ainsi, si $\alpha \to 0$, $I \to I_0 = |b_f|^2 a^2$. Cette valeur de l'intensité lumineuse correspond à celle reçue au foyer de la lentille (i.e. pour $\alpha = 0$). On retiendra :

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka\alpha}{2}\right) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{a}{\lambda}\alpha\right) \tag{90}$$

La figure ci-contre montre l'allure de la fonction $f(x) = \text{sinc}^2(\pi x)$ et donc celle des variations de I avec α.



Lorsque x est un entier non nul n, $\text{sinc}^2(\pi x)$ est nul, ainsi lorsque $\alpha = n\dfrac{\lambda}{a}$, l'intensité I s'annule. Dans la figure de diffraction, on observe donc une succession de franges noires et brillantes. Les franges noires sont situées en $\alpha = n\dfrac{\lambda}{a}$ avec n entier non nul. Les franges brillantes sont situées entre les franges noires, soit approximativement en $\alpha = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{a}$. La frange centrale, située en $\alpha = 0$, est beaucoup plus intense que les autres (à titre de comparaison, l'intensité de la première frange latérale, située en $\alpha \approx \pm\dfrac{3}{2}\dfrac{\lambda}{a}$, est 0,047 I_0).Elle est également deux fois plus large que les autres et sa largeur (angulaire) totale à mi-hauteur est :

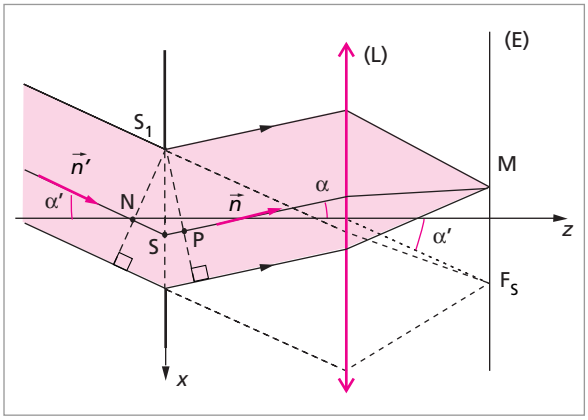
$$\boxed{\Delta\alpha = \frac{\lambda}{a}} \qquad (91)$$

La frange centrale (et d'une manière générale toute la figure de diffraction) est d'autant plus large que la fente est étroite.

Remarque : On donne ici les positions angulaires des franges, ainsi que la largeur angulaire de la frange centrale. Les positions géométriques des franges sur l'écran E s'obtiennent en multipliant les positions angulaires correspondantes par la distance focale f de la lentille L.

10.2. Diffraction par une fente infinie éclairée sous incidence oblique

Le faisceau incident reste un faisceau de lumière parallèle, dont les rayons lumineux font un angle α' avec l'axe Oz. Les angles α et α' sont considérés comme petits. Maintenant les différentes sources fictives S de la surface Σ_1 ne sont plus en phase : sur la figure ci-contre, on a tracé un plan d'onde de l'onde incidente La source fictive S est donc en retard par rapport à S_1. La



différence de chemin optique entre ces deux sources est $\delta_2 = (NS)$ (et leur différence de phase $\varphi_S - \varphi_{S_1}$ est donc $k\delta_2$). On calcule facilement $\delta_2 \approx x\alpha'$ (dans l'hypothèse où $\alpha \ll 1$).
La différence de marche totale entre les deux chemins (NSM) et (S_1M) est donc $\delta = \delta_1 + \delta_2$, où $\delta_1 = (SP)$ est la différence de marche calculée au paragraphe précédent :

$$\delta \approx x(\alpha + \alpha') \tag{92}$$

Remarque : ceci nécessite de préciser les conventions de signe utilisées pour α et α' : elles ont ici été choisies de façon à ce que, dans le cas illustré par la figure ci-dessus, les angles α et α' soient l'un et l'autre positifs.

La suite du calcul de l'intensité de la lumière diffractée se fait comme dans le paragraphe précédent, à la seule différence que α est remplacé par $\alpha + \alpha'$; on obtient donc :

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka(\alpha + \alpha')}{2}\right) \tag{93}$$

La frange centrale (correspondant à $\delta = 0$) est désormais située en $\alpha = -\alpha'$, c'est-à-dire là où arriverait la lumière en ne tenant compte que de l'optique géométrique (dans le plan focal de la lentille L, la lumière arriverait au point F_s). Le fait d'incliner la direction du faisceau incident a donc translaté globalement la figure de diffraction, sans la déformer.
La différence de marche δ et le déphasage $\Delta\varphi = k\delta$ qu'elle introduit peuvent être exprimés différemment, sous une forme qui sera plus aisément généralisable. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire dans la direction du faisceau diffracté, et $\vec{n}'$ celui dans la direction du faisceau incident. On a donc :

$$\delta_1 = -\vec{n}\overrightarrow{S_1S} \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = \vec{n}'\overrightarrow{S_1S} \tag{94}$$

d'où :

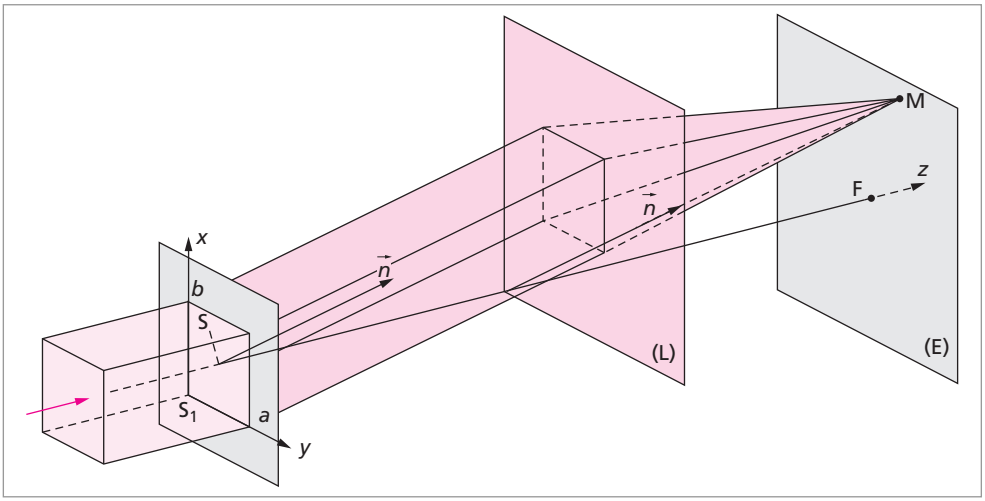
$$\delta = (\vec{n}' - \vec{n})\overrightarrow{S_1S} \tag{95}$$

En introduisant les vecteurs d'onde $\vec{k} = k\vec{n}$ de l'onde diffractée et $\vec{k}' = k\vec{n}'$ de l'onde incidente, le déphasage $\Delta\varphi$ s'écrit :

$$\Delta\varphi = -(\vec{k} - \vec{k}')\overrightarrow{S_1S} \tag{96}$$

11. Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire

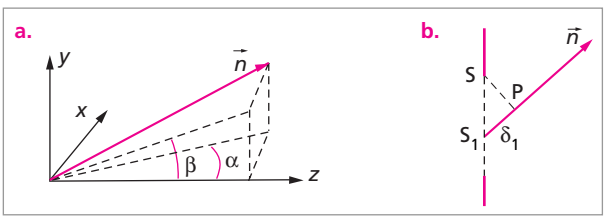
On s'intéresse ici à la diffraction par une ouverture rectangulaire, de côtés a et b (figure ci-dessous). Le faisceau incident est un faisceau de lumière parallèle, monochromatique. Dans un premier temps, on considère qu'il est orienté selon Oz, perpendiculairement au plan de l'écran diffractant (ultérieurement, on s'affranchira de cette hypothèse). On observe la diffraction à l'infini, c'est-à-dire de façon concrète dans le plan focal d'une lentille L.



Comme on l'a fait au **10.** pour la fente infinie, on va décomposer l'ouverture diffractante en une infinité de sources fictives S. Ici S est une source située en x,y (où x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{S_1S}$, cf figure ci-dessus), dont les dimensions transversales sont dx et dy. L'amplitude de l'onde lumineuse qu'elle émet est donc proportionnelle à sa surface dxdy. Enfin, dans la mesure où (pour l'instant) le faisceau incident est parallèle à Oz, donc que le plan de l'ouverture diffractante est un plan d'onde de l'onde incidente, les phases de toutes les sources fictives S sont les mêmes. L'amplitude lumineuse de l'onde émise par S s'écrit donc :

$$\mathrm{d}^2 s(S) = A\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (97)$$

où A est une constante de proportionalité.



Comme il est indiqué sur le figure ci-dessus, on envisage ici que la lumière puisse être diffractée dans n'importe quelle direction. Pour repérer la direction $\vec{n}$ de la lumière diffractée, on va désormais utiliser les projections α et β du vecteur unitaire $\vec{n}$ sur les axes Ox et Oy. α et β sont parfois appelés les **cosinus directeurs** de la direction $\vec{n}$. D'un point de vue géométrique, α et β sont les sinus des angles que font les projections de $\vec{n}$ sur les plans Oxz et Oyz avec l'axe Oz. Dans la mesure où ces angles sont petits (hypothèse de l'optique paraxiale, que nous continuerons à faire ici), on peut assimiler le sinus à l'angle, de sorte que α et β sont les angles que fait Oz avec les projections de $\vec{n}$ sur les plans Oxz et Oyz (cf. figure a. ci-dessus).

Les chemins optiques entre un point M du plan focal de la lentille L et les différentes sources fictives S dépendent de S. En prenant comme référence la source fictive S_1 située à l'un des angles de l'ouverture rectangulaire, on calcule la différence de chemin optique $\delta_1 = (SM) - (S_1M)$ comme précédemment. En représentant le plan contenant S_1 et le rayon lumineux issu de S (cf. figure b. page précédente), on constate que :

$$\delta_1 = (SP) = -\vec{n}\overrightarrow{S_1S} \tag{98}$$

où $\vec{n}$ représente toujours le vecteur unitaire dans la direction du rayon diffracté. En utilisant les cosinus directeurs du vecteur $\vec{n}$, on obtient :

$$\delta_1 = \alpha x + \beta y \tag{99}$$

L'amplitude en M de l'onde issue de la source fictive S est donc :

$$d^2s(M) = d^2s(S)e^{ik\delta_1} = \mathcal{A}dxdye^{ik(\alpha x+\beta y)} \tag{100}$$

En sommant toutes les amplitudes en M issues de chacune des sources fictives S, on obtient l'amplitude de l'onde lumineuse en M :

$$s(M) = \int_0^a \int_0^b \mathcal{A}dxdye^{ik(\alpha x+\beta y)} = \mathcal{A}\int_0^a e^{ik\alpha x}dx \int_0^b e^{ik\beta y}dy \tag{101}$$

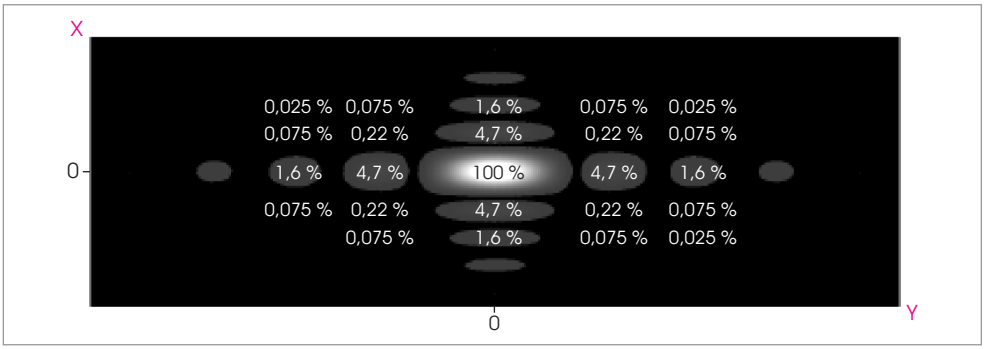
L'intégrale de surface porte sur tous les points de l'ouverture. Elle est factorisable en deux intégrales simples, identiques à celle que nous avons calculée en étudiant la diffraction par une fente (cf. 10.1) :

$$s(M) = \mathcal{A}\frac{e^{ik\alpha a} - 1}{ik\alpha}\frac{e^{ik\beta b} - 1}{ik\beta} \tag{102}$$

On en déduit l'intensité lumineuse en M :

$$I(M) = |s(M)|^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka\alpha}{2}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{kb\beta}{2}\right) \tag{103}$$

où $I_0 = |\mathcal{A}|^2 a^2 b^2$ désigne l'intensité maximum, qui est au centre de la figure de diffraction ($\alpha = \beta = 0$), c'est-à-dire ici au foyer F de la lentille. Cette intensité I s'annule si $\alpha = n_x\frac{\lambda}{a}$ ou si $\beta = n_y\frac{\lambda}{b}$, n_x et n_y étant deux entiers non nuls. La figure de diffraction est composée de deux réseaux de franges noires, l'un orienté selon Ox, l'autre selon Oy, décomposant le plan en rectangles. L'allure de la figure de diffraction est illustrée par la figure p. 581, dans laquelle on a représenté les franges sombres. Notons que ces rectangles ont pour dimensions angulaires λ/a et λ/b, sauf ceux sur l'axe des x et celui des y qui ont un côté deux fois plus grand. Le rectangle central a ses deux côtés deux fois plus grands. Au centre de chacun de ces rectangles, on trouve un maximum d'intensité. La figure ci-dessous donne (en %) leurs valeurs relatives à celle du maximum central (qui se déduisent aisément des valeurs des maxima de $\operatorname{sinc}^2 x$).



On remarque que, dès qu'on s'écarte des axes des x ou des y, les intensités relatives des maxima ont des valeurs très faibles ; la figure de diffraction a donc l'apparence d'une croix. Une telle figure est très facile à observer en regardant de la lumière (monochromatique) à travers un rideau dont le pas de tissage est assez serré.

Enfin il est important de noter que plus un côté (b par exemple) de l'ouverture diffractante est grand, plus le côté correspondant (soit λ/b) des rectangles de la figure de diffraction est petit. Ceci a des conséquences importantes :

– On retrouve la figure de diffraction d'une fente infinie, en faisant tendre b vers l'infini. Le pas correspondant de la figure de diffraction (soit λ/b), et par conséquent la dimension de cette figure, tend donc vers 0. La figure de diffraction d'une fente se réduit donc à une ligne, perpendiculaire à la fente, dont le profil d'intensité est donné par la figure du **10.2.**, p. 577.

– Inversement on retrouve la figure de diffraction d'un trou de dimension très petite par rapport à λ. Considérons une ouverture diffractante carrée ($a = b$), et faisons tendre les dimensions de l'ouverture diffractante vers 0 ($a \to 0$) ; la tache centrale de la figure de diffraction envahit alors tout le plan. On retrouve là une propriété donnée sans démonstration au **5.1** : un trou dont la dimension transversale est très petite par rapport à la longueur d'onde diffracte dans toutes les directions de la même façon.

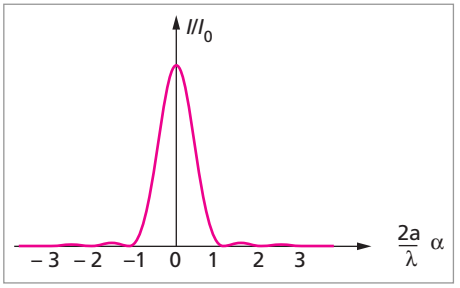
> ***Remarque :*** en toute rigueur, à la limite où a tend vers 0, on sort du domaine de validité du postulat de Huygens – Fresnel (cf. 7.). Le calcul exact de la lumière diffractée par une ouverture petite par rapport à la longueur d'onde est beaucoup plus délicat.

12. Diffraction par une ouverture circulaire, limite de résolution des instruments d'optique

12.1. Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire

La diffraction à l'infini par une ouverture circulaire s'étudie de la même façon que pour une ouverture rectangulaire. Le calcul de l'amplitude de la lumière diffractée conduit à une intégrale dont le résultat s'exprime à partir d'une fonction de Bessel. S'il n'est pas utile de connaître ce calcul, les résultats auquel il conduit sont importants.

On envisagera ici le cas où la lumière incidente arrive perpendiculairement au plan de l'écran diffractant, percé ici d'un trou circulaire, de rayon a. La figure de diffraction à l'infini a la symétrie cylindrique, elle est constituée d'anneaux alternativement brillants et noirs, centrés au lieu de l'image géométrique, c'est-à-dire ici au foyer de la lentille. La figure ci-contre montre l'évolution de l'intensité de la lumière diffractée en fonction de l'angle. On peut constater que cette courbe a la même allure générale que celle présentée par la figure p.389.



Le premier anneau sombre a pour rayon angulaire :

$$\alpha_1 \approx 1{,}22\frac{\lambda}{2a} \tag{104}$$

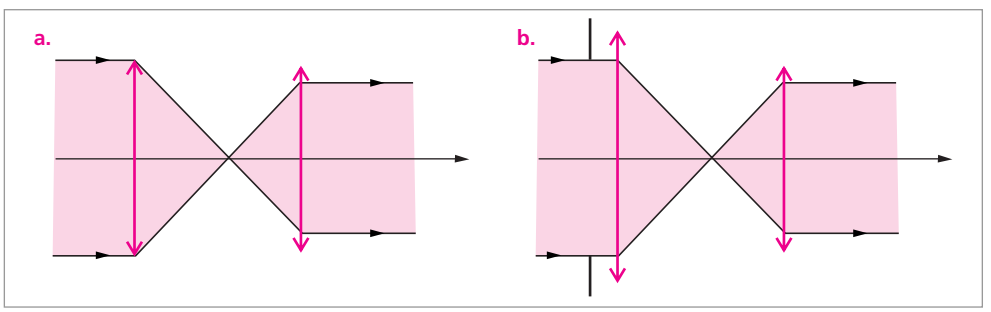
et celui du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant est approximativement donné par :

$$\alpha_k \approx \left(k + \frac{1}{4}\right)\frac{\lambda}{2a} \tag{105}$$

La tache centrale est beaucoup plus intense que les anneaux brillants suivants. Par conséquent la plus grande partie de la lumière diffractée l'est à l'intérieur d'un cône d'angle α_1. À titre de comparaison, l'intensité du premier anneau brillant relative à celle de la tache centrale est $I/I_0 = 0{,}0175$. La tache centrale est encore appelée **tache d'Airy**.

12.2. Limite de résolution d'un instrument d'optique

Tout instrument d'optique a sa résolution limitée par la diffraction. Prenons comme exemple une lunette astronomique, utilisée pour regarder un objet (supposé ponctuel) à l'infini (cf. fig. a. ci-dessous). La section géométrique du faisceau incident qui parvient jusqu'à l'utilisateur est limitée par la taille de la première lentille, l'objectif (si l'oculaire est suffisamment grand). Tout se passe donc comme si on observait l'objet avec une lunette "parfaite" (dont les lentilles sont de dimension infinie), à travers un diaphragme circulaire, dont le diamètre ϕ est celui de l'objectif (cf. figure b. ci-dessous).

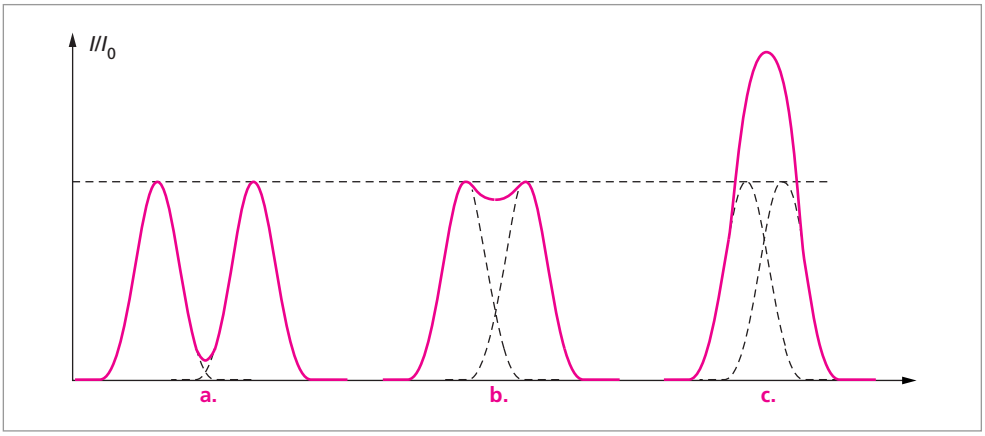


Le faisceau incident est donc diffracté par ce diaphragme. L'utilisateur de la lunette observe non une image ponctuelle, mais la figure de diffraction à l'infini par une ouverture circulaire De façon concrète, il observe la tache centrale de cette figure. Imaginons maintenant que l'utilisateur de cette lumière l'utilise pour observer deux étoiles (c'est-à-dire deux sources ponctuelles à l'infini), dont les lignes de visée font un angle α. Il observera donc deux taches si α est suffisamment grand (cf. figure ci-dessous). Mais si α est plus petit, il n'observera plus qu'une seule tache. Plus précisément on considère qu'on n'observe plus qu'une seule tache (un seul maximum d'intensité) à partir du moment où le centre de la tache de diffraction de la seconde étoile est situé sur le premier anneau sombre de la tache de diffraction de la première étoile. Ceci est appelé le **critère de Rayleigh**. L'observateur sera donc incapable de distinguer la présence de deux étoiles si :

$$\alpha \leqslant \alpha_1 \approx 1{,}22\frac{\lambda}{\phi} \tag{106}$$

où λ est la longueur d'onde où s'effectuent les observations. De ce fait la résolution de la lunette est limitée par la diffraction. La limite de résolution de l'instrument est donc :

$$\boxed{\alpha_{\text{lim}} = 1{,}22\frac{\lambda}{\phi}} \tag{107}$$



Remarque : ce raisonnement concerne les systèmes centrés , pour lesquels les diaphragmes sont circulaires. Il peut être adapté aux systèmes où le faisceau incident est limité par une fente (par exemple un spectromètre).

13. Diffraction à l'infini par deux écrans complémentaires, théorème de Babinet

De façon pratique, les expériences de démonstration concernant la diffraction par une fente ou une ouverture circulaire sont souvent réalisées non avec un écran opaque percé d'une fente ou d'un trou circulaire, mais par un écran transparent sur lequel ont été tracés un trait ou un disque opaques, c'est-à-dire par l'écran complémentaire. Plus précisément, on appelle **écrans complémentaires** deux écrans qui n'ont aucune partie opaque commune et qui, superposés, forment un écran complètement opaque (ne laissant pas passer de lumière). Deux écrans complémentaires produisent la même figure de diffraction à l'infini. On considère deux écrans complémentaires, appelés E_1 et E_2. Soient s_1 et s_2 les amplitudes des ondes lumineuses qu'ils diffractent dans une direction donnée $\overrightarrow{d}$ lorsqu'ils sont éclairés par un faisceau de rayons parallèles. s_1 apparaît donc comme la somme des ondes émises dans cette direction par les sources fictives situées sur les parties de E_1 laissant passer la lumière, et s_2 est la somme des ondes émises dans la même direction par les sources fictives situées sur les parties de E_2 laissant passer la lumière. Puisque les deux écrans E_1 et E_2 sont complémentaires, la superposition de toutes ces sources fictives (celles caractérisant l'onde diffractée par E_1 et celles caractérisant l'onde diffractée par E_2) reconstitue un plan complet, c'est-à-dire l'ensemble de sources fictives qu'on obtient en l'absence d'écran diffractant. Par ailleurs la superposition de toutes ces sources fictives émet l'onde $s = s_1 + s_2$ dans la direction $\overrightarrow{d}$. On vient de voir la signification physique de s : c'est l'onde transmise dans la direction $\overrightarrow{d}$ en l'absence d'écran diffractant. Donc, sauf la direction $\overrightarrow{d}$ est celle du faisceau incident, on a $s = 0$. Donc $s_1 = -s_2$. L'intensité de la lumière diffractée dans la direction $\overrightarrow{d}$ par l'écran E_1, soit $I_1 = s_1 s_1^*$, est donc égale à celle diffractée dans la même direction par l'écran E_2, soit $I_2 = s_2 s_2^*$:

$$I_1 = s_1 s_1^* = s_2 s_2^* = I_2 \tag{108}$$

d'où le **théorème de Babinet** : les figures de diffraction produites par deux écrans complémentaires sont les mêmes, sauf au lieu de l'image géométrique.

14. Processus d'interaction entre la matière et le rayonnement. Émission stimulée

14.1. Rappels

– Les niveaux d'énergie des atomes sont quantifiés. L'énergie quantifiée E est l'énergie interne de l'atome, c'est-à-dire la somme des énergies de ses constituants dans le référentiel de son centre de masse. Pour un atome, le centre de masse est pratiquement confondu avec le noyau (parce que la masse d'un électron est beaucoup plus faible que celle du noyau). En d'autres termes, le mouvement qui est quantifié est celui des électrons par rapport au noyau.

Dans la suite, on s'intéressera principalement à deux des niveaux d'énergie de l'atome, notés f et e, d'énergie E_f et E_e, telles que $E_f < E_e$. On pourra par exemple considérer que f est le niveau fondamental de l'atome (c'est-à-dire celui d'énergie – interne - la plus faible), et que e est un niveau excité (toutefois cette hypothèse n'est pas indispensable, et f et e peuvent être deux niveaux excités).

– Le rayonnement électromagnétique est quantifié, dans le sens qu'un faisceau lumineux monochromatique, de fréquence ν, est constitué de photons, d'énergie

$$E = h\nu \tag{109}$$

où $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. En particulier, les échanges d'énergie entre ce rayonnement et la matière ne peuvent se faire que par quantum d'énergie $h\nu$. On exprime parfois ce quantum d'énergie en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi\nu$ du rayonnement :

$$E = \hbar\,\omega \tag{110}$$

où la constante $\hbar$ est définie par $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

– Un atome n'échange de l'énergie avec un rayonnement monochromatique que si la fréquence de ce rayonnement est égale à certaines valeurs (appelées **fréquences de résonance**). Pour comprendre ce résultat, considérons par exemple l'absorption de rayonnement (de fréquence ν) par un atome dans l'état f, qui porte cet atome dans l'état e. L'énergie du rayonnement ne peut être absorbée que par quantum d'énergie $h\nu$; en d'autres termes le rayonnement incident est constitué de photons d'énergie $h\nu$. L'absorption de ce rayonnement correspond à l'absorption d'un seul photon par l'atome, selon le processus :

$$\mathrm{A}(f) + h\nu \rightarrow \mathrm{A}(e)$$

Si on fait un bilan d'énergie de ce processus, on obtient :

$$E_f + h\nu = E_e \tag{111}$$

> ***Remarque :*** on néglige ici l'effet de recul : l'impulsion de l'atome dans le référentiel du laboratoire est considérée comme étant la même avant et après le processus. Ceci n'est pas rigoureusement vrai, puisque le photon transporte aussi une impulsion $h\nu/c$. Au cours du processus d'absorption, l'impulsion du photon est absorbée par l'atome, et par conséquent l'impulsion de l'atome après le processus, ici dans l'état e, est la somme (algébrique) de l'impulsion de l'atome avant le processus (ici dans l'état f) et de l'impulsion du photon absorbé.

On comprend donc que seuls les photons d'énergie égale à $E_e - E_f$, c'est-à-dire les ondes électromagnétiques de fréquence $\nu = \dfrac{E_e - E_f}{h}$, peuvent être absorbés par l'atome dans l'état f, et porter cet atome dans l'état e.

Remarque : le fait que le rayonnement soit quantifié n'interdit pas à l'atome d'absorber plusieurs photons en même temps :

$$\mathrm{A}(f) + n\hbar\nu \rightarrow \mathrm{A}(e) \qquad \text{avec } n = 2, 3, \ldots$$

De tels processus, appelés multiphotoniques, ne peuvent intervenir qu'en présence d'un rayonnement très intense. Ils sont en général très peu probables et seront négligés dans la suite.

14.2. Description qualitative des processus d'interaction

On se limite ici aux processus d'excitation et de désexcitation d'un atome, entre les niveaux f et e, qui implique l'absorption ou l'émission d'un photon d'énergie $\hbar\nu = E_e - E_f$. Ces processus sont au nombre de trois (cf. figure ci-dessous) :

1 – l'**absorption** d'un photon, qui porte l'atome de l'état f à l'état e :

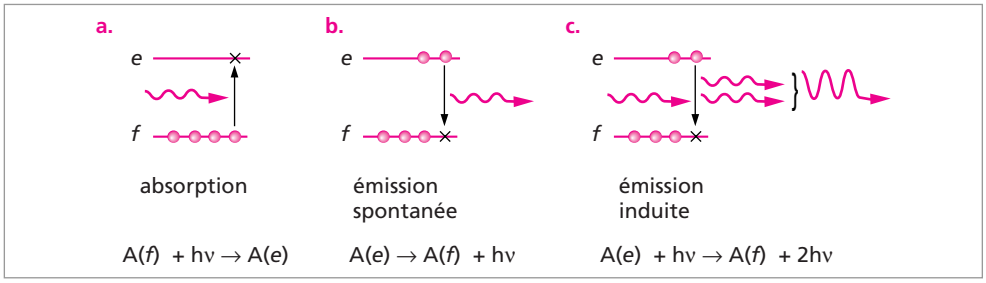
$$\mathrm{A}(f) + \hbar\nu \rightarrow \mathrm{A}(e) \tag{112-a}$$

2 – l'**émission spontanée** d'un photon par l'atome dans l'état excité e, qui « retombe » dans un état moins excité, ici f :

$$\mathrm{A}(e) \rightarrow \mathrm{A}(f) + \hbar\nu \tag{112-b}$$

3 – l'**émission stimulée** (ou induite) d'un photon, par l'atome dans l'état excité e, qui passe dans l'état f. Ce processus est stimulé (ou induit) par la lumière, dans le sens où il faut pour que ce processus ait lieu, que l'atome $\mathrm{A}(e)$ soit en interaction avec du rayonnement de fréquence ν, c'est-à-dire avec des photons d'énergie $\hbar\nu = E_e - E_f$, d'où l'équation de ce processus :

$$\mathrm{A}(e) + \hbar\nu \rightarrow \mathrm{A}(f) + 2\hbar\nu \tag{112-c}$$



L'existence de ce dernier processus, a priori surprenant (et non intuitif), a été proposée par Einstein en 1917, pour rendre compatible le spectre du rayonnement thermique et la loi de Boltzmann. Dans un langage appartenant plus au chimiste, on peut voir ce processus comme une émission de lumière (d'un photon) par l'atome excité $\mathrm{A}(e)$ qui est catalysée par de la lumière (par la présence d'autres photons de même type). Il faut noter que le photon émis a les mêmes caractéristiques que le (ou les) photon incident : même fréquence, mais aussi même direction de propagation, même polarisation , même phase.

Le processus d'émission stimulée permet ainsi de dupliquer des photons ; c'est lui qui est à l'origine de l'amplification de la lumière.

14.3. Description quantitative : émission spontanée

La probabilité qu'un atome dans l'état excité e à l'instant t, se désexcite pendant le temps dt (donc entre les instants t et $t + dt$) par émission spontanée vers l'état f est désignée par dP_{sp}. Elle est proportionnelle à dt, et ne dépend d'aucune autre considération (en particulier elle ne dépend pas de la « date » t) :

$$dP_{sp} = A_{ef}\,dt \tag{113}$$

où A_{ef} est une constante, caractéristique de l'atome considéré, et des états de départ e et d'arrivée f de la transition effectuée. A_{ef} est appelé le **coefficient d'Einstein d'émission spontanée** de e vers f.

Considérons un ensemble d'atomes seulement soumis à l'émission spontanée. C'est ce qui se passe lorsque les atomes ne reçoivent aucun rayonnement, i.e. aucun photon, à la fréquence ν de transition. Le seul processus possible est alors l'émission spontanée. Les atomes dans l'état excité e se désexcitent progressivement vers l'état f, donc le nombre $N_e(t)$ d'atomes dans l'état excité e à l'instant t décroît au cours du temps. La probabilité de désexcitation par émission spontanée dP_{sp} est reliée à $N_e(t)$ par :

$$dP_{sp} = -\frac{dN_e(t)}{N_e(t)} \tag{114}$$

c'est le nombre d'atomes qui se sont désexcités entre les instants t et $t + dt$, soit $-dN_e(t)$, rapporté au nombre d'atomes dans l'état excité à l'instant t, soit $N_e(t)$. Comme $N_e(t)$ décroît, $dN_e(t)$ est négatif, alors que le nombre d'atomes qui se sont désexcités entre t et $t + dt$ est positif, d'où le signe − dans l'expression précédente.

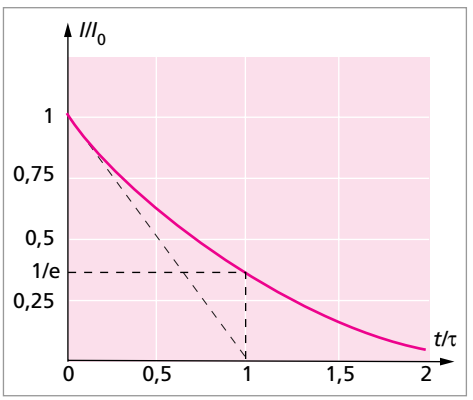
Pour un ensemble d'atomes seulement soumis à l'émission spontanée, le nombre $N_e(t)$ d'atomes dans l'état excité e vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dN_e(t)}{N_e(t)} = -A\,dt = d\,\ell n\,N_e(t) \tag{115}$$

où $A = A_{ef}$. D'où :

$$N_e(t) = N_e(0)\,e^{-At} \tag{116}$$

On observe donc une décroissance exponentielle du nombre d'atomes $N_e(t)$ dans l'état excité (fig. ci-contre), qui se fait avec une constante de temps :



$$\tau_e = \frac{1}{A} \tag{117}$$

Cette constante de temps est la **durée de vie** de l'état e. C'est une caractéristique spécifique de l'atome considéré dans l'état e.
Pour un état excité, il peut y avoir plusieurs voies de désexcitation par émission spontanée, c'est-à-dire plusieurs niveaux f vers lesquels l'état e peut se désexciter. Dans ce cas, la probabilité qu'un atome dans l'état e à l'instant t se désexcite vers un état f donné par émission spontanée pendant dt est :

$$\mathrm{d}P_{sp}(ef) = A_{ef}\mathrm{d}t \tag{113}$$

et la probabilité qu'un atome dans l'état excité à l'instant t se désexcite par émission spontanée vers un quelconque des niveaux vers lequel il peut se désexciter est la somme des probabilités de désexcitation vers chacun des niveaux f, soit :

$$\mathrm{d}P_{sp} = \sum_f \mathrm{d}P_{sp}(ef) = \left(\sum_f A_{ef}\right)\mathrm{d}t = A\mathrm{d}t \tag{118}$$

On a encore $\mathrm{d}P_{sp} = -\dfrac{\mathrm{d}N_e(t)}{N_e(t)}$. Ainsi $N_e(t)$ suit encore une loi exponentielle :

$$N_e(t) = N_e(0)\ \mathrm{e}^{-At} \tag{119}$$

mais la durée de vie de l'état excité est maintenant :

$$\tau_e = \frac{1}{\sum\limits_f A_{ef}} \tag{120}$$

Remarque : la mécanique quantique permet de calculer le coefficient d'Einstein A_{ef}, c'est-à-dire de le relier aux propriétés microscopiques (quantiques) de l'atome. On a pour une transition dipolaire électrique :

$$A_{ef} = \frac{\omega_{ef}^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar\,\mathrm{c}^3}\left|\left\langle \Psi_e \left| \vec{D} \right| \Psi_f \right\rangle\right|^2$$

où $\vec{D}$ est le dipôle atomique ($\vec{D} = -e\sum\limits_i \vec{r}_i$, la somme portant sur tous les électrons i de l'atome), $|\Psi_e\rangle$ et $|\Psi_f\rangle$ les fonctions d'onde de l'atome dans les états e et f, et ω_{ef} la pulsation de la transition ($\omega_{ef} = 2\pi\nu_{ef}$). On constate sur cette expression que le coefficient d'Einstein ne dépend que des propriétés spécifiques à l'atome et aux états e et f de départ et d'arrivée.

Pour une transition $e \to f$ autorisée (plus précisément une transition dipolaire électrique), on a :

$$A \approx 10^8 \text{ à } 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$$

d'où $\tau_e \approx 10^{-8}$ à 10^{-9} s $= 1$ à 10 ns
Pour conclure, on remarque l'analogie, en ce qui concerne la cinétique des processus, entre la désexcitation d'un atome par émission spontanée, la radioactivité nucléaire et la cinétique d'une réaction chimique unimoléculaire élémentaire (réaction chimique avec

un seul réactif, et d'ordre 1). Même si les processus intimes mis en cause dans ces trois processus sont de nature très différente, même si les ordres de grandeur des temps caractéristiques sont eux aussi très différents, ces trois processus sont décrits par le même type d'équation cinétique, caractéristiques des processus d'ordre 1 :

$$\frac{\mathrm{d}N_e(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{A}\, N_e(t) \tag{121}$$

14.4. Description quantitative : absorption

La densité spectrale de rayonnement $\rho_\omega(\omega)$ est définie de sorte que la quantité $\rho_\omega(\omega)\mathrm{d}\omega$ est l'énergie par unité de volume du rayonnement électromagnétique de pulsation comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$.

> ***Remarque :*** le même type de quantité peut être défini à partir de la fréquence $\nu = \omega/2\pi$. On a alors : $\rho_\nu(\nu)d\nu = \rho_\omega(\omega)\mathrm{d}\omega$.

La densité spectrale de rayonnement est une quantité directement reliée au nombre de photons dans un mode donné du champ électromagnétique défini par le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ et la polarisation $\overrightarrow{\varepsilon}$ du champ correspondant. Il y a plusieurs modes du champ électromagnétique dont la pulsation est comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$. On introduit la densité spectrale de modes $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\omega}$, telle que le nombre *par unité de volume* de modes de pulsation comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$ soit $\mathrm{d}m = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega$, et n_{ph} le nombre moyen de photons dans l'un de ces modes. On a : $\rho_\omega(\omega) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\omega} n_{ph}\hbar\,\omega$. Ainsi la densité spectrale est une grandeur qui « mesure » le nombre n_{ph} de photons dans un mode de pulsation ω.

> ***Remarque :*** on peut montrer (par exemple en prenant l'exemple d'une cavité parallélépipédique) que la densité spectrale de modes électromagnétiques est égale à $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\omega} = \dfrac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$.

Pour le processus d'absorption : $\mathrm{A}(f) + h\nu \rightarrow \mathrm{A}(e)$, la probabilité qu'un atome, dans l'état f, à l'instant t, soit excité vers l'état e pendant le temps $\mathrm{d}t$ (donc entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$) par absorption de photons de pulsation ω_{ef} est proportionnelle à $\mathrm{d}t$ et à la densité spectrale $\rho_\omega(\omega_{ef})$ du rayonnement à la pulsation de transition, telle que $\hbar\,\omega_{ef} = E_e - E_f$. On a donc :

$$\boxed{\mathrm{d}P_a = B_{fe}\rho_\omega(\omega_{ef})\mathrm{d}t} \tag{122}$$

où B_{fe} est le **coefficient d'Einstein d'absorption de f vers e**. C'est une constante caractéristique de l'atome considéré et de ses états f et e.

Si on ne prend en compte que le seul processus d'absorption, on a :

$$dP_a = \frac{dN_e(t)}{N_f(t)} \tag{123}$$

où $dN_e(t)$ est le nombre d'atomes qui ont été excités pendant dt (ici $dN_e(t)$ est positif). D'où :

$$\frac{dN_e(t)}{dt} = B_{fe}\rho_\omega(\omega_{ef})N_f(t) \tag{124}$$

En divisant par le volume (pour faire apparaître les concentrations $n_e = \frac{N_e}{V}$ et n_f), et en utilisant la relation entre la densité spectrale et le nombre de photons n_{ph} dans un mode de pulsation ω_{ef}, on obtient :

$$\frac{dn_e(t)}{dt} = K\, n_f(t)\, \frac{n_{ph}}{V} \tag{125}$$

où K est une constante (proportionnelle à V). En termes plus « chimiques », on a calculé là la vitesse de la réaction $A(f) + h\nu \rightarrow A(e)$, qui est proportionnelle à la concentration $n_f(t)$ de $A(f)$ et à la concentration de photons n_{ph}/V. Cette réaction apparaît donc comme un processus élémentaire, dont la vitesse est proportionnelle à la concentration des deux « réactifs ». La cinétique de la réaction est d'ordre 2. Telle est la signification de l'équation (122).

14.5. Description quantitative : émission stimulée

La probabilité qu'un atome, dans l'état e à l'instant t, en interaction avec des photons de pulsation ω, se désexcite vers l'état f pendant le temps dt (donc entre les instants t et $t + dt$) sous l'effet de l'émission stimulée, est proportionnelle à dt et à la densité spectrale $\rho_\omega(\omega_{ef})$ du rayonnement à la pulsation de transition (telle que $\hbar\,\omega_{ef} = E_e - E_f$). Là encore on écrit :

$$\boxed{dP_{st} = B_{ef}\rho_\omega(\omega_{ef})dt} \tag{126}$$

Si on ne prend en compte que le seul processus d'émission stimulée, on a :

$$dP_{st} = -\frac{dN_e(t)}{N_e(t)} \tag{127}$$

où $dN_e(t)$ est la variation du nombre d'atomes excités pendant dt (ici $dN_e(t) < 0$). D'où :

$$\frac{dN_e(t)}{dt} = -B_{ef}\rho_\omega(\omega_{ef})N_e(t) \tag{128}$$

Là encore on peut donner une interprétation plus « chimique » des relations (126) et (128) : la vitesse de réaction du processus élémentaire d'émission stimulée, $A(e) + h\nu \rightarrow A(f) + 2h\nu$, est proportionnelle aux concentrations des deux réactifs. C'est là encore une cinétique d'ordre 2.

14.6. Équilibre thermodynamique, rayonnement du corps noir, relations entre coefficients d'Einstein

On considère un ensemble de N atomes à deux niveaux, f et e, en interaction avec un rayonnement à la pulsation ω de résonance. Les trois processus d'absorption, d'émission spontanée et d'émission induite peuvent simultanément se produire ; par conséquent la variation $\mathrm{d}N_e(t)$ du nombre d'atomes dans l'état excité entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ est la somme des trois contributions de chacun de ces processus (cf. équations 121, 124 et 128) :

$$\mathrm{d}N_e(t) = \underset{\text{absorption}}{B_{fe}\rho_\omega(\omega_{ef})N_f(t)} - \underset{\substack{\text{émission}\\ \text{spontanée}}}{A_{ef}N_e(t)} - \underset{\substack{\text{émission}\\ \text{induite}}}{B_{ef}\rho_\omega(\omega_{ef})N_e(t)} \tag{129}$$

On suppose maintenant que cet ensemble de N atomes est en équilibre avec le rayonnement thermique émis par une enceinte à la température T, dont la densité spectrale sera notée $\rho_T(\omega)$. Ce rayonnement est connu sous le nom de rayonnement du corps noir. Puisque le système est à l'équilibre, les nombres d'atomes dans chacun des états e et f ne varient pas au cours du temps, d'où $\mathrm{d}N_e(t) = 0$. Ainsi :

$$B_{fe}\rho_T(\omega_{ef})N_f - A_{ef}N_e - B_{ef}\rho_T(\omega_{ef})N_e = 0 \tag{130}$$

Le fait d'être à l'équilibre n'implique pas qu'il n'y a pas d'absorption, d'émission spontanée et d'émission induite, mais que les transferts provoqués par ces processus se compensent. A l'équilibre thermodynamique, les atomes sont aussi à la température T. Par conséquent, selon la loi de Boltzmann, la probabilité de trouver un atome dans un état d'énergie E est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-\frac{E}{k_B T}}$, où k_B est la constante de Boltzmann. De ce fait, le rapport des nombres d'atomes occupant les états e et f (on appelle aussi ces quantités les populations des états e et f) vérifie :

$$\frac{N_e}{N_f} = \mathrm{e}^{-\frac{E_e - E_f}{k_B T}} = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_{ef}}{k_B T}} \tag{131}$$

On peut alors déduire de l'équation (130) la densité spectrale $\rho_T(\omega_{ef})$ du rayonnement du corps noir à la pulsation de transition :

$$\rho_T(\omega_{ef}) = \frac{A_{ef}/B_{ef}}{\dfrac{B_{fe}}{B_{ef}}\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega_{ef}}{k_B T}} - 1} \tag{132}$$

Or la densité spectrale du rayonnement du corps noir est connue par ailleurs. On sait :

$$\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \tag{133}$$

Par identification (les expressions 132 et 133 doivent être identiques, quelle que soit T), on obtient deux relations entre les 3 coefficients d'Einstein :

$$A_{ef} = \frac{\hbar\omega_{ef}^3}{\pi^2 c^3}B_{ef} \qquad \text{et} \qquad B_{fe} = B_{ef} \tag{134}$$

15. Principes de fonctionnement d'un laser

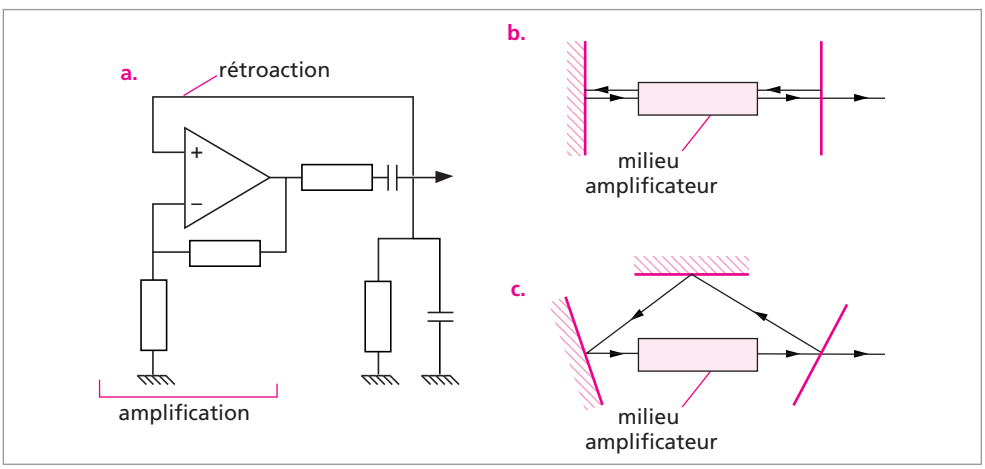
LASER est l'acronyme de « Light Amplifier by Stimulated Emission of Radiation », ce qui signifie amplificateur de lumière par émission stimulée de radiation.

L'équivalent dans le domaine des microondes s'appelle un MASER, pour « *Microwave Amplifier by Stimulated Emission of Radiation* ». Ainsi le laser et le maser sont des amplificateurs d'onde électromagnétique.

En fait le laser (ou le maser) est plus qu'un amplificateur, c'est un oscillateur. Un amplificateur lumineux est un dispositif qui, à partir d'un faisceau lumineux, délivre un faisceau de même type, mais plus puissant. Or un laser fonctionne sans qu'il existe nécessairement un faisceau incident initial. En électronique, pour obtenir un oscillateur à partir d'un amplificateur, il faut une rétroaction, ce qui signifie qu'il faut renvoyer en tant que signal d'entrée de l'amplificateur une partie de son signal de sortie (cf. figure a. ci-dessous). Dans le laser, cette rétroaction est fournie par la cavité (cf. figure b. et c. ci-dessous). Ainsi le fonctionnement d'un laser, c'est-à-dire d'un oscillateur lumineux, nécessite deux ingrédients :

– un milieu amplificateur, qui fonctionne par émission stimulée,

– une cavité, qui fournit la rétroaction.



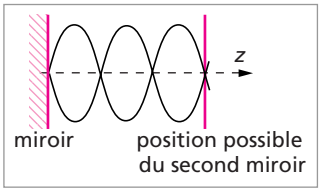
Avant de décrire les principes physiques de ces deux éléments, il est utile de situer dans le temps l'apparition des différents concepts qui ont permis la réalisation du laser :

– L'émission stimulée a été découverte par A. Einstein en 1917.

– Le pompage optique a été introduit par A. Kastler et J. Brossel, à partir de 1948. Ces deux scientifiques n'ont pas construit un laser, mais leurs travaux sur le pompage optique ont permis de comprendre comment manipuler les populations d'atomes dans tel ou tel niveau (ou sous-niveau Zeeman) d'un atome, et donc comment disposer de systèmes dont les populations ne sont pas réparties selon la loi de Boltzmann. Ils ont ouvert la voie de la réalisation de milieux amplificateurs dans le domaine microonde, puis optique.

– Le premier maser a été réalisé en 1954 par Townes et ses collaborateurs. Le milieu amplificateur était constitué de molécules d'ammoniac, d'où le nom de maser à ammoniac. C'est Townes qui a introduit l'idée de placer le milieu amplificateur dans une cavité, pour obtenir un oscillateur.
– Les principes d'obtention d'un laser, et en particulier la façon de réaliser une cavité dans le domaine optique (cf. fig. p. 592) ont été introduits en 1958 par Townes et Schawlow.
– Enfin le premier laser qui a fonctionné a été construit en 1960 par Maiman. C'était un laser à rubis dans lequel le milieu amplificateur est un cristal de rubis.

15.1. Cavité optique



La cavité optique la plus simple est la cavité linéaire constituée de deux miroirs plans parallèles (Fig. p. 592). Considérons d'abord la réflexion normale d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait (Fig. ci-contre). L'onde incidente $E_i = E_0 e^{j(-kz-\omega t)}$, de vecteur d'onde $-k\overrightarrow{u_z}$ (avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$) engendre une onde réfléchie $E_r = E_{r0} e^{j(kz-\omega t)}$, de vecteur d'onde $k\overrightarrow{u_z}$. La condition imposée par le miroir est que le champ à sa surface, en $z = 0$, est normal à sa surface :

$$E_i(z = 0, t) + E_r(z = 0, t) = 0$$

D'où $E_{r0} = -E_0$. La superposition des deux ondes incidente et réfléchie forme alors une onde stationnaire :

$$E(z, t) = E_i + E_r = -2jE_0 \sin kz \; e^{-j\omega t} \qquad (135)$$

dont les nœuds sont situés aux points $z = n\dfrac{\lambda}{2}$ (avec n entier).
Si on place maintenant un second miroir (lui aussi constitué d'un conducteur parfait) en $z = \ell$, on impose une seconde condition au champ électrique existant dans la cavité : sur le second miroir, en $z = \ell$, $E(z = \ell, t) = 0$. Ceci impose en général que $E_0 = 0$, et dans ce cas, il n'y a pas de champ dans la cavité. Pour qu'il subsiste un champ dans la cavité, il faut mettre le second miroir en un nœud de l'onde stationnaire liée au premier miroir. Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\ell = n\frac{\lambda}{2}} \qquad (136)$$

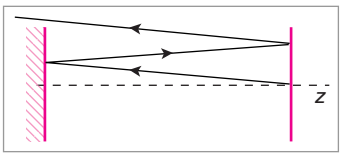
Inversement, connaissant ℓ, seules les ondes de longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\ell}{n}$ vérifiant (135) peuvent exister dans la cavité. Ces ondes ont donc des pulsations :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = n\frac{\pi c}{\ell}$$

$\omega_0 = \dfrac{\pi c}{\ell}$ est appelé la **pulsation propre de la cavité**, et seules les ondes de pulsation $\omega = n\omega_0$, multiples de cette pulsation propre, peuvent exister dans la cavité linéaire. Ces diverses solutions sont appelées **modes longitudinaux** de la cavité. La fréquence propre de la cavité $\nu_0 = \dfrac{c}{2\ell}$ est aussi appelée intervalle spectral libre de la cavité.

Une cavité linéaire constituée de deux miroirs partiellement réfléchissants constitue un interféromètre de Fabry-Perot (voir **8.2**). Dans beaucoup de cas pratiques, on utilisera des cavités formées non pas de deux miroirs plans, mais de deux miroirs dont l'un (ou les deux) sont sphériques. La raison de ce choix est la stabilité de la cavité. Dans une cavité linéaire, un rayon incliné par rapport à l'axe finit par s'échapper (fig. ci-dessous).

Dans une cavité constituée de miroirs sphériques, la répartition transverse (i.e. perpendiculaire à l'axe Oz de la cavité) du champ dans la cavité n'est pas uniforme. Chaque solution possible est appelée **mode transverse de la cavité**.



15.2. Milieu amplificateur

Dans le milieu amplificateur, l'amplification de la lumière se fait par émission stimulée. Une telle amplification n'est possible que s'il y a inversion de population, c'est-à-dire si le nombre d'atomes dans l'état excité est supérieur à celui dans l'état fondamental.

• Nécessité d'une inversion de population

Si le milieu amplificateur est ici modélisé comme un ensemble de N atomes à deux niveaux f et e, analogue à celui étudié dans le paragraphe **15**. Les processus d'émission ont tendance à augmenter ce nombre de photons n_{ph} de pulsation ω dans la cavité, mais cette augmentation est contrariée par le processus d'absorption, qui a tendance à le diminuer. En utilisant les résultats et les notations du paragraphe 15, l'équation de bilan du nombre de photons s'écrit :

$$\frac{dn_{ph}}{dt} = B_{ef}\rho_\omega(\omega_{ef})N_e + A_{ef}N_e - B_{fe}\rho_\omega(\omega_{ef})N_f \qquad (137)$$

où les trois termes sont dus respectivement (et dans l'ordre d'écriture) à l'émission stimulée, à l'émission spontanée et à l'absorption. Si on veut que ce milieu conduise à une amplification de la lumière, il faut :

$$\frac{dn_{ph}}{dt} > 0$$

Par ailleurs, dans cette équation de bilan, on peut en général négliger le processus d'émission spontanée (l'émission spontanée produit des photons qui se propagent dans n'importe quelle direction, et dans un laser la densité spectrale ρ_ω est importante, ce qui rend dominants les processus dont la probabilité croît avec ρ_ω, comme l'émission stimulée ou

l'absorption). En négligeant l'émission spontanée ($A_{ef} = 0$), l'équation (136) devient :

$$\frac{dn_{ph}}{dt} = B\rho_{\omega}(\omega_{ef})(N_e - N_f) \tag{138}$$

(on a utilisé $B_{ef} = B_{fe} = B$). Pour qu'il y ait amplification, donc que $\frac{dn_{ph}}{dt}$ soit positif, il faut que $N_e - N_f > 0$, donc que le nombre d'atomes dans l'état excité e soit supérieur à celui dans l'état f :

$$\frac{N_e}{N_f} > 1 \tag{139}$$

On dit alors qu'il y a **inversion de population**. Cette situation est inhabituelle. En particulier, elle traduit qu'un milieu amplificateur n'est pas un milieu en équilibre thermodynamique. S'il l'était, la loi de Boltzmann imposerait :

$$\frac{N_e}{N_f} = e^{-\frac{\hbar\,\omega_{ef}}{k_B T}} < 1 \tag{140}$$

ce qui est contradictoire avec la condition d'inversion de population (138).
Pour produire une telle inversion de population, il faut produire des atomes dans l'état excité e de façon très efficace. Diverses méthodes sont possibles, qui se regroupent en deux grandes catégories : les atomes sont excités soit par absorption de photon, soit par collision.

• Les pertes
Ces pertes d'énergie lumineuse de la cavité sont inévitables, d'abord évidemment à cause d'imperfections techniques (ces pertes sont en général très faibles), mais surtout parce que le but ultime d'un laser est de produire un faisceau lumineux dans l'espace libre. Il faut donc extraire ce faisceau (et par conséquent l'énergie lumineuse correspondante) de la cavité, ce qui, du point de vue de la cavité, se traduit par des pertes. Faire sortir un faisceau de la cavité, c'est « organiser » les pertes. Une solution très fréquemment retenue pour cela est que l'un des miroirs de la cavité soit partiellement réfléchissant (et partiellement transparent). Bien entendu, en plus de ces pertes indispensables, il existe d'autres types de pertes (absorption dans les composants optiques, émission spontanée,...) qu'il faut réduire au maximum, mais qui ne sont jamais totalement nulles.
Soit un faisceau lumineux, de puissance P, qui parcourt la cavité. Après un certain trajet (un aller et retour dans une cavité linéaire), il revient sur lui-même. Durant ce trajet, il a traversé le milieu amplificateur (2 fois dans le cas d'une cavité linéaire), et a été amplifié. Soit G le coefficient d'amplification de sa puissance pendant le trajet ; G est usuellement appelé le gain de la cavité. Pendant le même trajet, le faisceau a aussi subi des pertes : on désigne par Q le coefficient de pertes ($Q < 1$), c'est-à-dire le coefficient par lequel serait multipliée la puissance du faisceau après le trajet, en l'absence de toute amplification du faisceau.
Dans la réalité, les deux effets, gain et pertes, ont simultanément lieu, et le faisceau, initialement de puissance P, a après être revenu sur lui-même la puissance $P' = GQP$.

Pour qu'il y ait globalement amplification, il faut que $P' > P$, donc que :

$$GQ > 1 \tag{141}$$

Ceci est la **condition d'accrochage**, c'est-à-dire la condition d'oscillation du laser. Elle exprime simplement que les gains doivent être supérieurs aux pertes.
Ainsi, après chaque aller et retour, la puissance du faisceau est multipliée par GQ, avec $GQ > 1$. On pourrait donc penser que la puissance de ce faisceau croît jusqu'à l'infini. En fait il n'en est rien, car au fur et à mesure que la puissance augmente, maintenir le gain G à niveau constant nécessite que de plus en plus d'atomes dans l'état excité e se désexcitent en un temps donné. Or, quel qu'il soit, le mécanisme de pompage qui fournit des atomes dans l'état excité e en produit un nombre fini par unité de temps. À partir d'une certaine densité d'énergie lumineuse dans la cavité, le nombre d'atomes excités va chuter ; il en résulte une diminution du gain G : on parle de **saturation du gain**. La densité d'énergie lumineuse dans la cavité, et par conséquent la puissance de sortie du laser dépendent de cette saturation, c'est-à-dire en fin de compte de l'efficacité du processus de pompage qui réexcite les atomes dans l'état excité e.
On peut aussi valablement se demander comment démarre un laser (cette question est pertinente pour n'importe quel type d'oscillateur). Le laser démarre sur un bruit. En l'occurrence le « bruit » est ici fourni par l'émission spontanée : puisqu'il y a des atomes dans l'état excité e, l'un d'entre eux pourra se désexciter par émission spontanée en émettant un photon dans la bonne direction (c'est-à-dire selon l'axe de la cavité). C'est ce signal qui sera ensuite amplifié, et à partir duquel le laser démarre.

15.3. Propriétés du rayonnement émis par un laser

La lumière émise par un laser a des propriétés spécifiques de monochromaticité, de cohérence et de directivité.

• Monochromaticité
Le caractère très monochromatique du rayonnement émis par les lasers est lié au fait que seul un ou quelques modes longitudinaux sont amplifiés et contribuent à l'émission du laser. Les lasers dont la largeur spectrale $\delta\omega$ est la plus étroite sont les lasers monomodes, où un seul mode contribue à l'effet laser. Dans ce cas, la largeur spectrale du laser est définie par la largeur du mode, elle-même reliée aux pertes dans la cavité. Ceci peut être facilement compris en se rappelant que la cavité d'un laser peut être assimilée à une cavité Fabry-Perot, dont la largeur spectrale des modes (c'est-à-dire des pics de transmission) a été étudiée au **8.2**. Cette largeur spectrale $\delta\omega$ est proportionnelle à $1 - r^2$ (où r est le coefficient de réflexion de l'amplitude du champ), donc aux pertes de la cavité. Moins une cavité a de pertes et plus ses modes sont spectralement fins. On a ainsi capable de réaliser (dans des laboratoires spécialisés) des lasers dont la largeur spectrale est de l'ordre de 100 Hz.
Hormis les pertes, il y a beaucoup d'autres effets qui ont tendance à élargir la largeur spectrale d'un laser : citons par exemple les vibrations de la cavité qui ont pour effet de

faire fluctuer la longueur ℓ de la cavité, et par conséquent la fréquence de chacun de ses modes, les effets thermiques qui, en faisant varier l'indice optique de certains des matériaux de la cavité, contribuent à faire varier la longueur optique de la cavité, donc la fréquences de ses modes, etc...

Dans le cas des lasers en impulsion, la largeur spectrale $\delta\omega = \dfrac{1}{T}$ est directement limitée par la durée T de l'impulsion (via les propriétés de la transformée de Fourier). Pour peu que les impulsions soient courtes ou que la distance spectrale entre modes soit faible (soit lorsque ℓ est élevée), $\delta\omega$ devient supérieure à la distance spectrale entre modes, c'est pourquoi il est souvent impossible de parler de structure de modes pour un laser en impulsion.

• Cohérence

Le temps de cohérence τ_c est directement relié à la largeur spectrale $\delta\omega$:

$$\tau_c \approx \frac{1}{\delta\omega} \tag{142}$$

Plus un laser sera spectralement fin, plus le temps de cohérence du rayonnement qu'il émet sera grand.

• Directivité

C'est la structure de modes imposée par la cavité qui définit la forme du faisceau émergeant. En fait sa forme, et en particulier sa divergence, sont fréquemment limitées par la diffraction ; si Φ est le diamètre du faisceau laser à la sortie, la demi ouverture angulaire $\Delta\theta$ du faisceau est donnée par :

$$\Delta\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{\Phi} \tag{143}$$

Par exemple, un laser Hélium Néon, dont le faisceau en sortie un diamètre $\Phi = 2$ mm, a une divergence $\Delta\theta = 4 \cdot 10^{-4}$ rad $= 0{,}02°$.

• Puissance

Contrairement à une idée préconçue, les sources lasers ne sont pas des sources plus puissantes que les autres. À titre d'exemple, on comparera la puissance d'un laser Hélium Néon (ceux disponibles en TP ont typiquement une puissance de 0,5 à 1 mW) à la puissance lumineuse produite par une lampe de bureau. Mais la puissance lumineuse disponible dans un faisceau laser est concentrée dans un intervalle spectral très faible, et dans un angle solide également très faible, à la différence des sources lumineuses conventionnelles.

ÉNONCÉS

De l'électromagnétisme à l'optique

Exercice 1 Champ électrique d'un faisceau lumineux

1. Un faisceau laser a une puissance de 1 mW (c'est l'ordre de grandeur typique de la puissance d'un laser He—Ne). On le focalise sur une cible de 50 μm de diamètre. Quelle est l'amplitude du champ électrique perçu par la cible ?

2. Même question pour un faisceau laser de puissance 16 kW (puissance instantanée très facilement obtenue dans les lasers en impulsion).

3. Que pensez vous de ces résultats ?

Exercice 2 Dioptre plan

1. Pour un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, rappeler les expressions des coefficients de réflexion r et de transmission t de l'amplitude d'une onde plane éclairant le dioptre sous incidence normale du côté du milieu d'indice n_1.

2. Vérifier directement la relation $R + T = 1$ exprimant la conservation de l'énergie électromagnétique à la surface du dioptre.

3. Que deviennent les coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude si le même dioptre est éclairé toujours sous incidence normale, mais du côté du milieu d'indice n_2. On appellera r' et t' ces nouveaux coefficients. Calculer également les coefficients de réflexion R' et de transmission T' de l'énergie dans ce cas.

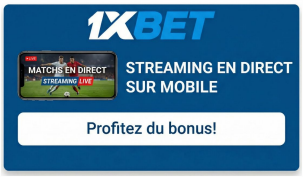
Exercice 3 Coefficient de réflexion d'un miroir métallique

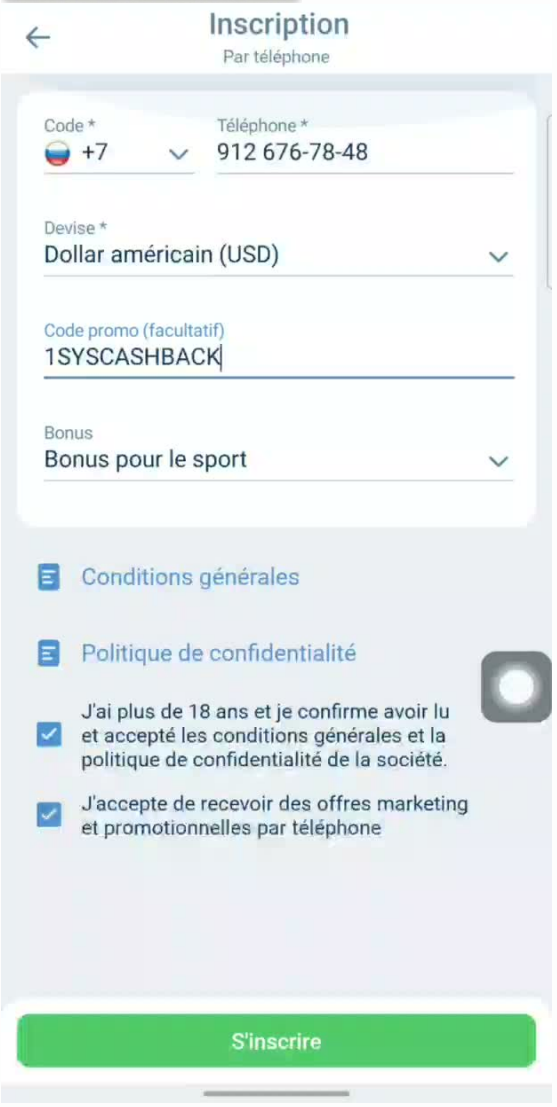
On considère un miroir métallique parfaitement réfléchissant. En utilisant la même méthode qu'au **4.**, définir et calculer les coefficients de réflexion de l'amplitude, r, et de l'énergie, R, de ce miroir sous incidence normale. Comment s'exprime la conservation de l'énergie lumineuse à la surface de ce miroir ?

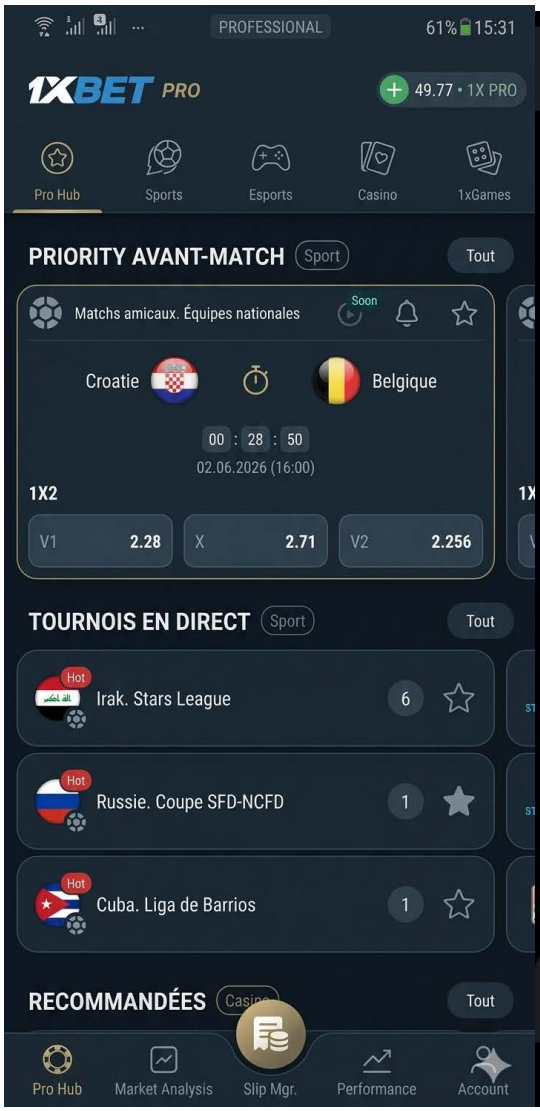
Interférences

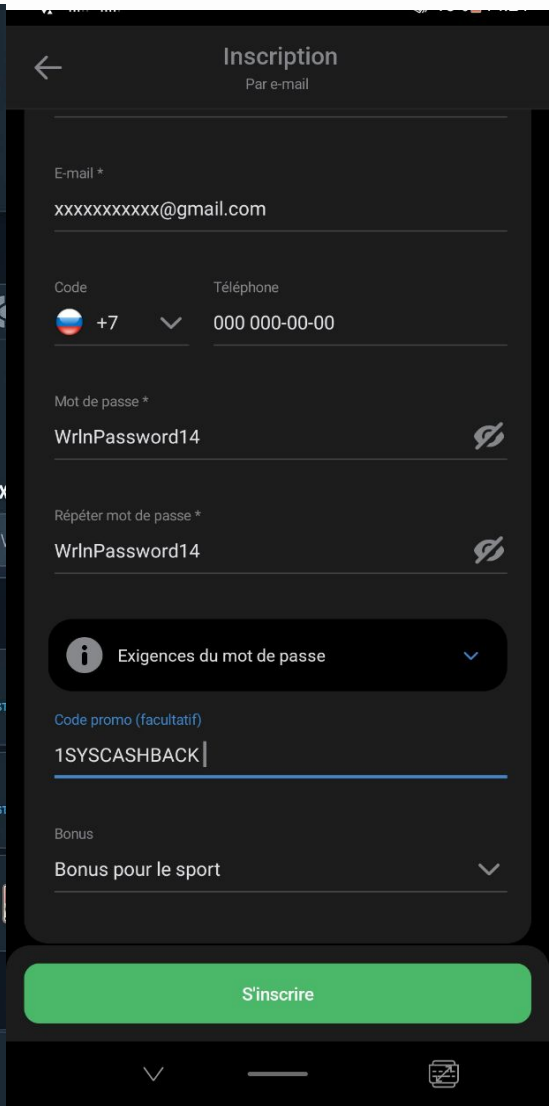
Exercice 4 Trous de Young (d'après CAPES 1992)

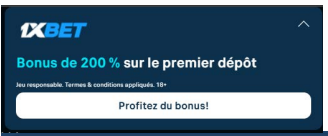
Une source S, de dimensions suffisamment faibles pour pouvoir être considérée comme ponctuelle, éclaire un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2, également de faible dimension, distants l'un de l'autre de a. On note O' le milieu du segment S_1S_2, et $O'z$ l'axe normal en O' au plan opaque. La source S se trouve au point O'' de l'axe $O'z$ à une distance d en amont du point O'. Le phénomène d'interférence est observé sur un écran

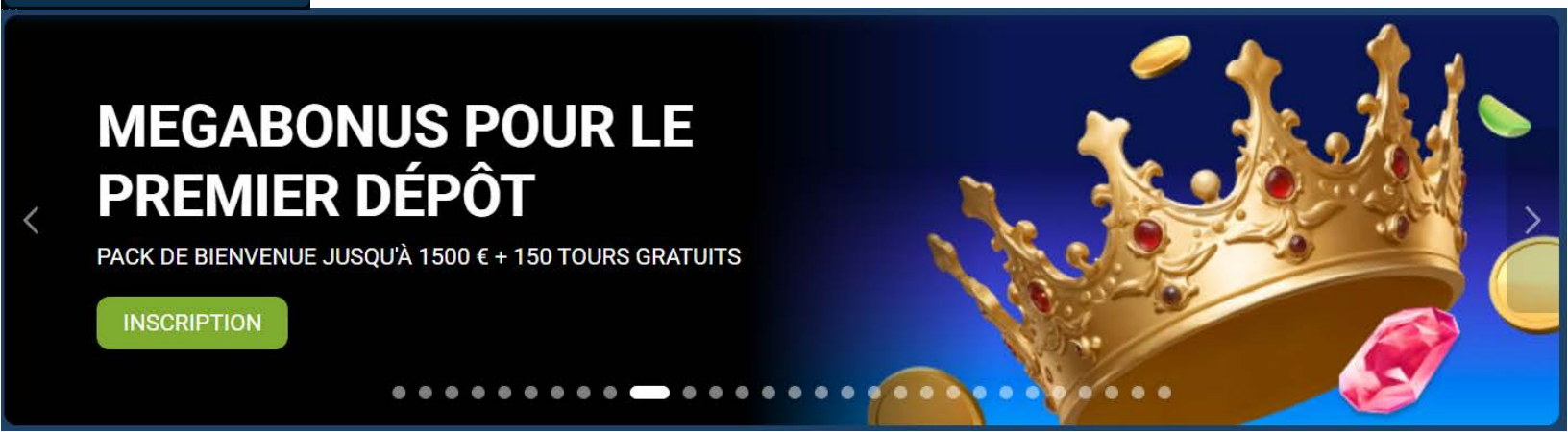

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Hot
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Hot
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

(E) placé normalement à l'axe O′z à une distance D en aval du point O′. L'espace est reporté au repère cartésien (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$) défini de la façon suivante :

– O est le point de l'écran appartenant à l'axe O′z ;
– $\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire de l'axe O′z, orienté du point O′ vers l'écran ;
– $\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire parallèle à S_1S_2, orienté de S_2 vers S_1 ;
– $\overrightarrow{u_y}$ est le vecteur unitaire tel que la base ($\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$) soit orthonormée directe.
On utilisera les valeurs numériques suivantes : $a = 1{,}2$ mm ; $D = 2{,}0$ m ; $d = 40$ cm

1. Soit M(x, y, 0) un point quelconque de l'écran (E).

a. Définir la différence de marche δ(M) entre les trajets des ondes parvenant en M et provenant de S_1 et S_2.

b. Établir les expressions des distances S_1M et S_2M en fonction de x, y, a et D.

c. Sachant que dans le dispositif des trous de Young, x, y et a sont faibles devant D, en déduire l'expression approchée de la différence de marche :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}$$

2. La source S est une source monochromatique émettant une radiation de longueur d'onde λ.

a. Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est maximale.

b. Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est minimale.

c. Décrire la figure d'interférences. Définir et exprimer son interfrange.

Exercice 5 Trous de Young (suite et variations)

On utilisera ici les mêmes notations que dans l'exercice précédent.

1. L'amplitude de l'onde lumineuse arrivant en M et émise par le trou S_i est proportionnelle à la racine carrée de la surface de ce trou, et inversement proportionnelle à la distance S_iM.

a. Les deux trous ont maintenant des surfaces différentes, respectivement notées a_1 et a_2. Calculer l'intensité lumineuse I(M) observée en un point M de l'écran en fonction de δ(M). Dans les conditions indiquées dans l'exercice précédent ($D \gg x, y, a$), calculer l'intensité lumineuse I(M) observée en un point M(x, y, 0) de l'écran en fonction de δ(M). Décrire les variations de I(M) avec x et y.

b. On définit le contraste des franges par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Calculer ce contraste. Dans quel cas peut-on dire que les franges d'interférences sont les plus contrastées ?

2. Les deux trous sont désormais éclairés par une source ponctuelle monochromatique qui n'est plus située sur l'axe O′z, mais en un point (x_S ; 0 ; $-(d + D)$).

a. Calculer dans ce cas la différence de marche $\delta(M)$.

b. Que devient alors la figure d'interférences ? Où est située la frange centrale ?

3. Les deux trous sont remplacés par deux sources ponctuelles différentes, deux lampes par exemple. Les deux sources sont identiques, et donc de même longueur d'onde. Que devient la figure d'interférences ?

4. Les deux trous sont toujours éclairés par une source ponctuelle, mais on place devant S_1 un polariseur orienté selon $\overrightarrow{u_x}$, et devant S_2 un polariseur analogue, mais orienté selon $\overrightarrow{u_y}$. Que devient la figure d'interférences dans ce cas ?

5. Les deux trous sont maintenant éclairés par une source S ponctuelle de lumière blanche.

a. De quelle couleur va être la frange centrale ?

b. Quel aspect vont avoir les premières franges autour de la frange centrale ?

c. On se place maintenant loin de la frange centrale (c'est-à-dire à une distance x très grande devant l'interfrange). Quelles sont les longueurs d'onde totalement éteintes dans la lumière arrivant en $M(x, y, 0)$?

6. On remplace maintenant les trous S_1 et S_2 par des fentes parallèles à $\overrightarrow{u_y}$.

a. La source ponctuelle est elle aussi remplacée par une fente source parallèle à $\overrightarrow{u_y}$, de hauteur h. Que devient la figure d'interférences ?

b. La fente source S est maintenant légèrement inclinée par rapport à l'axe $\overrightarrow{u_y}$; elle fait avec cet axe un angle θ ($\theta \ll 1$). Que devient la figure d'interférences lorsqu'on augmente θ ? Pour quelle valeur de θ la figure d'interférences disparaît-elle ? Si on augmente encore θ, que devient-elle ? Donner (qualitativement) l'allure du contraste C de la figure d'interférences en fonction de θ.

Exercice 6 Différents dispositifs interférentiels

1. Bilentilles de Billet : une lentille de distance focale f est coupée en deux parties égales (avec une scie). Les deux demi-lentilles sont séparées d'une distance e. Elles sont éclairées par un faisceau de rayons parallèles, monochromatique (de longueur d'onde λ).

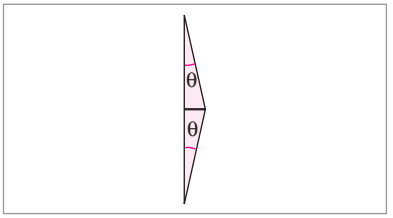
a. Montrer que, dans le cadre de l'approximation de Gauss, les rayons ayant traversé chaque demi-lentille convergent en deux points F_1 et F_2. Calculer $a = F_1F_2$.

b. Décrire la figure d'interférences qui peut être observée en aval du plan perpendiculaire à l'axe optique du système et contenant F_1F_2. Conformément aux notations introduites dans l'exercice 4 on désignera par $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire selon l'axe optique et par $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire dans la direction F_1F_2.

c. Calculer l'interfrange de la figure d'interférences obtenue sur un écran situé à une distance D du plan contenant F_1F_2.

d. Préciser dans ce cas ce qu'on appelle champ d'interférences. Le représenter sur un schéma.

2. Biprismes de Fresnel : deux prismes identiques, constitués d'un verre d'indice n, ont une section hypothénuse, caractérisée par un angle θ petit (*cf.* figure). On éclaire l'ensemble par un faisceau de rayons parallèles, arrivant à incidence normale sur la base du biprisme. Ce faisceau est monochromatique (longueur d'onde λ).



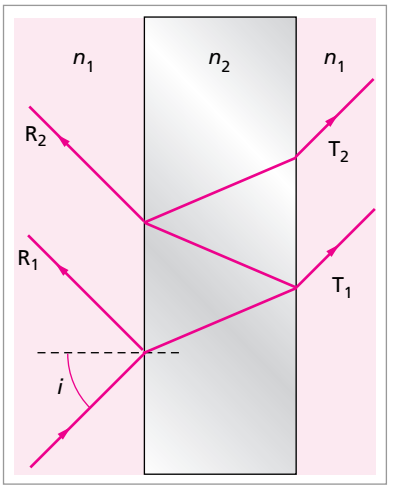
a. Montrer que chaque prisme dévie le faisceau d'un angle $D = (n - 1)\theta$.

b. Dessiner les surfaces d'onde en amont et en aval du biprisme.

c. Décrire la figure d'interférences observée sur un écran placé en aval du biprisme. Quel est son interfrange ? Représenter le champ d'interférences. Où doit-on positionner l'écran pour pouvoir observer des interférences ?

Exercice 7 Franges d'égale inclinaison

Une lame à faces parallèles, d'épaisseur e, d'indice n_2, est plongée dans un milieu d'indice n_1. On supposera $n_1 < n_2$. Un rayon incident, d'angle d'incidence i, donne naissance aux divers rayons représentés sur la figure.



1. Comment faire interférer les rayons réfléchis R_1 et R_2 ?

2. On négligera dans les questions 2 et 3 les rayons ayant subi plus d'une réflexion dans la lame.

a. Calculer la différence de marche δ entre deux rayons réfléchis R_1 et R_2.

b. En déduire les angles i correspondant aux directions selon lesquelles on observe une frange brillante, et ceux correspondant aux directions selon lesquelles on observe une frange sombre. On supposera ici les angles petits.

3. Soient r et t les coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude de l'onde lumineuse sur le dioptre séparant le milieu d'indice n_1 de celui d'indice n_2. On rappelle que, dans la mesure où l'angle d'incidence i est très petit, ces coefficients sont donnés par :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

a. Calculer les amplitudes complexes s_1 et s_2 des ondes R_1 et R_2.

b. En déduire l'intensité I de la figure d'interférences. Comment varie I en fonction de l'angle d'incidence i ?

c. Calculer le contraste C de la figure d'interférences.

4. Dans les deux questions précédentes, on a négligé les rayons ayant subi plus d'une réfléxion interne sur la lame.

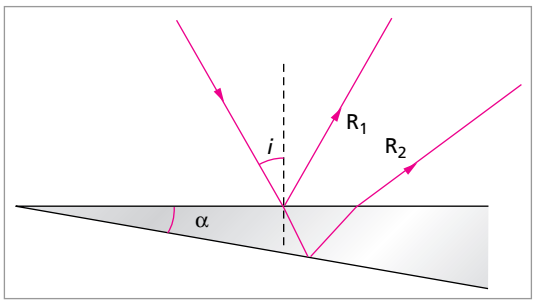
a. À quelle condition sur r cette condition est-elle valable ?

b. La lame est une lame de verre ($n_2 = 1{,}5$) plongée dans de l'air ($n_1 = 1$). Cette approximation est-elle justifiée ? Dans ce cas, calculer numériquement le contraste des franges ainsi observées.

5. Reprendre l'étude des interférences obtenues par transmission (interférences entre T_1 et T_2). Calculer leur contraste dans le cas d'une lame de verre plongée dans de l'air. Conclure.

Exercice 8 Franges d'égale épaisseur

1. On considère une lame prismatique, d'indice n, d'angle α très petit (*cf.* figure). Cette lame est éclairée par un faisceau de rayons parallèles, d'incidence i par rapport à la face supérieure de la lame. Un rayon de ce faisceau donne lieu à un rayon R_1 réfléchi sur la face supérieure de la lame, et à un rayon R_2 réfléchi sur sa face inférieure.



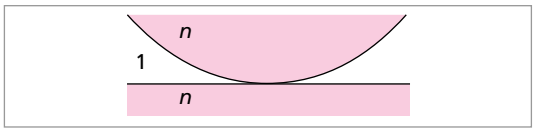
a. Où sont localisées les interférences entre R_1 et R_2 ?

b. Calculer la différence de marche géométrique δ_g entre R_1 et R_2.

c. Que vaut δ_g lorsque le faisceau incident est presque normal à la surface supérieure de la lame ?

2. Le dispositif précédent est maintenant remplacé par deux lames de verre (d'indice n_1) disposées de telle façon qu'entre elles, il y ait une lame prismatique d'air (indice $n_2 = 1$), d'angle α très petit. Décrire la figure d'interférences que ce dispositif permet d'obtenir. Calculer son interfrange.

3. Anneaux de Newton : on place une lentille plan-convexe, de rayon de courbure R, sur une surface de verre plane (*cf.* figure ci-contre). Le verre a un indice n. On éclaire l'ensemble par un faisceau parallèle à l'axe optique, de lumière monochromatique (longueur d'onde λ), et on observe les interférences localisées au voisinage de la surface de la lentille.



a. Décrire la figure d'interférences ainsi obtenue.

b. Au centre du dispositif, la lentille touche pratiquement la surface du verre. Y observe-t-on une frange brillante ou une frange sombre ?

c. Calculer le rayon du k-ième anneau sombre.

Exercice 9 Interféromètre à ondes multiples (ou de Fabry-Perot)

Une lame de verre, d'indice n, à faces parallèles, est placée dans l'air. Ses deux dioptres sont traités et les coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude de l'onde sur chacun d'entre eux sont respectivement r et t.
Cette lame est éclairée en lumière monochromatique (de longueur d'onde λ), par un faisceau de rayons parallèles faisant un angle d'incidence α_i avec la normale à la lame. On appelle T_k le k-ième rayon transmis, qui a subi $2k$ réflexions dans la lame (voir par exemple la figure de l'exercice 7).

1. Calculer la différence de marche géométrique entre T_k et T_{k+1}.

2. Calculer l'amplitude s_k de l'onde T_k en fonction de l'amplitude de l'onde incidente s_i.

3. Calculer l'intensité totale de la lumière transmise par la lame. Étudier les variations de cette intensité avec l'angle d'incidence α_i de l'onde incidente.

4. On éclaire l'interféromètre avec une source ponctuelle S et on regarde la figure d'interférences donnée par la lumière transmise dans le plan focal d'une lentille (de distance focale f).

a. Décrire cette figure d'interférences.

b. Quel est l'ordre d'interférence au centre entre deux rayons consécutifs k et $k + 1$?

c. Dans le cas où l'angle d'incidence α_i est faible, calculer la largeur angulaire à mi-hauteur d'un anneau, et la comparer à la distance angulaire entre deux anneaux consécutifs. Le rapport de la seconde sur la première est appelé la finesse F de l'interféromètre ($F > 1$). Calculer la finesse lorsque le coefficient de réflexion de l'énergie $R = |r|^2$ sur l'une des lames de l'interféromètre est égal à 0,9, puis à 0,99. Conclure.

Diffraction

Exercice 10 Diffraction à l'infini par une fente ou une ouverture rectangulaire

Un écran percé d'une fente de largeur a est éclairé à incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ. On regarde la figure de diffraction à l'infini (en pratique, dans le plan focal d'une lentille).

1. En décomposant la fente diffractante en une infinité de fentes source de largeur infinitésimale dx :

a. calculer l'amplitude de l'onde diffractée dans la direction faisant un angle i avec la normale à l'écran dans le plan perpendiculaire à la fente ;

b. en déduire l'intensité $I(i)$ de la lumière diffractée dans cette direction.

c. Étudier les variations de I avec i. Dans quelles directions l'intensité lumineuse est-elle maximale ou minimale ? Quelle est la largeur angulaire de la frange centrale ? et celle des autres franges observées ?

2. On éclaire maintenant l'écran diffractant par un faisceau monochromatique faisant l'angle i_0 avec la normale à l'écran (et contenu dans le plan perpendiculaire à la fente). On regarde toujours la figure de diffraction à l'infini. Reprendre dans ce cas la question 1. Que devient la figure de diffraction ?

3. On considère maintenant un écran opaque percé d'un trou rectangulaire, de cotés a et b, respectivement orientés selon les axes Ox et Oy. Cet écran est éclairé à incidence normale par une lumière monochromatique (longueur d'onde λ). On regarde toujours la figure de diffraction à l'infini.

a. Quelle est l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction définie par ses deux cosinus directeurs i_x et i_y (c'est-à-dire les angles i_x et i_y que fait l'axe optique Oz avec les projections du rayon lumineux dans les plans Oxz et Oyz) ?

b. Décrire la figure d'interférences ainsi obtenue. On précisera les directions où $I = 0$. Dessiner les franges sombres dans le cas où $a > b$.

Exercice 11 Diffraction à l'infini par un réseau

Un écran est percé de N fentes très minces, parallèles et équidistantes (distance entre deux fentes consécutives $= a =$ pas du réseau). Il est éclairé à incidence normale par une lumière monochromatique (longueur d'onde λ). On en étudie la figure de diffraction à l'infini.

1.a. En considérant que le nombre N de fentes est fini, calculer l'amplitude de l'onde diffractée dans la direction i (faisant un angle i avec la normale à l'écran dans le plan perpendiculaire aux fentes).

b. En déduire l'intensité $I(i)$ de la lumière diffractée dans cette direction.

c. Étudier les variations de I avec i. Décrire la figure de diffraction ainsi obtenue. Pour quels angles i obtient-on un maximum absolu d'intensité ? Quel est alors le déphasage entre les rayons diffractés dans cette direction par deux fentes consécutives ? Y a-t-il d'autres maxima de l'intensité ? Comparer leurs intensités à celle des maxima absolus. Où sont situés les minima d'intensité (franges sombres) ?

2. Reprendre les questions précédentes à la limite où N est très grand.

3. On considérera désormais que N est très grand. Par contre la largeur b de chacune des fentes n'est plus négligeable devant le pas a du réseau (on a évidemment $b < a$). Reprendre alors les questions 1 et 2. On interprétera la figure de diffraction ainsi obtenue en termes de la figure de diffraction obtenue aux questions 1 et 2 et de la figure de diffraction obtenue à l'infini pour une seule fente de largeur b.

4. On se replace maintenant dans le cadre des hypothèses de la question 2 ($b \ll a$; N très grand). On éclaire le réseau par une lumière polychromatique.

a. Décrire ce qu'on obtient. Quels maxima d'intensité observe-t-on pratiquement dans un spectromètre à réseau ? Quelles sont les longueurs d'onde les plus diffractées ?

b. Décrire comment est constitué pratiquement un spectromètre à réseau (position des fentes, d'éventuels miroirs, du réseau).

c. Qu'est ce qui limite le pouvoir de résolution d'un spectromètre à réseau (utiliser les résultats des questions 1 ou 3) ? Comment définir de façon quantitative la résolution ultime d'un spectromètre à réseau ?

Exercice 12 Diffraction par deux écrans complémentaires, théorème de Babinet

On considère un écran percé de trous de formes quelconques, et son écran complémentaire (où les régions transparentes du premier sont remplacées par des régions opaques et réciproquement). Ces deux écrans sont éclairés à incidence normale par une lumière monochromatique (longueur d'onde λ). Montrer que, tant qu'on s'intéresse à leurs figures de diffraction à l'infini (ou dans le plan focal d'une lentille), ces deux écrans donnent la même figure de diffraction en dehors de la direction de la lumière incidente (c'est-à-dire dans le cas présent en dehors du foyer F de la lentille).

En déduire une méthode pratique pour réaliser un réseau de diffraction (cf. exercice 11).

Laser

Exercice 13 À propos du Laser (d'après CAPES 2000)

En 1917, Albert Einstein mentionne dans la publication de ses travaux sur l'émission et l'absorption de la lumière, les différences entre émission spontanée et émission stimulée. Quelques années plus tard, Townes (prix Nobel en 1964) et Schawlow (prix Nobel en 1981) montrent la possibilité théorique d'obtenir de la lumière cohérente dans un résonateur optique. En 1960, Maiman réalise le premier oscillateur laser dans un cristal de rubis tandis que, la même année, Javan et Bennett présentent le premier laser à gaz.

Un laser (abréviation de « *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* ») est un oscillateur optique pour lequel le résonateur est une cavité optique formée de deux miroirs en regard qui réfléchissent successivement et plusieurs fois la lumière, et l'amplificateur, un milieu actif utilisant l'émission stimulée.

Étude de l'amplificateur

1. Qu'appelle-t-on émission stimulée ? Quelle est sa caractéristique principale ? Citer les trois types de transitions possibles entre deux niveaux d'énergie ε_1 et ε_2 d'un atome. On supposera $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

2. À l'équilibre thermique avec une source à la température thermodynamique T, conformément au second principe et pour une population totale N_0 d'atomes, le nombre N d'atomes occupant un niveau d'énergie atomique ε suit la loi de Boltzmann : $N = N_0 \exp(-\varepsilon/kT)$.

a. Donner l'expression du rapport N_2/N_1 des populations d'atomes occupant respectivement les niveaux d'énergie ε_1 et ε_2, à la température T.

b. Calculer ce rapport à la température $T = 393$ K ($t = 120$ °C) pour les niveaux 5s et 3p du néon qui correspondent à un écart énergétique $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1{,}96$ eV. On rappelle les valeurs suivantes : charge élémentaire $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C ; constante de Boltzmann $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J.K^{-1}.

c. En général, une onde se propageant suivant une direction Oz dans un milieu à deux niveaux d'énergie s'amortit exponentiellement. Soit I l'intensité de cette onde :

$$I = I_0 \exp(-\alpha z) \qquad \text{avec } \alpha \text{ proportionnel à } (N_1 - N_2).$$

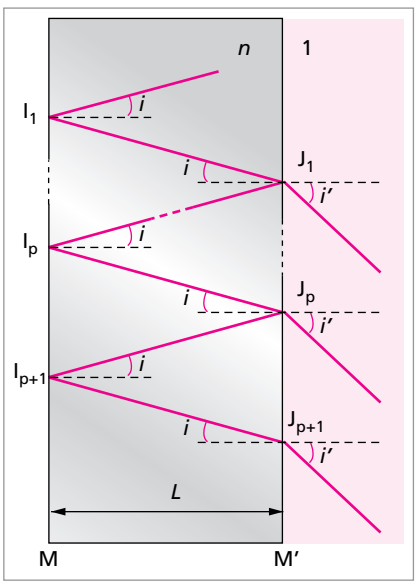
Expliquer comment, dans un laser, le milieu, alors qualifié de milieu actif, produit une amplification de l'intensité de l'onde.

3. La transition radiative d'un laser hélium-néon correspond à la transition entre les niveaux 5s et 3p des atomes de néon pour lesquels $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 1{,}96$ eV. Calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde λ_0 de l'onde émise.
On donne : $c = 299\,792\,458$ m.s^{-1} et $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Étude du résonateur

Dans une première approche, la cavité laser est supposée constituée de deux miroirs plans M et M′ parallèles, placés à une distance L l'un de l'autre. Entre les miroirs un milieu actif d'indice de réfraction n remplit la cavité. À l'extérieur de celle-ci, le milieu, à la sortie du miroir M′, est l'air d'indice pris égal à l'unité.
Le miroir M est parfaitement réfléchissant. Le miroir M′ est semi-réfléchissant et non absorbant.

4. Un dispositif non représenté sur la figure, permet d'envoyer à l'intérieur de la cavité une onde électromagnétique de fréquence ν sous l'incidence i sur la face interne réfléchissante du miroir M. Par réflexions successives sur les miroirs M et M′ on obtient alors une multitude d'ondes réfléchies et d'ondes transmises.



a. Soit c la vitesse de la lumière dans le vide. Exprimer le retard de phase Φ entre deux ondes transmises consécutives qui interfèrent à l'infini, en fonction de ν, n, L, c et de l'angle d'incidence i.

b. Le système ne fonctionne de façon satisfaisante que si les ondes transmises à la sortie du miroir M′ peuvent interférer de manière constructive. En déduire que, pour une longueur de la cavité L donnée, seules les ondes de certaines fréquences, appelées modes propres de la cavité, caractérisées par un nombre entier p, sont susceptibles d'être émises avec une amplitude maximale.

Dans toute la suite du problème, on suppose l'angle d'incidence *i* nul et l'indice *n* du milieu actif égal à l'unité.

5. Déterminer les fréquences des modes propres ν_p de la cavité en fonction de p, L et c. Calculer la distance spectrale $\Delta\nu_L$, c'est-à-dire l'écart en fréquence entre les modes propres pour une longueur de la cavité $L = 0{,}25$ m.

6. L'amplificateur a une bande passante, égale à la largeur de la raie émise, $\Delta\nu_A$ de 1 500 MHz. Une étude énergétique montre que la cavité a un facteur de qualité Q élevé : $Q = 10^8$ pour le mode propre $\nu_p = 4{,}74 \cdot 10^{11}$ Hz ($\lambda = 632{,}8$ nm). Calculer la largeur $\Delta\nu_P$ d'une raie laser centrée sur ν_P. Comparer $\Delta\nu_P$, $\Delta\nu_L$ et $\Delta\nu_A$. Conclure.

Applications du laser

7. Citer deux applications pratiques des lasers en indiquant les propriétés du faisceau qui sont mises à profit.

Exercice 14 Étude simplifiée d'un Laser, télémétrie Terre-Lune par impulsion laser (d'après CAPES 1998)

Étude simplifiée d'un laser

1. Que signifient les cinq lettres qui composent le mot LASER ?

La loi de distribution de Maxwell-Boltzmann permet de connaître le nombre d'atomes n_1 (ou de molécules) d'énergie E_1 dans un système gazeux en équilibre thermique avec un thermostat à la température T :

$$n_1 = \mathrm{K}\ \exp\left(-\frac{E_1}{k_b T}\right) \qquad \text{où } k_b = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}} \text{ est la constante de Boltzmann.}$$

2. Déduire le rapport n_1 / n_0 du nombre d'atomes qui se trouvent dans l'état excité d'énergie E_1 au nombre d'atomes qui se trouvent dans l'état fondamental d'énergie E_0.

3. Que vaut ce rapport à la température $T = 0$ K ? Etait-ce prévisible ? Que devient ce rapport à très haute température ? Ce rapport peut-il être égal à l'unité ?

4. Quelle est l'énergie d'un photon associé à une longueur d'onde $\lambda = 620$ nm correspondant à la désexcitation d'un atome du niveau d'énergie E_1 vers le fondamental ? Quelle est la proportion d'atomes dans le premier état excité d'énergie E_1 à température ambiante ? À quelle condition un milieu est-il le siège d'une émission lumineuse continue ? On rappelle que la constante de Planck vaut $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Absorption et émission spontanée

Pour passer de l'état énergétique fondamental E_0 à l'état énergétique excité E_1, l'atome peut absorber de l'énergie sous forme radiative, c'est-à-dire absorber un photon d'énergie $\Delta E = E_2 - E_1$.

5. On considère un système gazeux comportant N atomes, soumis à un flux lumineux de densité énergétique $u(\nu)$. La variation élémentaire $\mathrm{d}N_{1\mathrm{abs}}$ du nombre d'atomes qui peuplent l'état excité d'énergie E_1, lorsque le système est soumis au flux lumineux pendant

un temps dt, est proportionnel au nombre N_0 d'atomes dans l'état fondamental, présents dans le milieu, au temps d'exposition et à la densité énergétique du flux photonique. Établir l'expression de d$N_{1\text{abs}}$. On appelera C la constante de proportionnalité qui intervient dans cette expression.

6. D'autre part, les états d'énergie supérieure au fondamental sont instables et l'atome perd, au bout d'un temps plus ou moins long, spontanément l'énergie qu'il a acquis lors de l'absorption du photon.

a. Comment qualifier ce type d'émission ?

b. On admet que le nombre élémentaire d'atomes d$N_{1\text{em}}$ qui émettent un photon par ce processus est proportionnel au nombre d'atomes dans l'état excité et au temps d'observation. Établir l'expression de d$N_{1\text{em}}$. On notera A la constante de proportionnalité.

7. Si les N atomes ont été placés dans une enceinte éclairée par un faisceau lumineux (flux de photons d'énergie $\Delta E = E_2 - E_1$), à l'équilibre, le nombre d'atomes dans l'état excité doit rester constant. Exprimer alors ce rapport $\dfrac{N_1}{N_0}$ en fonction de A, C et $u(\nu)$.

8. Sachant que la densité d'énergie rayonnée par un corps noir est donnée par la relation :

$$u(\nu) = D(\nu)\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_b T}\right) - 1\right)^{-1}$$

que devient le rapport $\dfrac{N_1}{N_0}$? Ce résultat est-il compatible avec la distribution de Maxwell-Boltzmann traitée dans la première question de cette partie ?

Émission induite

Einstein a fait l'hypothèse de l'existence d'une émission supplémentaire qu'il appelle émission induite. Le nombre d'atomes qui se désexcitent par ce processus est donné par la relation suivante :

$$\mathrm{d}N_{1\text{ind}} = -BN_1 u(\nu)\mathrm{d}t$$

9. Montrer que cette hypothèse permet de lever la contradiction rencontrée dans la question précédente sous réserve que A, B et $D(\nu)$ vérifient une relation que l'on déterminera.

10. Quelles sont les caractéristiques des photons émis par ce processus ?

11. Pourquoi dit-on que la source laser a une grande cohérence ?

12. Proposer un schéma fonctionnel *simple* qui illustre le principe de fonctionnement d'un laser. Sur ce schéma devront clairement apparaître le milieu actif, la source d'énergie, les miroirs et le faisceau émergent.

Télémétrie Terre-Lune par impulsions laser

L'observation des anneaux de croissance des coraux fossiles montre qu'il y a 500 millions d'années la durée du jour n'était que de 21 heures actuelles. Ce ralentissement du mouvement propre de la Terre va de pair avec une augmentation de la distance Terre-Lune, notée d_{TL}, à un rythme annuel de 3 à 4 cm. Pour mesurer avec précision cette distance, on exploite la grande directivité d'un faisceau laser. On émet une impulsion lumineuse au

foyer d'un télescope placé à la surface de la Terre. Ce télescope est pointé en direction d'un des réflecteurs déposés sur la Lune par les sondes automatiques soviétiques Lunakhod ou par la mission américaine habitée Apollo 9, qui renvoie vers la Terre une partie de la lumière qu'il reçoit. La mesure du temps écoulé entre l'émission et la réception du signal par un détecteur placé au foyer du télescope permet de déterminer la longueur du chemin optique d'un aller-retour Terre-Lune, dont on déduit la distance d_{TD}.

13. Le laser émet des impulsions de durée $\tau = 5 \cdot 10^{-10}$ s ; chaque impulsion correspond à une énergie lumineuse de 0,3 J.

a. Quelle est la puissance du laser lorsqu'il émet ?

b. Calculer la nombre de photons émis par impulsion sachant que la longueur d'onde de la lumière laser est de $\lambda = 0{,}532$ µm.

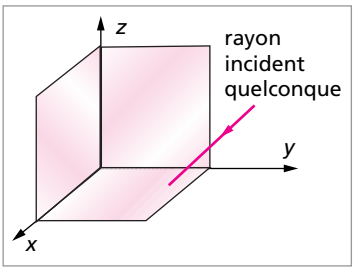
c. Le nombre de photons qui vont être détectés au retour risque a priori d'être faible. On ne sait pas si ces photons correspondent au début ou à la fin de l'impulsion. Quelle est l'erreur maximale sur cette détermination de d_{TL}, sachant que la date de début de l'impulsion est connue avec une grande précision ?

d. En pratique, cette technique confirme l'éloignement de la Lune de quelques centimètres par an. Comment a-t-on pu atteindre cette précision ?

14. Le succès de cette expérimentation dépend étroitement du réflecteur déposé sur le sol lunaire.

a. Pourquoi est-il illusoire d'utiliser à cette fin un simple miroir plan ?

b. Le réflecteur est constitué d'une centaine de « coins de cube », c'est-à-dire de trois miroirs plans identiques formant les trois faces d'un trièdre rectangle $Oxyz$. Montrer qu'un rayon lumineux arrivant sur un coin de cube est renvoyé après trois réflexions dans la direction exactement opposée, quelle que soit l'orientation du trièdre. Les déplacements lunaires ont-ils une quelconque influence ?



En conséquence, l'association de ces coins de cube est équivalente à un miroir plan de surface $s = 100$ cm^2 placé orthogonalement au faisceau lumineux incident.

15. On cherche maintenant à estimer le nombre de photons détectables au retour. Les différents rayons lumineux issus du télescope sont contenus dans un cône de demi-angle au sommet $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ rad.

a. Sachant que la distance moyenne Terre-Lune vaut 384 000 km, calculer le diamètre de la tache lumineuse sur la Lune.

b. En supposant que les photons sont uniformément répartis dans cette tache, exprimer le nombre de photons arrivant sur le miroir en fonction de d_{TL}, α et s. Dans la réalité le nombre de photons effectivement détectables est bien inférieur car on ne peut pas négliger le phénomène de diffraction.

SOLUTIONS

1 **1.** Si E_0 est l'amplitude du champ reçu par la cible (le champ est donc de la forme $E = E_0 \cos(kz - \omega t)$ au voisinage de la cible), la densité d'énergie électromagnétique du faisceau (moyennée sur une période) est :

$$\langle u \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

et la vitesse de l'onde (donc la vitesse de propagation de l'énergie) étant c (dans le vide), la puissance reçue par la cible par unité de surface, c'est-à-dire le vecteur de Poynting de l'onde au voisinage de la cible est :

$$\langle P \rangle_T = c \langle u \rangle_T$$

(en effet l'énergie qui arrive sur la surface S (normale à la direction de propagation de l'onde) pendant le temps dt, soit $PSdt$, est celle contenue à l'instant t dans le volume $Scdt$ de section S et de hauteur cdt, soit $\langle u \rangle_T Scdt$, d'où le résultat précédent).

Ici $P = P/S$ avec $P =$ puissance du faisceau $= 1$ mW et $S =$ surface de la cible $= \dfrac{\pi\phi^2}{4}$ avec $\phi = 50$ µm. D'où

$$P = 10^5 \text{ W/m}^2$$

Et $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c = P$, d'où $E_0 = \sqrt{\dfrac{2P}{c\varepsilon_0}} = 6 \cdot 10^6$ V/m (se souvenir que $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ USI)

2. Pour une puissance $P = 16$ kW, on obtient $E_0 = 2{,}4 \cdot 10^{10}$ V/m.

3. Ces champs sont très importants : à titre de comparaison, le champ (continu) de claquage de l'air est $E = 30$ kV/cm $= 3 \cdot 10^6$ V/m. Bien que les mécanismes d'ionisation sous l'effet d'un champ continu soient de nature très différente que les mécanismes d'interaction entre votre rétine et la lumière, on conçoit qu'un faisceau de laser Hélium Néon pénétrant dans votre œil est déjà dangereux, tandis que le faisceau émis par un laser en impulsion conduit à des dégâts irréversibles.

2 **1.** On a $r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

2. D'où $R = r^2 = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$ et $T = \dfrac{n_2}{n_1} t^2 = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$. On vérifie alors $R + T = 1$.

3. On a $r' = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r$ et $t' = \dfrac{2n_2}{n_2 + n_1}$; d'où $R' = r'^2 = R$ et $T' = \dfrac{n_1}{n_2} t'^2 = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = T$

3 On utilise la même description qu'au **4.** (voir figure p. 544). L'onde incidente (à incidence normale, supposée polarisée selon $\overrightarrow{u_x}$) s'écrit $\overrightarrow{E_i} = E_{i0}e^{i(k_i z-\omega t)}\overrightarrow{u_x}$, elle est à l'origine d'une onde réfléchie $\overrightarrow{E_r} = E_{r0}e^{i(-k_i z-\omega t)}\overrightarrow{u_x}$. Le milieu est ici le métal, supposé conducteur parfait, il n'y a donc pas de champ électrique dans ce milieu, d'où $\overrightarrow{E_t} = 0$.
À la surface du métal (en $z = 0$), le champ électrique est normal à la surface ; donc sa composante selon $\overrightarrow{u_x}$ est nulle, d'où :

$$\overrightarrow{E_i}(z = 0) + \overrightarrow{E_r}(z = 0) = 0$$

Ceci entraîne : $E_{i0} + E_{r0} = 0$, soit $1 + r = 0$, en introduisant le coefficient de réflexion r de l'amplitude de l'onde.
On a donc $r = -1$
Le coefficient de réflexion de l'énergie est donc $R = r^2 = 1$. Dans la mesure où il n'y a pas d'onde transmise ($\overrightarrow{E_t} = 0$), on a $t = 0$, d'où $T = 0$. La relation $R + T = 1$ traduisant la conservation de l'énergie (en l'absence d'absorption) est donc vérifiée.

4 **1.a.** $\delta = [SS_2M] - [SS_1M] = S_2M - S_1M$ car $SS_2 = SS_1$ (on a considéré que l'indice du milieu est 1).

b. On a $SS_2 = \sqrt{D^2 + (x + \frac{a}{2})^2 + y^2}$ et $SS_1 = \sqrt{D^2 + (x - \frac{a}{2})^2 + y^2}$

c. Avec un développement limité, on obtient $SS_2 \approx D\left[1 + \dfrac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D^2}\right]$.

D'où $SS_2 \approx D + \dfrac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$. De même $SS_1 \approx D + \dfrac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$

d. $\delta = S_2M - S_1M = \dfrac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D} = \dfrac{2xa}{2D} = \dfrac{xa}{D}$.

2.a. L'intensité lumineuse est maximale si $\delta = n\lambda$ où n est un entier relatif ($n \in Z$), d'où la position des franges brillantes :

$$x = n\frac{D}{a}\lambda = ni$$

b. L'intensité lumineuse est minimale si $\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ où n est un entier relatif ($n \in Z$), d'où la position des franges sombres :

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{D}{a}\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)i$$

c. La figure d'interférences est constituée de franges alternativement claires et sombres (noires si les deux trous S_1 et S_2 sont de même dimension), rectilignes et parallèles à Oy, équidistantes. L'interfrange est la distance entre deux franges brillantes consécutives, soit $i = \dfrac{D\lambda}{a}$.

5 **1.a.** En posant $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, l'amplitude lumineuse en M est :

$$s(\mathrm{M}) = s'_1 \mathrm{e}^{jkS_1\mathrm{M}} + s'_2 \mathrm{e}^{jkS_2\mathrm{M}}$$

où $|s'_1|^2$ et $|s'_2|^2$ sont proportionnels aux surfaces a_1 et a_2 de chacun des trous S_1 et S_2, d'où : $s'_1 = A\sqrt{a_1}s_0$ et $s'_2 = A\sqrt{a_2}s_0$ où s_0 est l'amplitude des ondes incidentes en S_1 et S_2 (venant de S) et où A est une constante de proportionnalité. D'où l'intensité lumineuse en M : $I(\mathrm{M}) = |s|^2$. On obtient :

$$\begin{aligned} I(\mathrm{M}) &= |s'_1|^2 + |s'_2|^2 + s'_1 s'^*_2 \mathrm{e}^{-jk\delta} + s'^*_1 s'_2 \mathrm{e}^{+jk\delta} \\ &= A^2 |s_0|^2 \left(a + a_2 + 2\sqrt{a_1 a_2}\cos k\delta(\mathrm{M})\right) \end{aligned}$$

Puisque $\delta = \dfrac{xa}{D}$, δ donc I ne dépend pas de y. I varie sinusoïdalement avec x, avec une période $i = \dfrac{D\lambda}{a}$. Les franges sont des droites parallèles à Oy. La seule différence avec l'exercice 1 est que les franges sombres ne sont plus noires.

b. On a $I_{\max} = A^2 |s_0|^2 (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2$ (en $\delta = n\lambda$) et $I_{\min} = A^2 |s_0|^2 (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2$ (en $\delta = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$).

D'où le contraste : $C = \dfrac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2}$.

Les franges sont les plus contrastées quand le contraste C est égal à 1, donc si $I_{\min} = 0$, donc si $a_1 = a_2$.

2.a. On a maintenant :

$$\delta = \mathrm{SS}_2 + \mathrm{S}_2\mathrm{M} - \mathrm{SS}_1 - \mathrm{S}_1\mathrm{M},$$

avec

$$\mathrm{SS}_2 - \mathrm{SS}_1 = \sqrt{\left(x_s + \frac{a}{2}\right)^2 + d^2} - \sqrt{\left(x_s - \frac{a}{2}\right)^2 + d^2}$$

soit, en effectuant un développement limité ($(x_s \pm \dfrac{a}{2}) \ll d$) :

$$\mathrm{SS}_2 - \mathrm{SS}_1 \approx \frac{\left(x_s + \frac{a}{2}\right)^2}{2d} - \frac{\left(x_s - \frac{a}{2}\right)^2}{2d}$$

On obtient ainsi : $\delta(\mathrm{M}) = \left(\dfrac{x}{D} + \dfrac{x_s}{d}\right) a$

b. La frange centrale (définie par $\delta = 0$) est désormais en $x = -\frac{D}{d}x_s$. L'ensemble de la figure d'interférences est décalée de $-\frac{D}{d}x_s$.

3. Les deux sources sont incohérentes. Donc en M : $I(\mathrm{M}) = I_1 + I_2$. La figure d'interférences disparaît.

4. En M, les deux ondes provenant de S_1 et de S_2 sont polarisées dans deux directions orthogonales. Donc dans le calcul de $I(\mathrm{M}) = |\overrightarrow{s}(\mathrm{M})|^2$, le terme d'interférence disparaît. Il n'y a plus de franges d'interférences.

5.a. La frange centrale ($\delta = 0$) reçoit toutes les longueurs d'onde avec une intensité proportionnelle à celle de la source S à la longueur d'onde considérée. La frange centrale est donc blanche.

b. Les premières franges sont irisées.

c. Certaines longueurs d'onde vont être totalement absentes du spectre de la lumière provenant en M. Ces longueurs d'onde sont telles que, dans la figure d'interférences obtenue pour l'une de ces longueurs d'onde, le point M coïncide avec une frange sombre. Donc ces longueurs d'onde sont telles que :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda = \delta(\mathrm{M}) = \frac{xa}{D}$$

6.a. La fente source est partagée en points sources (incohérents entre eux). Tous les points source ont même coordonnée $x_s = 0$. Ils donnent donc tous la même figure d'interférences (cf. question 2). Donc la figure d'interférences n'est pas modifiée : on peut la concevoir comme la superposition de figures d'interférences, une par point source, toutes identiques.

b. Les coordonnées d'un point source S sont maintenant $(x_s = \theta y_s, y_s)$ avec $-\frac{h}{2} \leqslant y_s \leqslant \frac{h}{2}$. La figure d'interférences donnée par ce point source est alors décalée de $-\frac{D}{d}x_s$ par rapport à celle donnée par une source en $x_s = 0$. Tant que le décalage maximum, soit $\frac{D}{d}\frac{\theta h}{2}$ est faible devant l'interfrange, la figure d'interférences totale n'est pas affectée.
On peut calculer explicitement la répartition d'intensité donnée par chacun des points sources S dans le plan d'observation : le point source de coordonnées $(x_s = \theta y_s, y_s)$, de hauteur dy_s, donne une intensité :

$$dI(\mathrm{M}) = A dy_s \left\{1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{D} + \frac{x_s}{d}\right)a\right\}$$

(A est une constante de proportionnalité). D'où l'intensité au point M de l'éclairement donné par l'ensemble de la fente :

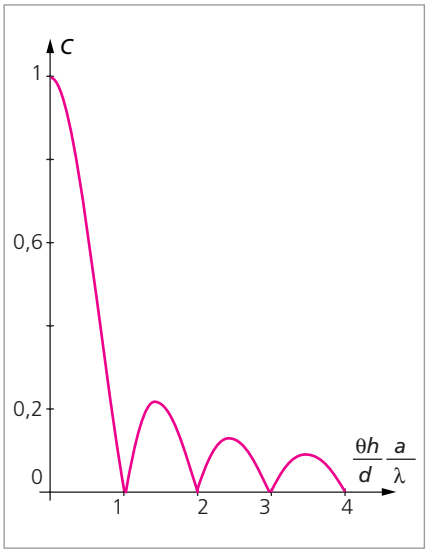
$$
\begin{aligned}
I(\mathrm{M}) &= A\int_{-b/2}^{+b/2} dy_s \left\{1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{D}+\frac{\theta y_s}{d}\right)a\right\}\\
&= Ab + A\frac{\lambda}{2\pi}\frac{d}{\theta a}\left[\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{D}+\frac{\theta y_s}{d}\right)a\right]_{-b/2}^{+b/2}\\
&= Ab + A\frac{\lambda}{2\pi}\frac{d}{\theta a}\left(\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{D}+\frac{\theta b}{2d}\right)a - \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{D}-\frac{\theta b}{2d}\right)a\right)\\
&= A\left\{b+\frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{\theta a}\sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{\theta b}{d}a\ \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{D}a\right\}
\end{aligned}
$$

(on somme les intensités parce que les différents points sources S sont incohérents). Les maximum et minimum de I sont respectivement :

$$
I_{\max} = A\left\{b+\frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{\theta a}\left|\sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{\theta b}{d}a\right|\right\} \qquad \text{et} \qquad I_{mainx} = A\left\{b-\frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{\theta a}\left|\sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{\theta b}{d}a\right|\right\}
$$

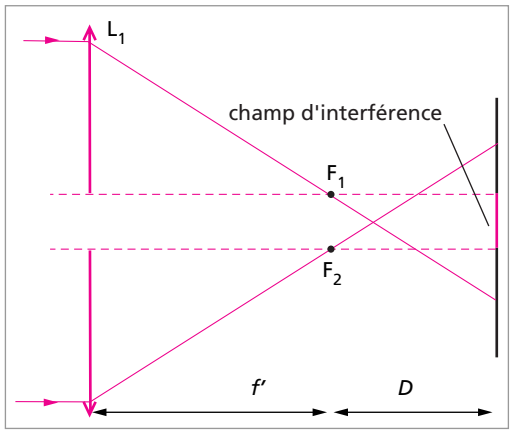
d'où le contraste :

$$
C = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{\theta a b}\left|\sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{\theta b}{d}a\right| = \left|\operatorname{sinc}\frac{\pi}{\lambda}\frac{\theta b}{d}a\right|
$$



où la fonction sinus cardinal est définie par : $\operatorname{sinc}\ x = \dfrac{\sin x}{x}$. Le contraste C est tracé sur la figure. Il s'annule pour $\dfrac{\theta b}{d} = n\dfrac{\lambda}{a}$, où n est entier (noter que $\dfrac{\theta b}{d}$ est la largeur angulaire – selon Ox – de la fente source, vue d'un point de l'écran diffractant, et que $\dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{i}{D}$ est la largeur angulaire d'une frange de la figure d'interférences, vue d'un point de l'écran diffractant). Ainsi, lorsqu'on augmente θ, c'est-à-dire la largeur (selon Ox) de la fente source, les franges perdent en contraste, puis disparaissent (pour $\dfrac{\theta b}{d} = \dfrac{\lambda}{a}$), puis apparaissent (à chaque fois inversées, les franges sombres remplaçant les franges claires et réciproquement) et disparaissent périodiquement.

6 **1.a.** La figure ci-contre représente les deux demi-lentilles, et leurs 2 axes optiques, parallèles et distants de e. Chaque demi-lentille focalise le faisceau incident en son foyer F_1 ou F_2. On a donc : $a = F_1F_2 = e$.



b. F_1 et F_2 sont les deux sources secondaires. On a donc :

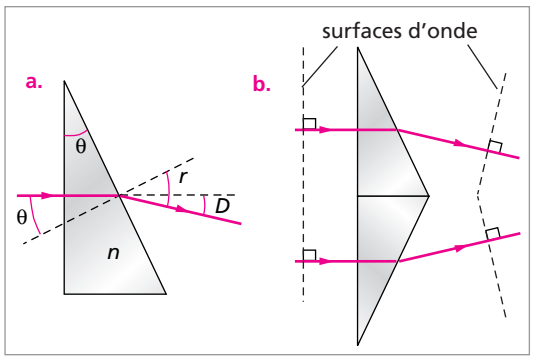
$$I(M) = \mathcal{A}\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xe}{D}\right\}$$

c. L'interfrange est : $i = \dfrac{\lambda D}{e}$.

d. Le champ d'interférences est la zone de l'écran d'observation éclairée simultanément par les deux sources F_1 et F_2. C'est ici une bande de largeur e selon Ox (voir figure).

2.a. Soit un rayon incident parallèle à l'axe optique (voir figure a ci-contre). Le rayon transmis par le premier dioptre n'est pas dévié, mais celui transmis par le second dioptre l'est. On a $n\sin\theta = \sin r$, soit $n\theta = r$ si θ est petit. L'angle de déviation est $D = r - \theta$, d'où :

$$D = (n-1)\theta$$



b. Voir figure b ci-contre.

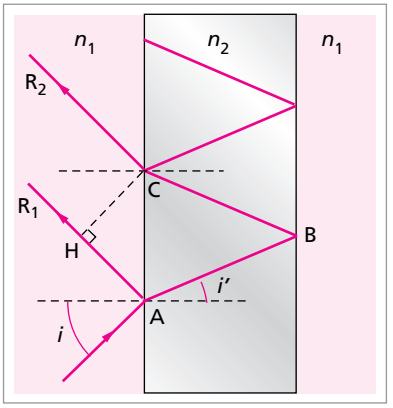
c. On est ici dans le cas où les sources ponctuelles sont rejetées à l'infini. Les deux ondes planes ont respectivement pour vecteurs d'onde $k(\overrightarrow{u_z} \pm D\overrightarrow{u_x})$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; elles s'écrivent $s_1 = s_0 e^{j[k(z-Dx)-\omega t]}$ et $s_2 = s_0 e^{j[k(z+Dx)-\omega t]}$, d'où on tire l'amplitude totale $s(M) = 2s_0 e^{j(kz-\omega t)}\cos(kDx)$ et l'intensité totale :

$$I(M) = |s|^2 = 2\,|s_0|^2\left(1 + \cos\frac{4\pi Dx}{\lambda}\right)$$

Les franges sont donc des droites, parallèles à Oy, équidistantes, d'interfrange angulaire $i = \dfrac{\lambda}{2D}$.

7 **1.** Les deux rayons R_1 et R_2 sont parallèles. Ils interfèrent donc à l'infini, soit concrètement dans le plan focal image d'une lentille.

2.a. La différence de marche géométrique est calculée par le raisonnement effectué au paragraphe **7.1**. On a $\delta_g = (AB) + (BX) - (AH)$ où les points A, B, C et H sont définis par la figure, En appelant i' l'angle de réfraction, on a $(AB) = (BC) = n_2 \dfrac{e}{\cos i'}$ et $(AH) = n_1 AC \sin i$ avec $AC = 2e \tan i'$. En utilisant en outre la loi de Descartes $n_1 \sin i = n_2 \sin i'$, on obtient :



$$\delta_g = 2n_2 e \cos i'$$

À δ_g s'ajoute une différence de marche $\delta_r = \dfrac{\lambda}{2}$ introduite par le fait que l'une des réflexions se fait avec changement de signe du champ, et pas l'autre. La différence de marche totale est donc :

$$\delta = \delta_g + \delta_r = 2n_2 e \cos i' + \frac{\lambda}{2}$$

b. Les franges brillantes correspondent à $\delta = m\lambda$ avec m entier. En introduisant l'ordre d'interférence p à incidence normale, défini par $p\lambda = 2n_2 e$ (attention p n'est pas nécessairement un entier, il peut avoir n'importe quelle valeur), et en tenant compte de ce que les angles sont petits ($\cos i' \approx 1 - \dfrac{i'^2}{2}$), on a $i' = \sqrt{\left(p - m + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{\lambda}{n_2 e}}$, d'où :

$$i = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\left(p - m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n_2 e}}$$

Les franges sombres s'observent lorsque $\delta = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ où m est un entier. Elles correspondent donc aux angles :

$$i = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{(p - m) \frac{\lambda}{n_2 e}}$$

3.a. Si s_0 est l'amplitude de l'onde incidente, les ondes R_1 et R_2 ont des amplitudes $s_1 = |r| s_0$ et $s_2 = t^2 |r| s_0 e^{jk\delta}$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (attention à ce que c'est $|r|$, et non r, qui intervient ici, puisqu'on a déjà tenu compte du signe des coefficients de réflexion par le biais de la différence de marche δ_r).

b. D'où l'amplitude $s = s_1 + s_2$ de l'onde résultant de la superposition des deux ondes, et son intensité est :

$$I = r^2 |s_0|^2 (1 + t^4 + 2t^2 \cos k\delta)$$

soit en fonction de l'angle d'incidence i (supposé petit) :

$$I = r^2 |s_0|^2 \left\{ 1 + t^4 + 2t^2 \cos 2\pi p \left(1 - \frac{n_1^2}{2n_2^2} i^2 \right) \right\}$$

c. Les maximum et minimum de I correspondent à $\cos(k\delta) = \pm 1$, d'où le contraste :

$$C = \frac{2t^2}{1 + t^4}$$

4.a. En réalité il y a plus de deux rayons réfléchis. Mais les rayons réfléchis d'ordre supérieur sont de moins en moins intenses. On peut calculer l'amplitude de R_3 : $s_3 = t^2|r|^3 s_0 e^{2jk\delta}$ (ce rayon a en effet subi 3 réflexions sur l'un ou l'autre des dioptres), d'où $s_3 = r^2 s_2 e^{jk\delta}$. Pour pouvoir négliger s_3 devant s_2, il faut $|s_3| \ll |s_2|$, donc :

$$r^2 = R \ll 1$$

b. Pour une lame de verre plongée dans l'air ($n_1 = 1$ et $n_2 = 1{,}5$), on obtient $R = 0{,}04$. Il est donc justifié de ne prendre en compte que les deux rayons R_1 et R_2. Le contraste de la figure d'interférences est $C = 0{,}91$.

5. Les deux rayons transmis T_1 et T_2 sont aussi parallèles, donc susceptibles d'interférer à l'infini (soit concrètement dans le plan focal d'une lentille).
La différence de marche géométrique δ_g entre les deux rayons transmis T_1 et T_2 est la même que celle pour les deux rayons réfléchis R_1 et R_2 :

$$\delta_g = 2n_2 e \cos i'$$

Par contre, pour les rayons transmis il n'y a pas de différence de marche supplémentaire δ_r due aux réflexions (les 2 réflexions subies par R_2 sont de même nature). Ainsi :

$$\delta = 2n_2 e \cos i'$$

Les amplitudes des deux ondes transmises T_1 et T_2 peuvent être reliées à l'amplitude s_0 de l'onde incidente ; on a :

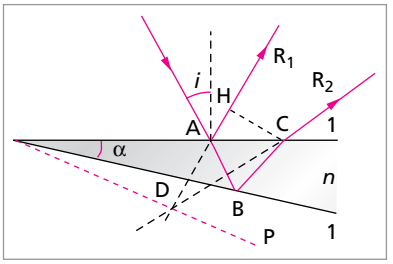
$$s_1' = tt' s_0 \qquad \text{et} \qquad s_2' = tt' r^2 s_0 e^{jk\delta}$$

(t' représente le coefficient de transmission du milieu d'indice n_2 vers celui d'indice n_1 : $t' = \dfrac{2n_2}{n_1 + n_2}$). D'où l'intensité de l'onde totale transmise :

$$I = t^2 t'^2 |s_0|^2 (1 + r^4) \left(1 + \frac{2r^2}{1 + r^4} \cos k\delta \right)$$

Le contraste est donc $C = \dfrac{2r^2}{1 + r^4} = \dfrac{2R}{1 + R^2}$, soit $C = 0{,}08$ pour une lame de verre dans l'air. La figure d'interférences obtenue par transmission est donc beaucoup moins contrastée que celle obtenue par réflexion.

8 **1.a.** Les interférences sont localisées sur la surface contenant les points d'intersection de R_1 et de R_2, c'est-à-dire sur le plan P contenant le point D et l'axe du prisme (voir figure ci-contre). La localisation se fait ici à distance finie, sur une surface virtuelle (au sens de l'optique géométrique). Pour visualiser cette figure d'interférences, on en fera l'image (réelle) par une lentille sur un écran. Notez que la surface de localisation des interférences est au voisinage de la lame.



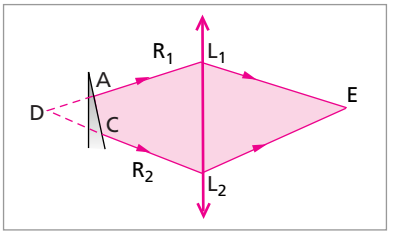
b. La différence de marche (géométrique) entre les 2 rayons R_2 et R_1 est $\delta_g = (ABCD) - (AD)$, soit :

$$\delta_\gamma = (AB) + (BC) - CD + DA = nAB + nBC - CD + DA$$

Remarque : les parties virtuelles de chaque trajet optique sont affectées d'un signe − dans l'expression de chaque chemin optique. Pour s'en convaincre, on peut convenir qu'on réalise avec une lentille une image réelle E de D. La différence de marche des deux rayons entre A et E est :

$$\delta'_g = (ABCL_1E) - (AL_2E) = \delta + (DL_1E) - (DL_2E)$$

(les points L_1 et L_2 sont définis par la figure ci-contre, ce sont les intersections des deux rayons R_1 et R_2 avec la lentille). Puisque les deux points D et E sont conjugués, on a $(DL_1E) = (DL_2E)$. D'où la différence de marche $\delta'_g = \delta_g$. La façon dont on visualise la figure d'interférences (i.e. le point D) ne modifie pas la différence de marche.



On peut obtenir une autre expression de δ en introduisant le point H′, défini comme l'intersection du rayon R_1 et du cercle de centre D et de rayon DC. En rajoutant $DH' = DC$ à chacun des trajets optiques, on a aussi :

$$\delta_g = (ABC) - (AH')$$

c. Si l'angle α est petit, l'angle entre R_1 et R_2 est petit et H′ peut être assimilé à la projection orthogonale H de C sur R_1. Donc δ tend vers $(ABC) - (AH)$, et chaque terme de cette expression tend vers la valeur calculée dans le cas de la lame à faces parallèles (cf. **7.1**). La différence de marche tend donc vers

$$\delta_g = 2ne\cos r$$

où r est l'angle de réfraction (relié à i par $\sin i = n \sin r$) et $e = e(A)$ est l'épaisseur locale (au voisinage de A) de la lame prismatique. On a $e = \alpha x$, où $x = OA$ est la distance de A à l'arête du prisme.

Si de plus i (donc r) est petit, $\delta_g \approx 2ne\left(1 - \dfrac{i^2}{2n^2}\right)$, soit à l'ordre le plus bas :

$$\delta_g \approx 2ne$$

2. On a maintenant $\delta_g \approx 2e \approx 2\alpha x$. À la différence de marche géométrique s'ajoute une différence de marche due aux réflexions : parmi les deux réflexions en A et B, il y en a toujours une qui s'effectue sur un milieu d'indice supérieur (ici c'est la réflexion en B, car $n_1 > n_2 = 1$), d'où $\delta_r = \dfrac{\lambda}{2}$. Au total :

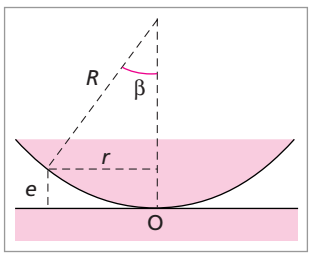
$$\delta = 2\alpha x + \frac{\lambda}{2}$$

Les franges brillantes correspondent à $\delta = n\lambda$ avec n entier, on les observe donc en $x = \dfrac{\lambda}{2\alpha}(n + \dfrac{1}{2})$. Inversement, les franges sombres, correspondant à $\delta = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ avec n entier, s'observent en $x = n\dfrac{\lambda}{2\alpha}$. Les franges sont des droites parallèles à l'arête du prisme, équidistantes. L'interfrange est $\dfrac{\lambda}{2\alpha}$.

3.a. Soit Oz l'axe de symétrie de la lentille. Le dispositif ayant une symétrie cylindrique autour de Oz, la figure d'interférences est constituée d'anneaux de centre O.

b. On a $\delta = 2e + \dfrac{\lambda}{2}$, où e est la distance entre la surface sphérique de la lentille et la surface plane de verre. Au centre $e = 0$ (puisque la lentille touche la surface de verre), donc $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$. Le centre est donc une frange sombre.

c. À la distance r de l'axe, l'épaisseur e de la lame d'air peut être calculée par des considérations géométriques : si on introduit l'angle β (voir figure ci-contre ; β est l'angle sous lequel on voit r du centre de la face sphérique de la lentille), on a :



$$e = R(1 - \cos\beta) \qquad \text{et} \qquad r = R\sin\beta$$

β étant petit, on obtient à l'ordre le plus bas en β :

$$e \approx R\frac{\beta^2}{2} \qquad \text{et} \qquad r \approx R\beta$$

d'où :

$$e \approx \frac{r^2}{2R}$$

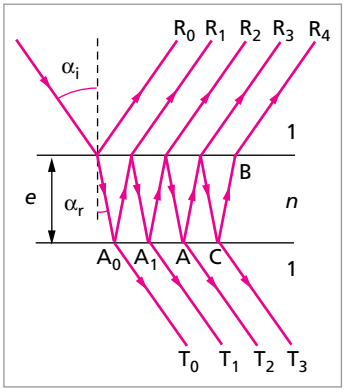
À la distance r de l'axe, la différence de marche est donc $\delta = \dfrac{r^2}{R} + \dfrac{\lambda}{2}$. Le k-ième anneau sombre correspond à $\delta = k\lambda + \dfrac{\lambda}{2}$ (en effet, au centre $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$, et plus on s'éloigne du

centre, plus δ augmente ; à chaque fois qu'on passe sur un anneau sombre, δ est un multiple demi-entier de λ). D'où le rayon de ce k-ième anneau sombre :

$$r_k = \sqrt{k\lambda R}$$

Plus on s'éloigne du centre, plus les anneaux sont serrés. Les anneaux sombres constituent une série de courbes de niveau de l'épaisseur de la lame d'air située entre la surface de verre et la face sphérique de la lentille.

9 **1.** Le dispositif est présenté sur la figure ci-contre et précise les notations utilisées. La différence de marche géométrique entre deux rayons transmis consécutifs est $\delta_g = (\text{ABC}) - (\text{AH})$. Le calcul de δ_g est en tous points analogue à celui effectué pour la lame à faces parallèles (exercice 7). On obtient :



$$\delta_g = 2ne\cos\alpha_r$$

où α_r est l'angle de réfraction ($\sin\alpha_i = n\sin\alpha_r$).

2. Si s_i est l'amplitude de l'onde incidente (en P), celle de la première onde transmise T_0 (qui n'a subi aucune réflexion) est :

$$s_0 = s_i t^2 e^{j(\text{PA}_0)\frac{2\pi}{\lambda}}$$

dans le plan de A_0. Celle de l'onde transmise T_1 (qui a subi 2 réflexions) est :

$$s_1 = s_i t^2 r^2 e^{j\left\{(\text{PA}_0)+\delta_g\right\}\frac{2\pi}{\lambda}} = s_0 r^2 e^{j\delta_g\frac{2\pi}{\lambda}}$$

De même, l'amplitude de l'onde T_k est reliée à celle de l'onde T_{k-1} par :

$$s_k = s_{k-1} r^2 e^{j\delta_g\frac{2\pi}{\lambda}}$$

d'où :

$$s_k = s_0\left(r^2 e^{j\delta_g\frac{2\pi}{\lambda}}\right)^k$$

3. Toutes les ondes transmises ayant une relation de phase entre elles, elles interfèrent. L'amplitude de l'onde transmise est :

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} s_k = s_0\sum_{k=0}^{\infty}\left(r^2 e^{j\delta_g\frac{2\pi}{\lambda}}\right)^k$$

Dans cette expression, la somme est une série géométrique, de raison $r^2 e^{j\delta_g\frac{2\pi}{\lambda}}$. D'où :

$$s = \frac{s_0}{1 - r^2 e^{j\delta_g\frac{2\pi}{\lambda}}}$$

On obtient ainsi l'intensité de la lumière transmise :

$$I = |s|^2 = \frac{|s_0|^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos\left(\delta_g \frac{2\pi}{\lambda}\right)}$$

Cette intensité est maximale si $\cos(\delta_g \frac{2\pi}{\lambda}) = 1$ (franges brillantes), elle vaut $I_{\max} = \frac{|s_0|^2}{(1-r^2)^2}$. On a donc :

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta_g\right)}$$

Si α_i, donc α_r varie (augmente), $\delta_g = 2ne\cos\alpha_r$ varie (diminue). Les variations de I avec δ_g sont périodiques (de période λ), et sont représentées (en fonction de l'ordre d'interférence δ_g/λ) sur la figure p. 571.

4.a. On observe des anneaux (centrés sur l'axe de symétrie du système).

b. Au centre $\alpha_i = \alpha_r = 0$ et $\delta_g = 2ne$. L'ordre d'interférence est donc $p_O = \frac{\delta_g}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda}$.

c. Soient $\delta\alpha_i$ la largeur angulaire à mi-hauteur d'un anneau brillant, et $\Delta\alpha_i$ la distance angulaire entre cet anneau brillant (observé pour l'angle d'incidence α_i) et le suivant (observé pour l'angle d'incidence $\alpha_i + \Delta\alpha_i$). On a donc :

$$I(\alpha_i) = I_{\max} \quad I(\alpha_i + \delta\alpha_i) = \frac{I_{\max}}{2} \quad I(\alpha_i + \Delta\alpha_i) = I_{\max}$$

Ainsi, pour les angles d'incidence α_i et $\alpha_i + \Delta\alpha_i$, la différence de marche géométrique vaut respectivement $p\lambda$, et $(p-1)\lambda$(δ_g décroît si l'angle d'incidence croît). Pour l'angle $\alpha_i + \frac{\delta\alpha_i}{2}$, la différence de marche géométrique est donnée par :

$$I\left(\alpha_i + \frac{\delta\alpha_i}{2}\right) = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_{\max}}{1 + m\sin^2\left(\frac{\pi\delta_g}{\lambda}\right)}$$

où on a posé $m = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}$. D'où $m\sin^2\left(\frac{\pi\delta_g}{\lambda}\right) = 1$, soit $\delta_g = \pm\frac{\lambda}{\pi\sqrt{m}}$ (modulo λ).

Pour l'angle $\alpha_i + \frac{\delta\alpha_i}{2}$, la différence de marche est donc :

$$\delta_g = p\lambda - \frac{\lambda}{\pi\sqrt{m}}$$

(c'est-à-dire la solution de l'équation $m\sin^2\left(\frac{\pi\delta_g}{\lambda}\right) = 1$ immédiatement inférieure à $p\lambda$).

On sait comment sont reliés δ_g et α_i :

$$\delta_g = 2ne\cos\alpha_r \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha_i = n\sin\alpha_r$$

Si les angles sont petits, ces relations entraînent :

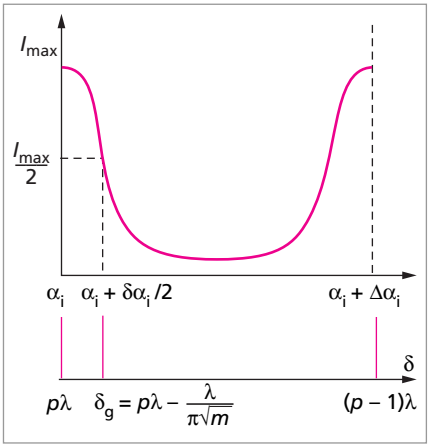
$$\delta_g = 2ne\left(1 - \frac{\alpha_i^2}{2n^2}\right)$$

Les variations de α_i sont donc reliées à celles de δ_g par la relation :

$$d\alpha_i = -\frac{n}{2e\alpha_i} d\delta_g$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\delta\alpha_i}{2} = \frac{n}{2e\alpha_i}\frac{\lambda}{\pi\sqrt{m}} \qquad \text{et} \qquad \Delta\alpha_i = \frac{n}{2e\alpha_i}\lambda$$

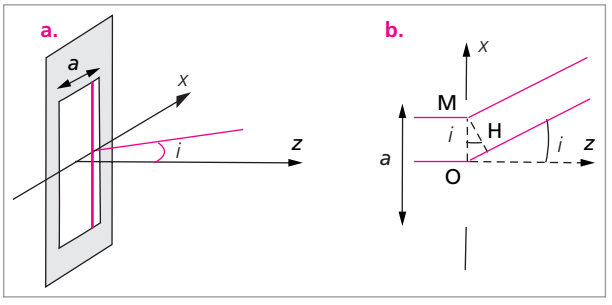


On en déduit la finesse :

$$F = \frac{\Delta\alpha_i}{\delta\alpha_i} = \frac{\pi}{2}\sqrt{m} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

où R est le coefficient de réflexion de l'énergie sur chacune des lames traitées.
Pour $R = 0{,}9$, la finesse est $F \approx 30$. Pour $R = 0{,}99$, elle est de 300. Un interféromètre de Fabry-Pérot donne des anneaux brillants très fins.

10 **1.a.** La géométrie du problème est illustrée par la figure. La fente infinitésimale située en x, de largeur dx, émet dans la direction i une onde d'amplitude :



$$ds = A dx e^{jk\overline{OH}}$$

(en prenant l'origine des phases en O : puisque la fente est éclairée à incidence normale, toutes les fentes sources sont en phase, mais l'onde émise par la source M a une avance $\overline{OH} = x \sin i$ par rapport à celle émise dans la même direction par la fente source située en O – voir figure). A est une constante, et $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.
L'ensemble de la fente source émet donc dans la direction i une onde d'amplitude :

$$s = \int_{x=-a/2}^{x=+a/2} ds = A\int_{-a/2}^{+a/2} e^{jkx\sin i} dx$$

D'où :

$$s = A\frac{e^{jk\frac{a}{2}\sin i} - e^{-jk\frac{a}{2}\sin i}}{jk\sin i} = Aa\frac{\sin\left(k\frac{a}{2}\sin i\right)}{k\frac{a}{2}\sin i} = Aa\,\text{sinc}\left(k\frac{a}{2}\sin i\right)$$

Il est réaliste de considérer que l'angle i est petit. D'où :

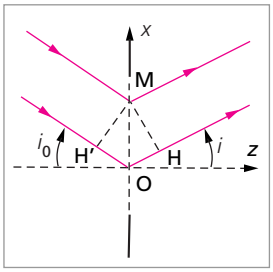
$$s = Aa \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda} i\right)$$

b. L'intensité de la lumière diffractée dans la direction i est donc :

$$I = |s|^2 = |\mathrm{A}|^2 a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} i\right)$$

c. La fonction $\operatorname{sinc}^2 x$ est maximale en $x = 0$ et son maximum est égal à 1, d'où l'intensité maximale $I_{\max} = |A|^2 a^2$, et $I = I_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} i\right)$. Les variations de l'intensité I en fonction de i sont représentées sur la figure p. 577 I est maximale en $i = 0$ (frange centrale), et au voisinage de $i = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a}$ avec n entier positif ou nul. Elle est minimale (nulle) en $i = \pm n\frac{\lambda}{a}$ (avec n entier positif). La largeur angulaire de la frange centrale (à sa base) est $\Delta i = 2\frac{\lambda}{a}$. Elle est 2 fois plus large que les autres franges, dont la largeur angulaire (à la base) est $\Delta i' = \frac{\lambda}{a}$ (voir figure p. 577).

2. Si le faisceau incident fait l'angle i_0 avec la normale à l'écran, les amplitudes émises par les différentes fentes sources sont déphasées. L'onde incidente arrivant en M est en avance par rapport à celle arrivant en O, car elle n'a pas eu à parcourir $\overline{\mathrm{H'O}}$ (voir figure ci-contre ; la surface H′M est un plan d'onde de l'onde incidente), d'où son amplitude $s_0(\mathrm{M})$ en M, exprimée en fonction de celle en O, soit $s_0(\mathrm{O})$:



$$s_0(\mathrm{M}) = s_0(\mathrm{O})\mathrm{e}^{jk\overline{\mathrm{H'O}}}$$

Ainsi la fente infinitésimale située en x, de largeur dx, émet dans la direction i une onde d'amplitude proportionnelle à $s_0(\mathrm{M})\mathrm{e}^{jk\overline{\mathrm{OH}}}$, soit :

$$\mathrm{d}s = A\mathrm{d}x\mathrm{e}^{jk(\overline{\mathrm{H'O}}+\overline{\mathrm{OH}})}$$

(On peut aussi remarquer sur la figure que l'avance totale de l'onde passant par M par rapport à celle passant par O est $\overline{\mathrm{H'O}} + \overline{\mathrm{OH}}$). On a $\overline{\mathrm{H'O}} = x \sin i_0 \approx x i_0$ (en orientant les angles comme indiqué sur la figure), d'où :

$$\mathrm{d}s = A\mathrm{d}x\mathrm{e}^{jkx(i+i_0)}$$

Le reste du calcul de s et de I s'effectue exactement comme à la question 1, à la seule différence que i est remplacé par $i + i_0$. L'amplitude totale de l'onde diffractée dans la direction i est donc :

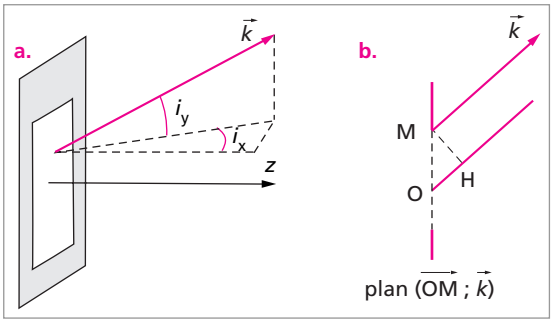
$$s = Aa \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}(i + i_0)\right)$$

et son intensité est :

$$I = I_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}(i + i_0)\right)$$

La frange centrale correspond maintenant à $i = -i_0$. L'ensemble de la figure de diffraction a été translaté de $-i_0$. Notez que le centre de la frange centrale correspond au rayon non diffracté (non dévié par la figure diffractante).

3.a. La géométrie du problème est présentée sur la figure ci-contre. Les rayons diffractés dans la direction (i_x, i_y) ont un vecteur d'onde $\vec{k}$, avec $k_x \approx k i_x$ et $k_y \approx k i_y$. L'avance du rayon passant par M par rapport à celui passant par O est $\delta = \overline{OH}$, c'est-à-dire la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur la direction du vecteur $\vec{k}$, d'où $\delta = \frac{\vec{k}}{k}\overrightarrow{OM}$. L'amplitude de l'onde diffractée dans la direction $\vec{k}$ par la source infinitésimale située en M(x, y), de surface dxdy, est donc :



$$d^2s = Ae^{jk\delta}dxdy = Ae^{j\vec{k}\,\overrightarrow{OM}}dxdy = Ae^{jk(i_x x + i_y y)}dxdy$$

Ainsi l'amplitude totale de l'onde diffractée dans la direction $\vec{k}$ est :

$$s = \int_{x=-a/2}^{x=a/2}\int_{y=-b/2}^{y=b/2} d^2s = Aab\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}i_x\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda}i_y\right)$$

(où les 2 intégrales sur x et y sont précisément celle calculée à la question 1).

b. L'intensité de l'onde diffractée dans la direction $\vec{k}$ est donc :

$$I = |s|^2 = I_{\max}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}i_x\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}i_y\right)$$

avec $I_{\max} = |A|^2a^2b^2$. Les franges noires ($I = 0$) sont obtenues pour $i_x = \pm n_x\frac{\lambda}{a}$ (avec n_x entier non nul) ou pour $i_y = \pm n_y\frac{\lambda}{b}$ (avec n_y entier non nul). Elles forment un réseau rectangulaire (cf. figure p. 581), de pas $\frac{\lambda}{a}$ selon i_x et $\frac{\lambda}{b}$ selon i_y (si $a > b$, le pas en i_x est plus petit que celui en i_y). Les taches situées en $i_x = 0$ ou en $i_y = 0$ ont une surface double. La tache centrale ($i_x = i_y = 0$) a une surface quadruple (cf. figure p. 581).

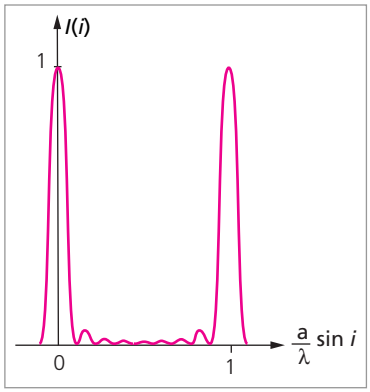
11

1.a. La n-ième fente ($0 \leqslant n \leqslant N-1$) diffracte une onde $s_n = s_0e^{jk\delta_n}$ dans la direction i ($k = 2\pi/\lambda$), avec $\delta_n = na\sin i$ (on a pris comme référence de phase l'onde $n = 0$). L'onde totale diffractée dans la direction n est donc :

$$s = \sum_{n=0}^{N-1} s_n = s_0\sum_{n=0}^{N-1} s_n(e^{jka\sin i})^n = s_0\frac{1 - e^{jka\sin iN}}{1 - e^{jka\sin i}}$$

b. D'où : $I = |s|^2 = |s_0|^2 \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{\lambda} N \sin i\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{\lambda} \sin i\right)}$

c. Les variations de I avec i sont présentées sur la figure ci-contre. Le numérateur $\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{\lambda} N \sin i\right)$ s'annule pour $\sin i = \dfrac{\lambda}{Na} n$ (avec n entier). Mais le dénominateur s'annule en $\sin i = \dfrac{\lambda}{a} p$ (avec p entier). Lorsque n est un multiple de N ($n = pN$), le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément et le rapport tend vers N^2 (pour s'en convaincre, étudier la limite $i \to 0$). Les autres valeurs $\sin i = \dfrac{\lambda}{Na} n$, avec $n \neq pN$, correspondent à des franges sombres.



Les maxima absolus d'intensité (dont l'intensité est $I = I_{\max} = |s_0|^2 N^2$) s'observent donc pour $\sin i = \dfrac{\lambda}{a} p$ (avec p entier), soit pour une différence de marche entre deux rayons diffractés consécutifs (n et $n + 1$) égale à :

$$\delta = a \sin i = p\lambda$$

p est habituellement appelé l'ordre du maximum considéré. Pour ces maxima principaux, deux rayons diffractés par deux fentes consécutives sont donc en phase.
Entre deux maxima principaux, il y a des maxima secondaires (au nombre de $N-2$). On les observe approximativement entre les franges noires, soit pour $\sin i \approx \dfrac{\lambda}{Na}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ (avec n entier compris entre 1 et $N - 2$). L'intensité de ces maxima secondaires est beaucoup plus faible que celle des maxima principaux : à titre d'exemple, on peut calculer le rapport des intensités du premier maximum secondaire ($n = 1$) et du maximum principal ; on obtient $\dfrac{I\left(\sin i = \dfrac{3}{2}\dfrac{\lambda}{Na}\right)}{I_{\max}} = \dfrac{1}{N^2 \sin^2(\dfrac{3\pi}{2N})}$, soit $\approx \dfrac{4}{9\pi^2} \approx 4{,}5$ % lorsque N est grand.

Enfin, entre deux maxima principaux, l'intensité I s'annule pour $\sin i = \dfrac{\lambda}{Na} n$ (avec n entier compris entre 1 et $N - 1$), ce qui correspond à la position des franges noires.

2. À la limite où N est grand ($N \to \infty$), la largeur des pics principaux diminue, et tend vers 0 (on s'en aperçoit en particulier en remarquant que la position de la première frange noire $\sin i = \dfrac{\lambda}{Na} n$, avec $n = 1$, tend vers 0). Il n'y a de lumière diffractée que dans les directions des maxima principaux, pour $\sin i = \dfrac{\lambda}{a} p$.

3. L'amplitude de la lumière diffractée par la n-ième fente (centrée en $(n-1)a$ et de largeur b, donc comprise entre les abscisses $(n-1)a-\frac{b}{2}$ et $(n-1)a+\frac{b}{2}$) dans la direction i s'écrit maintenant :

$$s_n = \int_{(n-1)a-\frac{b}{2}}^{(n-1)a+\frac{b}{2}} s_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin i}\mathrm{d}x = s_0 b \mathrm{e}^{\mathrm{i}kna\sin i}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{kb\sin i}{2}\right)$$

et l'amplitude totale diffractée par tout le réseau (constitué de N fentes) dans la même direction est :

$$s = \sum_{n=0}^{N-1} s_n = s_0 b\,\mathrm{sinc}\left(\frac{kb\sin i}{2}\right)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nka\sin i}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka\sin i}}$$

L'intensité de la lumière diffractée dans cette direction est donc :

$$I(i) = |s_0|^2 b^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b\sin i}{\lambda}\right)\frac{\sin^2\left(\frac{\pi Na\sin i}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a\sin i}{\lambda}\right)}$$

C'est donc le produit de la figure de diffraction obtenue pour un réseau de N fentes infiniment minces (*cf.* question 1) par celle d'une fente de largeur b. À la limite où N est grand, ce résultat est encore vrai, et l'intensité de chaque ordre du réseau est maintenant pondérée par la figure de diffraction à l'infini d'une fente de largeur b ; le pic d'ordre p a une intensité $I_p = I_{\max}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b\sin i}{\lambda}\right)$ avec $\sin i = \frac{\lambda}{a}p$, soit :

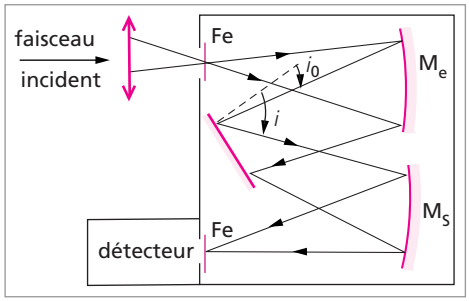
$$I_p = I_{\max}\,\mathrm{sinc}^2\left(p\pi\frac{b}{a}\right)$$

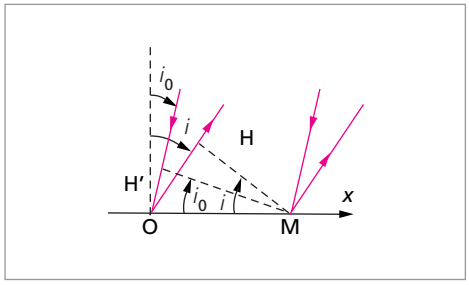
Dans ce cas, chaque pic d'ordre p est encore infiniment étroit, mais son intensité est gouvernée par la largeur de la fente.

4.a. La figure de diffraction en lumière polychromatique est la superposition des figures de diffraction obtenues pour chaque longueur d'onde. Expérimentalement, N étant grand, on n'observe que les maxima principaux. L'ordre $p = 0$ (en $i = 0$) est confondu pour toutes les longueurs d'onde (c'est le faisceau non dévié). Pour tous les autres ordres $p \neq 0$, les différentes longueurs d'onde de la lumière polychromatique sont séparées. À l'ordre p, la longueur d'onde λ_m est observable dans la direction $\sin i_{m,p} = \frac{\lambda_m}{a}p$.

b. En général un spectromètre à réseau utilise un réseau par réflexion (qui sont de bien meilleure qualité que les réseaux par transmission). Le réseau est plan. Il est éclairé en lumière parallèle. Pour former un faisceau de rayons parallèles, on n'utilise ici non pas des lentilles, mais des miroirs sphériques (les miroirs sont de meilleure qualité et moins coûteux que les lentilles, a fortiori quand ils sont grands ; de plus ils ne présentent pas de dispersion : leur distance focale est uniquement définie par leur rayon de courbure, et ne dépend donc pas de la longueur d'onde). La fente d'entrée est placée au foyer objet

d'un tel miroir, ce qui permet d'éclairer le réseau par un faisceau de rayons parallèles. La même disposition est reprise pour focaliser le faisceau transmis sur la fente de sortie. Le schéma typique d'un spectromètre à réseau est donné sur la figure ci-contre. Dans les appareils commerciaux, le réseau n'est pas éclairé à incidence normale. Si i_0 est l'angle d'incidence du faisceau incident (*cf.* figures ci-dessus : on prendra garde aux conventions de signes adoptées pour les angles i_0 et i dans ces figures), la différence de marche entre le rayon diffracté par la source fictive x dans la direction i et celui diffracté en O dans la même direction est alors (voir figure ci-contre) :





$$\delta = \mathrm{H'O} + \mathrm{OH} = x(\sin i + \sin i_0)$$

L'ordre p pour la longueur d'onde λ s'observera alors dans la direction i telle que :

$$\sin i + \sin i_0 = \frac{\lambda}{a}p$$

(attention ici aux conventions de signes de la figure ci-dessus : le rayon réfléchi correspond ici à $i = -i_0$). Dans un spectromètre commercial, l'ajustement en longueur d'onde se fait en tournant le réseau.

c. La limitation de la résolution est liée à la largeur angulaire des maxima principaux. Si ceux-là étaient infiniment fins, on pourrait en principe avoir une résolution infinie (à condition que les fentes soient très fermées). Ce serait le cas si N était infini (question 2). De façon pratique, on n'a évidemment jamais N infini (bien que N soit très grand). La largeur du maximum principal est alors limitée par la valeur finie de N, c'est-à-dire par la largeur finie du réseau $(N-1)a \approx Na$. La largeur angulaire à mi-hauteur d'un maximum principal est approximativement $\dfrac{\lambda}{Na}$ (c'est-à-dire la moitié de l'intervalle angulaire entre les pieds du maximum principal). Si N est grand, la forme du maximum principal est très proche de la figure de diffraction à l'infini d'une fente de largeur Na (l'interprétation de cette constatation est simple : si on superpose un réseau infini et une fente diffractante de largeur Na, on obtient un réseau de largeur Na, donc comportant N fentes).
La résolution ultime du spectromètre à réseau (fentes très fermées) est donc l'écart de longueur d'onde $\delta\lambda$ correspondant à un écart angulaire δi (relié à $\delta\lambda$ par $a\cos i\delta i = p\delta\lambda$, relation qu'on obtient en dérivant $\sin i + \sin i_0 = \dfrac{\lambda}{a}p$) égal à la demi-largeur angulaire à mi-hauteur d'un maximum principal (on utilise ici le critère de Rayleigh), soit $\delta i = \dfrac{\lambda}{2Na}$.

On obtient donc :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\cos i}{2Np}$$

12 L'amplitude de l'onde diffractée à l'infini produite par un écran E donné s'obtient en ajoutant toutes les ondes émises par toutes les sources secondaires M (de coordonnées x, y dans le plan de l'écran diffractant) tel que M soit dans la zone E non masquée par l'écran. Ainsi l'amplitude totale de l'onde diffractée dans la direction $\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire) pour chacun des deux écrans E_1 et E_2 est :

$$s_1 = \iint_{E_1} s_0 e^{ik\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{OM}} dx dy \qquad \text{et} \qquad s_2 = \iint_{E_2} s_0 e^{ik\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{OM}} dx dy$$

Si on ne mettait aucun écran diffractant, toutes les sources secondaires participeraient alors à la construction de l'onde diffractée ; on obtiendrait alors une onde diffractée égale à :

$$s = \iint_{E_1 \cup E_2} s_0 e^{ik\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{OM}} dx dy = s_1 + s_2$$

(chaque source secondaire M appartient soit à E_1, soit à E_2, et ne peut appartenir simultanément aux deux, puisque les deux écrans sont complémentaires). Cette onde sera tout simplement l'onde incidente (puisqu'il n'y a aucun écran diffractant). Donc, dès que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{u_z}$ ($\overrightarrow{u_z}$ = direction de propagation de l'onde incidente), on a $s = 0$. Ainsi si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{u_z}$, $s_1 + s_2 = 0$, donc $s_2 = -s_1$, et $I_1 = |s_1|^2 = |s_2|^2 = I_2$; les intensités diffractées par les deux écrans sont les mêmes. Ainsi les 2 écrans donnent la même figure de diffraction en dehors de la direction $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_z}$ de la lumière incidente (c'est-à-dire en dehors du foyer F de la lentille).

Ainsi, pour réaliser un réseau de diffraction, au lieu de réaliser un cache qui ne laisse passer de la lumière qu'en n fentes très fines, on peut utiliser un cache qui laisse passer la lumière partout, sauf là où sont les N fentes. Les réseaux par réflexion sont ainsi gravés (là où le support est gravé, la lumière n'est pas réfléchie – ou du moins n'est pas réfléchie dans la même direction qu'en l'absence de gravure).

13 **1.** L'émission stimulée est le processus selon lequel un atome excité (dans le niveau d'énergie ε_2) se désexcite vers le niveau d'énergie ε_1 et émet un photon d'énergie $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, sous l'effet d'un rayonnement incident à la même fréquence. Le photon émis est identique aux photons incidents (même fréquence, même direction de propagation, même polarisation, même phase). La probabilité d'émission induite par unité de temps est :

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = B_{21} u_\nu$$

où B_{21} est le coefficient d'Einstein correspondant, et u_ν la densité spectrale de rayonnement ($u_\nu d\nu$ est la densité volumique d'énergie du rayonnement de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

Les 3 transitions possibles entre les niveaux d'énergie ε_2 et ε_1 sont l'absorption, l'émission spontanée et l'émission induite.

2.a. D'après la loi de Boltzmann, on a : $\dfrac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{kT}}$.

b. On obtient : $\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT} = 58$, d'où $\dfrac{N_2}{N_1} = 7{,}5 \cdot 10^{-26}$.

c. On a $\alpha = \mu(N_1 - N_2)$. Usuellement $N_1 > N_2$ (cf 2.a) et $\alpha > 0$, donc le coefficient de proportionnalité μ est positif. Dans un laser, on réalise une inversion de population, ce qui entraîne $N_1 < N_2$, donc dans ce cas $\alpha < 0$, et l'intensité de l'onde $I = I_0\mathrm{e}^{-\alpha z}$ croît avec z ; il y a donc amplification de l'onde.

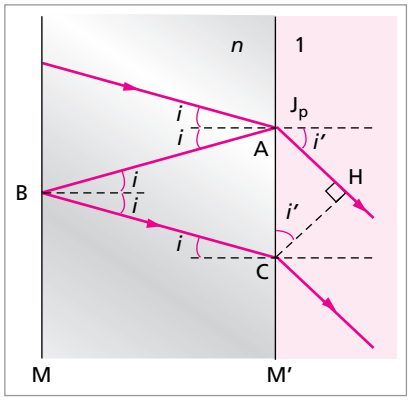
3. On a $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 3{,}14 \cdot 10^{-19}$ J, d'où $\nu_0 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} = 4{,}73 \cdot 10^{14}$ Hz $= 473$ THz et $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu_0} = 633$ nm.

4.a. La différence de marche entre deux rayons consécutifs est :

$$\delta = (\mathrm{AB}) + (\mathrm{BC}) - (\mathrm{AH}) = 2n\mathrm{AB} - \mathrm{AH}$$

(les points A, B, C et H sont définis par la figure). Par des arguments géométriques on obtient : $L = \mathrm{AB}\cos i$; $\mathrm{AC} = 2\mathrm{AB}\sin i$ et $\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin i'$, d'où :

$$\begin{aligned}\delta &= 2n\mathrm{AB} - 2\mathrm{AB}\sin i \sin i' \\ &= 2\frac{L}{\cos i}(n - \sin i \sin i')\end{aligned}$$



La loi de Descartes entraîne : $n\sin i = \sin i'$, d'où : $\delta = 2nL\cos i$. Le déphasage ϕ entre deux rayons consécutifs est donc :

$$\phi = 2\pi\frac{\nu_0}{c}\delta = 4\pi\frac{nL\nu_0}{c}\cos i$$

b. Pour que deux ondes consécutives interfèrent constructivement, il faut que ϕ soit un multiple entier de 2π : $\phi = 2\pi p$ (avec p entier). Les fréquences ν_0 vérifiant cette relation sont :

$$\nu_0 = p\frac{c}{2nL\cos i} = \nu_p$$

5. On a $n = 1$ et $\cos i = 1$, donc les fréquences des modes propres deviennent : $\nu_p = p\dfrac{c}{2L}$. On en déduit : $\Delta\nu_L = \dfrac{c}{2L}$, soit $\Delta\nu_L = 6{,}0 \cdot 10^8$ Hz ≈ 600 MHz pour $L = 0{,}25$ m.

6. La facteur de qualité est défini par $Q = \dfrac{\nu_p}{\Delta\nu_p}$. Donc la largeur d'une raie laser est $\Delta\nu_p = \dfrac{\nu_p}{Q} = 4{,}74 \cdot 10^6$ Hz, soit $\Delta\nu_p \approx 4{,}7$ MHz. Sachant que $\Delta\nu_A = 1\,500$ MHz et $\Delta\nu_L = 600$ MHz (cf. question précédente), on constate que : $\Delta\nu_A > \Delta\nu_L \gg \Delta\nu_p$. Ce laser ne peut amplifier que 3 modes, compte tenu de la compétition entre modes, il sera vraisemblablement monomode.
Pour la question suivante, se reporter au cours, p. 596 à 597.

14

1. LASER signifie « *light amplifier by stimulated emission of radiation* ».

2. On obtient : $\dfrac{n_1}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{E_1 - E_0}{\mathrm{k_b} T}}$.

3. Si $T \to 0$ K, $\dfrac{E_1 - E_0}{\mathrm{k_b} T} \to \infty$ et $\dfrac{n_1}{n_0} \to 0$. Ceci est prévisible, car à $T = 0$ K, tous les atomes sont dans l'état d'énergie minimale (ici E_0). Donc $n_1 = 0$.
Si $T \to \infty$, $\dfrac{n_1}{n_0} \to 1$. Ce rapport ne peut jamais être rigoureusement égal à 1, mais est très proche de 1 dès que $\mathrm{k_b} T \gg E_1 - E_0$.

4. L'énergie du photon est $E = \dfrac{hc}{\lambda} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ J $= 2{,}0$ eV. À la température ambiante $T = 300$ K, on a $\dfrac{n_1}{n_0} = 2{,}7 \cdot 10^{-34}$. Pour avoir une émission continue de lumière, il faut continuellement porter des atomes dans l'état d'énergie E_1. Dans un laser il faut créer une inversion de populations ($n_1 > n_0$).

5. On a $\mathrm{d}N_{1\mathrm{abs}} = +Cu(\nu)N_0\mathrm{d}t$

6.a. C'est l'émission spontanée.

b. On a : $\mathrm{d}N_{1\mathrm{em}} = -AN_1\mathrm{d}t$

7. Les deux processus ayant lieu en même temps, la variation du nombre d'atomes dans l'état d'énergie E_1 pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}N_1 = \mathrm{d}N_{1\mathrm{abs}} + \mathrm{d}N_{1\mathrm{em}}$. Puisqu'on est à l'équilibre, le nombre d'atomes dans l'état excité reste constant, donc $\mathrm{d}N_1 = 0$. On a donc : $Cu(\nu)N_0\mathrm{d}t - AN_1\mathrm{d}t = 0$. D'où le rapport :

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{C}{A}u(\nu)$$

8. Compte tenu de l'expression de $u(\nu)$, on obtient :

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{C}{A}D(\nu)\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{\mathrm{k_b} T}\right) - 1}$$

Ce résultat n'est pas compatible avec la distribution de Maxwell – Boltzmann (cf. question **2.**), car le rapport N_1/N_0 obtenu ici n'a pas la même dépendance en la température T

que la distribution de Maxwell – Boltzmann (attention : ne pas invoquer ici les différences de comportements en ν, car ν est fixé ; on a : $h\nu = E_1 - E_0$. Changer de ν implique changer d'atome, ce qui change aussi les coefficients d'Einstein C et A, qui dépendent de l'atome étudié).

9. On a encore à l'équilibre thermodynamique :

$$\mathrm{d}N_1 = Cu(\nu)N_0\mathrm{d}t - AN_1\mathrm{d}t - Bu(\nu)N_1\mathrm{d}t = 0$$

d'où on déduit :

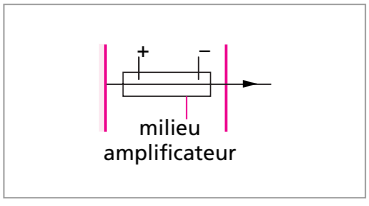
$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{Cu(\nu)}{A + Bu(\nu)} = \frac{C}{B + \dfrac{A}{u(\nu)}} = \frac{C}{B + \dfrac{A}{D(\nu)}\left(\exp\dfrac{h\nu}{k_b T} - 1\right)}$$

A condition que $B = \dfrac{A}{D(\nu)}$, on retrouve la distribution de Maxwell – Boltzmann : $\dfrac{N_1}{N_0} = \dfrac{C}{B}\mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{k_b T}}$ (il faut de plus que $B = C$). La condition est donc $B = \dfrac{A}{D(\nu)} = C$.

10. Les photons émis par le processus d'émission stimulée sont en tout point identiques aux photons incidents (même fréquence, même direction de propagation, même polarisation, même phase).

11. La grande cohérence (temporelle) du laser traduit le fait que la phase ϕ de l'onde électromagnétique qu'il émet évolue linéairement avec le temps pendant des temps longs. On a : $\phi = \omega t + \varphi(t)$ où $\varphi(t)$ ne varie pas pendant des temps de l'ordre du temps de cohérence τ_c. Un laser, ayant une grande cohérence (c'est-à-dire un temps de cohérence long) a aussi une largeur spectrale $\Delta\omega = \dfrac{1}{\tau_c}$ étroite.

12. Le schéma fonctionnel d'un laser est donné sur la figure, dans laquelle on distingue le milieu actif (par exemple un mélange He—Ne), la source d'énergie (en l'occurrence une décharge électrique) et la cavité constituée de 2 miroirs, dont l'un est semi-réfléchissant et laisse passer le faisceau émergent.



13.a. Si $E = 0{,}3$ J est l'énergie transportée par l'impulsion, la puissance moyenne du laser (pendant l'impulsion) est : $P = \dfrac{E}{\tau} = 6 \cdot 10^8$ W $= 600$ MW.

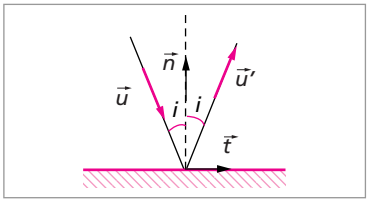
b. Le nombre de photons émis par impulsion est : $n = \dfrac{E}{h\nu} = \dfrac{\lambda}{hc}E \approx 8 \cdot 10^{17}$.

c. L'erreur maximale sur la détermination du temps de vol $T = \dfrac{2l_{TL}}{c}$ est la durée de l'impulsion τ. Donc l'erreur maximale sur la distance Terre – Lune est $\dfrac{c\tau}{2} = 7{,}5$ cm.

d. En calculant la moyenne sur plusieurs mesures, on peut réduire l'incertitude (l'incertitude est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N}}$, où N est le nombre de mesures effectuées).

14.a. Compte tenu des mouvements relatifs de la Terre et de la Lune, le miroir plan ne sera pas orienté de façon à renvoyer le faisceau sur lui-même au moment de l'expérience.

b. Il est possible de donner une forme vectorielle aux lois de la réflexion. Considérons pour cela la réflexion sur un seul miroir. Soit $\vec{u}$ (respectivement $\vec{u}'$) le vecteur unitaire selon la direction du rayon incident (respectivement du rayon réfléchi), et i l'angle d'incidence, égal à l'angle de réflexion (voir figure). Si $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont les vecteurs unitaires normal et tangent au miroir (dans le plan d'incidence), on a :



$$\vec{u} = \sin i\,\vec{t} - \cos i\,\vec{n} \qquad \vec{u}' = \sin i\,\vec{t} + \cos i\,\vec{n}$$

d'où : $\vec{u}' - \vec{u} = 2\cos i\,\vec{n} = -2(\vec{u}\,\vec{n})\vec{n}$. Ainsi :

$$\vec{u}' = \vec{u} - 2(\vec{u}\,\vec{n})\vec{n}$$

Cette relation est utile pour traiter la réflexion sur un coin de cube. Un rayon incident se réfléchit sur les 3 faces. Soient $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ les vecteurs unitaires normaux aux 3 faces (numérotées dans l'ordre des réflexions). Les vecteurs unitaires après une, deux ou trois réflexions sont respectivement :

$$\vec{u_1} = \vec{u} - 2(\vec{u}\,\vec{n_1})\vec{n_1}$$

$$\vec{u_2} = \vec{u_1} - 2(\vec{u_1}\,\vec{n_2})\vec{n_2}$$

$$\vec{u_3} = \vec{u_2} - 2(\vec{u_2}\,\vec{n_3})\vec{n_3}$$

(où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire selon la direction incidente).
Par substitution, on obtient (en utilisant le fait que les 3 miroirs sont orthogonaux deux à deux, donc que les vecteurs $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ sont orthogonaux deux à deux) :

$$\vec{u_1}\,\vec{n_2} = \vec{u}\,\vec{n_2} - 2(\vec{u}\,\vec{n_1})(\vec{n_1}\,\vec{n_2}) = \vec{u}\,\vec{n_2} \qquad (\text{car } \vec{u_1} \perp \vec{u_2})$$

d'où :

$$\vec{u_2} = \vec{u_1} - 2(\vec{u}\,\vec{n_2})\vec{n_2} = \vec{u} - 2(\vec{u}\,\vec{n_1})\vec{n_1} - 2(\vec{u}\,\vec{n_2})\vec{n_2}$$

De même :

$$\vec{u_2}\,\vec{n_3} = \vec{u_1}\,\vec{n_3} = \vec{u}\,\vec{n_3}$$

d'où :

$$\vec{u_3} = \vec{u} - 2[(\vec{u}\,\vec{n_1})\vec{n_1} + (\vec{u}\,\vec{n_2})\vec{n_2} + (\vec{u}\,\vec{n_3})\vec{n_3}]$$

Enfin $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ formant un trièdre, on remarque que, en décomposant $\vec{u}$ sur ce trièdre, on obtient :

$$\vec{u} = (\vec{u}\,\vec{n_1})\vec{n_1} + (\vec{u}\,\vec{n_2})\vec{n_2} + (\vec{u}\,\vec{n_3})\vec{n_3}$$

Finalement :

$$\overrightarrow{u_3} = -\overrightarrow{u}$$

ce qui montre que le rayon lumineux incident, après 3 réflexions, est renvoyé dans la direction exactement opposée à la direction incidente. Cette propriété est indépendante de l'orientation exacte des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$, donc de l'orientation du coin de cube, et par conséquent des déplacements de la Lune.

15.a. On a $\phi = 2\alpha d_{TL} \approx 15$ km.

b. La surface de la Lune éclairée par le faisceau est $\pi\alpha^2 d_{TL}^2 = 177$ km^2. Le nombre de photons arrivant sur le miroir est donc $n' = n\dfrac{s}{\pi\alpha^2 d_{TL}^2} = 4{,}3 \cdot 10^7$ photons par impulsion.

Chapitre 8

Thermodynamique

Ce chapitre présente les principaux résultats de thermodynamique à connaître pour l'écrit du concours : les diagrammes de changements d'état, les propriétés des gaz parfaits, les premier et second principes de la thermodynamique, ainsi que leur application aux machines thermiques, des bases sur la théorie cinétique des gaz parfaits et sur la théorie du transfert de chaleur. Enfin, on trouvera dans le tome 2 consacré à la chimie quelques notions complémentaires dont les définitions du potentiel chimique et des fonctions d'état énergie libre F et enthalpie H. Les exercices sont présentés dans un ordre cohérent avec la progression du cours.

1. Vocabulaire et définitions

1.1. Notion de système thermodynamique
1.2. État d'un système
1.3. Transformations d'un système
1.4. Variables d'état communément utilisées

2. Gaz parfaits

2.1. Définition et équation d'état
2.2. Mélange de gaz parfaits
2.3. Transformations d'un gaz parfait

3. Quelques propriétés des corps purs

3.1. Coefficients thermoélastiques
3.2. Diagramme d'état (P, T) d'un corps pur
3.3. Diagramme (P, V)
3.4. Cas particulier de l'eau

4. Premier principe de la thermodynamique

4.1. Notion d'énergie interne
4.2. Définition énergétique du gaz parfait
4.3. Le 1er principe de la thermodynamique (pour les systèmes fermés)
4.4. Notion d'enthalpie

5. Calcul du travail échangé par un système

5.1. Définition du travail
5.2. Différents types de transformations
5.3. Travail des forces de pression pour une transformation quasi-statique
5.4. Exemples de calcul du travail

6. Calcul de la chaleur échangée par un système
6.1. Coefficients calorimétriques
6.2. Chaleur échangée par des solides ou des liquides
6.3. Chaleur échangée par un gaz parfait
6.4. Changements de phase

7. Détentes de Joule
7.1. Détente de Joule-Gay-Lussac
7.2. Détente de Joule-Thomson

8. Second principe de la thermodynamique
8.1. Notion d'entropie, énoncé du second principe
8.2. Différentielle de l'entropie ; application au cas du gaz parfait
8.3. Bilan entropique
8.4. Diagrammes entropiques

9. Machines thermiques
9.1. Relations fondamentales. Inégalité de Clausius
9.2. Différents types de machines thermiques
9.3. Rendement et efficacité des machines thermiques
9.4. Exemples de fonctionnement de machines frigorifiques
9.5. Moteurs de Carnot

10. Théorie cinétique des gaz parfaits monoatomiques
10.1. Les bases de la théorie
10.2. Propriétés du gaz parfait : interprétation microscopique de la pression et de la température
10.3. Loi de distribution de Maxwell

11. Transferts thermiques
11.1. Aspects phénoménologiques de la diffusion thermique
11.2. Flux de chaleur
11.3. Loi de Fourier
11.4. Les équations de la diffusion thermique

1. Vocabulaire et définitions

1.1. Notion de système thermodynamique

Un **système thermodynamique** est l'ensemble des corps contenus à l'intérieur d'une surface fermée. Le **milieu extérieur** est l'ensemble des corps extérieurs à cette surface, autrement dit tout le reste de l'univers.
Un système est **isolé** quand il n'échange rien avec le milieu extérieur (ni énergie, ni matière).
Un système est **fermé** s'il n'échange pas de matière avec le milieu extérieur (sa masse est donc constante). On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.
Un système thermodynamique peut en général échanger du travail et de la chaleur avec le milieu extérieur. Une **source de chaleur** (ou encore **thermostat**) est un système qui n'échange que de la chaleur, et dont la température reste constante, quelles que soient les quantités de chaleur mises en jeu.

1.2. État d'un système

L'**état** thermodynamique d'un système est décrit par un ensemble de variables appelées **variables d'état**, **paramètres d'état** ou encore **grandeurs d'état**.

> ***Exemple :*** le volume V, la température T, la pression P, la masse m sont des variables d'état.

Les variables d'état ne sont, en général, pas toutes indépendantes. Il est parfois possible de mettre en évidence une relation, vérifiée par les variables d'états, appelée **équation d'état**.
Une variable d'état est **extensive** quand elle dépend de la taille du système et de la quantité de matière (masse, volume..). Sinon la variable est **intensive** (température, pression, masse volumique..).

Définition : Un système est en équilibre lorsque toutes ses variables d'états restent constantes tant que les conditions extérieures restent inchangées.

Cela implique, en particulier, que le système est à l'équilibre thermique : la température est homogène en tout point du système, et il n'y a pas d'échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur.

Définition : Soit X une grandeur thermodynamique. On dit que X est une fonction d'état, si elle ne dépend que des variables d'état.

La variation de X entre un état initial d'équilibre donné (i) du système et un état final d'équilibre donné (f) ($\Delta X = X_\mathrm{f} - X_\mathrm{i}$) ne dépend pas du « chemin suivi » pendant l'évolution du système, mais seulement de l'état initial et de l'état final considérés.

1.3. Transformations d'un système

Une **transformation thermodynamique** est l'évolution d'un système sous l'action de contraintes externes et/ou internes d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final.

Une transformation **adiabatique** est une transformation sans échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur.
Une transformation **isobare** est une transformation telle que la pression du système reste constante.
Une transformation **isotherme** est une transformation telle que la température du système reste constante.
Une transformation **isochore** est une transformation telle que le volume du système reste constant.
On dit qu'un système subit un **cycle de transformations** quand son état final est identique à son état initial.

1.4. Variables d'état communément utilisées

Dans le système international d'unités (SI), la **masse** d'un système est exprimée en kg et son **volume** en m^3. La **température** d'un système est notée T ou t suivant le système d'unité utilisé (t pour le degré Celsius, et T pour le kelvin K). L'unité de température SI est le K. La température exprimée en K (appelée encore température absolue) est liée à t par la relation :

$$t = T - 273{,}15$$

La **pression** P exercée par un fluide (gaz ou liquide) **sur une paroi** en un point A , est donnée par :

$$P = \mathrm{d}F/\mathrm{d}S$$

où $\mathrm{d}S$ est une surface élémentaire autour du point A, et $\mathrm{d}F$ la norme de la force élémentaire exercée par le fluide sur cette surface élémentaire. Pour un fluide parfait (non visqueux), la direction de cette force est toujours normale à la surface élémentaire.
La pression en un point A quelconque du fluide (non nécessairement sur une paroi) est définie de la même façon, en imaginant une paroi fictive autour du point A.
L'unité de pression du SI est le pascal. 1 Pa = 1 pascal = $1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Il faut également connaître 1 bar = 10^5 Pa ; 1 atm($\sim$ 1 bar) = $1{,}013\cdot10^5$ Pa = la pression atmosphérique ; 1 mm Hg = 1 torr (de Torricelli) = la pression due à une colonne de 1 mm de Hg (1 atm = 760 torr).

• **Équation fondamentale de la statique des fluides**
Soit un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y, \mathrm{O}z)$ orientant l'espace, avec **O*z* verticale ascendante.** Le saut de pression $\mathrm{d}P$ lorsque l'on passe de l'altitude z à l'altitude $(z + \mathrm{d}z)$ est donné par :

$$\mathrm{d}P = P(z + \mathrm{d}z) - P(z) = -\rho(z)\, g\, \mathrm{d}z$$

où $\rho(z)$ est la masse volumique du fluide à l'altitude z et g l'accélération de la pesanteur. Cette relation est appelée « équation fondamentale de la statique des fluides » et est démontrée dans l'exercice 1. Dans le cas où $\rho(z)$ est une fonction constante, on peut intégrer cette relation et on a $\forall(z, z_0)$:

$$P(z) = P(z_0) + \rho g(z_0 - z)$$

➜ **Voir exercices 1 à 8**

2. Gaz parfaits

2.1. Définition et équation d'état

Un gaz est dit parfait, lorsque les molécules (ou atomes) qui le constituent peuvent être considérées comme **ponctuelles**, et lorsqu'il n'y a **pas de force d'interaction entre les molécules**. En fait, dans les **gaz réels**, il existe au moins une force d'interaction entre les molécules (la force de Van der Waals), attractive si les molécules sont identiques, et qui varie en $1/r^6$, où r représente la distance entre deux molécules.

Loi de Boyle-Mariotte : Lorsqu'un gaz parfait est à l'équilibre, la pression est homogène et vérifie :

$$PV = nRT$$

où P est la pression du gaz, V son volume, T la température, n le nombre de moles et R la constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ J \cdot mol^{-1}.K^{-1}$.

Cette loi constitue **l'équation d'état** d'un gaz parfait. Si le système est fermé ($n = $ cste) alors seulement deux des variables d'état P, V, T sont indépendantes. On dit que le système est **divariant**. Le comportement des gaz réels est en général assez bien décrit par l'équation d'état, dite « de van der Waals » $\left(P + \dfrac{A}{V^2}\right)(V - B) = nRT$, où A et B sont des constantes, relatives respectivement aux interactions entre les molécules du gaz, et au volume propre occupé par une molécule.

2.2. Mélange de gaz parfaits

On considère un mélange de plusieurs gaz parfaits. Soit n_i le nombre de moles du i-ème gaz G_i. Une fois l'équilibre atteint, le mélange a un volume total V, une pression P, une température T et un nombre total de moles de gaz $n = \sum_i n_i$. La pression partielle P_i du gaz G_i, est la pression qu'il aurait s'il occupait seul le volume V. Elle vérifie $P_i V = n_i RT$.

Loi de Dalton : La pression totale d'un mélange de gaz parfaits est égale à la somme des pressions partielles des constituants du mélange :

$$P = \sum_i P_i$$

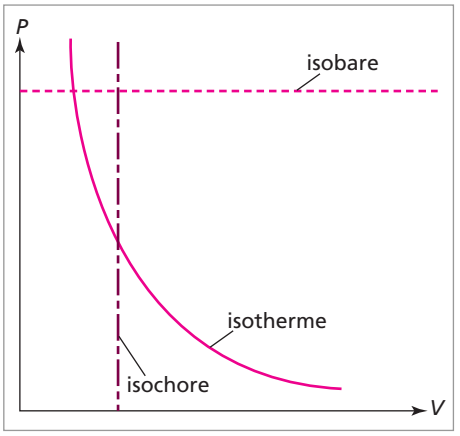
Soit encore $P = \sum_i n_i \mathrm{R}\frac{T}{V} = \left(\sum_i n_i\right) \mathrm{R}\frac{T}{V} = n\mathrm{R}\frac{T}{V} \Rightarrow PV = n\mathrm{R}T$. Un mélange de gaz parfaits vérifie donc également la loi des gaz parfaits.

On définit la fraction molaire du i-ème constituant d'un mélange de gaz par $\boxed{x_i = \frac{n_i}{n}}$.

Il est facile de montrer que $\boxed{P_i = x_i P}$.

2.3. Transformations d'un gaz parfait

Les transformations peuvent être représentés dans différents diagrammes. Le plus utilisé est le diagramme (P, V), ou **diagramme de Clapeyron**.



➜ **Voir exercices 1 à 7.**

3. Quelques propriétés des corps purs

3.1. Coefficients thermoélastiques

Le **coefficient de dilatation à pression constante** :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

caractérise les propriétés de dilatation d'un corps pur. En général, à température ambiante α est de l'ordre de 10^{-6} K^{-1} à 10^{-5} K^{-1} pour les solides, et de 10^{-4} K^{-1} à 10^{-3} K^{-1} pour les liquides, qui se dilatent plus facilement.

Le **coefficient d'augmentation de pression à volume constant** est :

$$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Le **coefficient de compressibilité isotherme** est :

$$\chi_T = \frac{-1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

Remarque : tous les systèmes fermés constitués d'un corps pur en phase homogène sont divariants (deux variables d'état indépendantes) ; il est donc possible (au moins théoriquement) d'exprimer une variable d'état comme une fonction des deux autres (par exemple $V(T,P)$ ou $P(T,V)$) et de calculer les coefficients thermoélastiques.

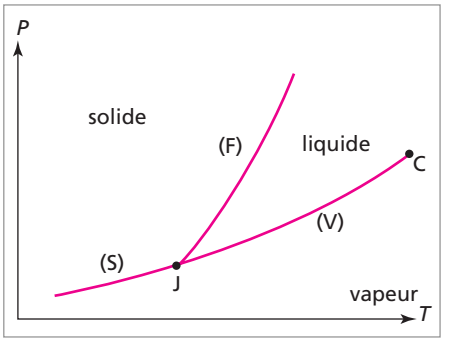
Pour un gaz parfait, l'équation d'état $PV = nRT$ permet de montrer que $\alpha = \beta = \dfrac{1}{T}$ et $\chi_T = \dfrac{1}{P}$.

3.2. Diagramme d'état (P, T) d'un corps pur

Il s'agit de diagrammes permettant de préciser l'état (solide, liquide ou gazeux) dans lequel se trouve le corps pur en fonction des valeurs de (P, V, T).

• **Allure d'un diagramme (P, T)**

Pour tout corps pur autre que l'eau, on a l'allure générale ci-contre. Les trois courbes (S), (F) et (V) portent le nom du changement d'état qui leur est associé. Par exemple, la transformation (solide → liquide) est la fusion (solidification pour l'inverse) donc (F) est la courbe de fusion. La transformation (solide → gaz) est la sublimation (condensation pour l'inverse). La transformation (liquide → gaz) est la vaporisation (liquéfaction pour l'inverse).



Au **point triple J**, les trois phases (solide, liquide, vapeur) coexistent.

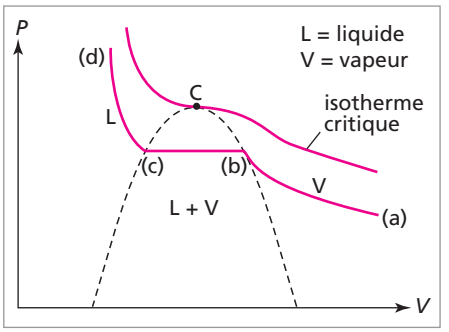
Remarque fondamentale : les changements d'état sont des transformations isobares et isothermes.

La courbe de vaporisation est limitée par un point C, dit **point critique**. Au-delà de ce point, il n'est pas possible de distinguer une phase liquide et une phase vapeur.

3.3. Diagramme (P, V)

On se limite aux phases liquide et vapeur. Lorsqu'on effectue la compression isotherme d'une certaine quantité de gaz, on augmente la pression en se déplaçant sur une courbe du type (a,b,c,d).

• Sur la branche [a,b] la vapeur est dite **vapeur sèche** ou **non saturée.**

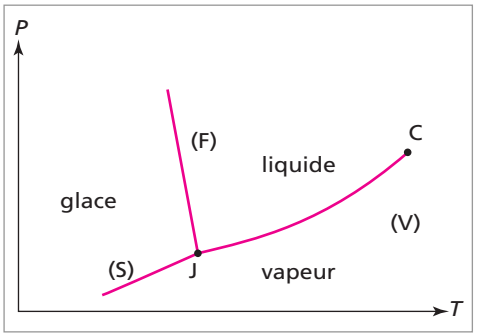


• En b, la vapeur est dite **vapeur saturée** ou **humide,** la première goutte de liquide apparaît.
• Sur la branche [b,c], **palier de saturation** ou **palier de liquéfaction**, a lieu le changement de phase.
• En c, le **liquide** est **saturé**, il n'y a plus de gaz.
• La pression à laquelle a lieu le changement de phase est la **pression de vapeur saturante**.
La courbe (S), qui détermine les points (b) et (c), est appelée **courbe de saturation**. Lorsque l'on réalise une compression isotherme à une température plus élevée, les points (b) et (c) se déplacent vers le haut sur (S), réduisant ainsi la largeur du palier de saturation. Lorsque l'on atteint la température critique T_C, le palier est réduit au point critique C déjà mentionné et cette isotherme critique présente un point d'inflexion avec une tangente horizontale en C.

3.4. Cas particulier de l'eau

L'eau est le seul corps pur pour lequel la courbe (F) du diagramme (P, T) présente une pente négative. On verra plus loin, avec la relation de Clapeyron, quelles sont les implications d'une telle situation. Le point triple est obtenu pour $T_J = 273{,}16$ K et $P_J = 611$ Pa. Le point critique est caractérisé par $T_c = 374$ °C et $P_c = 217$ atm.

➜ **Voir exercices 2, 3, 7.**



4. Premier principe de la thermodynamique

4.1. Notion d'énergie interne

Tout système thermodynamique possède en plus de son énergie mécanique (associée au mouvement d'ensemble du système) une énergie, **notée *U***, appelée **énergie interne**, qui résulte du mouvement interne des molécules constituant le système et des interactions entre elles. L'énergie interne est une **fonction d'état** (qui ne dépend que des paramètres d'état). L'**unité** de U est le joule J.
Dans la majorité des cas, les systèmes thermodynamiques considérés sont divariants et donc U est une fonction de deux variables d'état.

Remarque : on choisit le plus souvent d'utiliser le volume V et la température T : $U(T,V)$.

4.2. Définition énergétique du gaz parfait

Loi de Joule (première) : pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. On la note $U(T)$.

> ***Remarque :*** cette loi se comprend bien en constatant que pour un gaz parfait, U est simplement la somme de toutes les énergies cinétiques des molécules du gaz. En effet, le mouvement de ces molécules est dû uniquement à de l'agitation thermique, puisqu'il n'y a pas d'interaction entre elles.

On définit la **chaleur molaire** à volume constant c_v (ou encore capacité calorifique molaire à volume constant) d'un gaz par :

$$c_v = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$$

où U est l'énergie interne **d'une mole** du gaz parfait. Pour ***n* moles**, on a donc :

$$\boxed{\mathrm{d}U = nc_v\mathrm{d}T}$$

c_v s'exprime en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ (l'origine du nom se comprendra en 6.2).
c_v est une fonction d'état, qui a priori peut dépendre de la température. Le plus souvent c_v peut être considéré comme une constante, et l'on peut aisément calculer la variation d'énergie interne d'un gaz parfait, lorsqu'il constitue un système fermé (n constant) ; pour une transformation macroscopique entre un état initial (i) et un état final (f) :

$$\Delta U = U_f - U_i = \int_i^f \mathrm{d}U = \int_i^f nc_v\mathrm{d}T = nc_v\Delta T$$

4.3. Le 1er principe de la thermodynamique (pour les systèmes fermés)

Énoncé usuel en thermodynamique : On considère un système fermé à l'équilibre dans un état initial caractérisé par les grandeurs d'état P_i, V_i, T_i,..., qui subit une (plusieurs) transformation(s) thermodynamique(s) à l'issue de laquelle (desquelles) il se trouve dans un état d'équilibre final caractérisé par P_f, V_f, T_f. Sa variation d'énergie interne dans cette transformation $\Delta U = U_f - U_i$ est donnée par :

$$\boxed{\Delta U = W + Q}$$

où W est le travail total échangé par le système avec le milieu extérieur pendant la (ou les) transformation(s) et Q la chaleur totale échangée par le système avec le milieu extérieur pendant la (ou les) transformation(s).
U est une fonction d'état, ΔU ne dépend que de l'état initial et de l'état final considérés. En revanche, W et Q dépendent du « chemin suivi », et ne sont pas des fonctions d'état. On note donc δW et δQ le travail et la chaleur échangés lors d'une transformation élémentaire, et non $\mathrm{d}W$ et $\mathrm{d}Q$.

Énoncé le plus général : L'énergie totale d'un système fermé est égale à la somme de son énergie mécanique et de son énergie interne : $E_{\text{totale}} = U + E_{\text{méca}}$. En toute rigueur le premier principe s'écrit donc $\Delta E_{\text{totale}} = W + Q$. Or $E_{\text{méca}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{p}}$, où E_{cin} désigne l'énergie cinétique et E_{p} l'énergie potentielle. La plupart des systèmes considérés sont au repos, et ne sont soumis à aucun potentiel particulier, on retrouve donc la forme usuelle du premier principe, énoncée ci-dessus.

Conséquence fondamentale du premier principe : Lorsque le système subit un **cycle de transformations**, on a :

$$W + Q = 0$$

Les calculs de W et Q sont détaillés dans les parties **5** et **6**. Notons déjà qu'il est en général nécessaire, pour calculer W et Q, de décomposer la transformation considérée en une succession de transformations élémentaires pendant lesquelles le système échange une quantité de chaleur élémentaire notée δQ avec le milieu extérieur, ainsi qu'une quantité de travail élémentaire notée δW. On a bien sûr, lors d'une transformation élémentaire, $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$ et les quantités de chaleur et de travail totales échangées durant la transformation sont :

$$W = \int_i^f \delta W \qquad \text{et} \qquad Q = \int_i^f \delta Q$$

De même, la variation totale d'énergie interne est :

$$\Delta U = \int_i^f \mathrm{d}U$$

4.4. Notion d'enthalpie

Définition : À tout système thermodynamique (non nécessairement un gaz parfait), il est possible d'associer une nouvelle fonction d'état, l'enthalpie, notée H :

$$H = U + PV$$

L'**unité** de H est également le joule J.

• Enthalpie du gaz parfait

Loi de Joule (deuxième) : l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de la température. On la note $H(T)$.

On définit la **chaleur molaire à pression constante** (ou capacité calorifique molaire à pression constante) par :

$$c_{\text{P}} = \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right)_P$$

où H est l'enthalpie d'une mole de gaz. Pour ***n* moles** de gaz parfait, la variation élémentaire de l'enthalpie lors d'une transformation élémentaire est donc :

$$\boxed{\mathrm{d}H = nc_P\mathrm{d}T}$$

Et, pour une transformation macroscopique entre un état initial i et un état final f : $\Delta H = \int_i^f \mathrm{d}H = \int_i^f nc_P\mathrm{d}T$. Le coefficient $\boldsymbol{c_P}$ est a priori une fonction d'état, mais dans de nombreux cas, il peut être considéré comme constant :

$$\boxed{\Delta H = nc_P\Delta T}$$

• Relation de Mayer pour un gaz parfait
On retiendra la relation de Mayer :

$$\boxed{c_P - c_V = R}$$

La démonstration de cette relation est vue dans l'exercice 4.

• Valeurs des chaleurs molaires et coefficient caractéristique γ
On définit souvent un coefficient caractéristique du gaz parfait :

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

La donnée de γ suffit pour calculer c_P et c_V. En effet, $c_P = \gamma c_V \Rightarrow \gamma c_V - c_V = R$:

$$\boxed{c_V = \frac{R}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}}$$

D'après la théorie cinétique des gaz parfaits (cf. partie 10), on utilise en général les valeurs suivantes :

– pour un **gaz parfait monoatomique** : $\boxed{c_V = \frac{3}{2}R}$ et donc $c_P = \frac{5}{2}R$ et $\gamma = \frac{5}{3}$.

– pour un **gaz parfait diatomique** : $\boxed{c_V = \frac{5}{2}R}$ et donc $c_P = \frac{7}{2}R$ et $\gamma = \frac{7}{5}$.

• Une signification physique de l'énergie interne et de l'enthalpie
On retiendra les deux propriétés suivantes :
• Dans une transformation à volume constant, la quantité de chaleur échangée par un système fermé est égale à sa variation d'énergie interne $\boxed{\Delta U = Q_V}$.

En effet, pour une transformation quelconque on a $\Delta U = W + Q$. Si de plus la transformation est isochore on a $W = 0$ (voir partie 5), donc $\Delta U = Q_V$.

• **Dans une transformation à pression constante, la quantité de chaleur échangée par un système fermé est égale à sa variation d'enthalpie** $\Delta H = Q_P$ **.**

De même, $\Delta U = W + Q$. Donc, $\Delta H = W + Q + \Delta(PV)$. La transformation est isobare donc $\Delta(PV) = P\Delta V \Rightarrow \Delta H = W + Q + P\Delta V$, par ailleurs la transformation est isobare, donc $W = -P\Delta V$ (voir partie 5) $\Rightarrow \Delta H = Q_P$.

➜ **Voir exercices 2 à 6 et 8.**

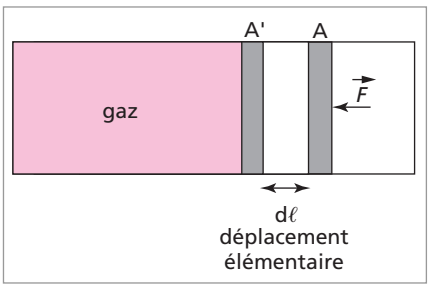
5. Calcul du travail échangé par un système

Convention de signe : en thermodynamique, on applique la convention suivante à toutes les grandeurs énergétiques échangées par un système :
– tout ce qui est **reçu** par le système est **positif ;**
– tout ce qui est **fourni** par le système est **négatif**.

5.1. Définition du travail

Soit $\overrightarrow{F}$ la force extérieure appliquée sur le système. Pour un déplacement élémentaire (au cours d'une transformation élémentaire subie par le système) $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ du point d'impact de cette force, le **travail élémentaire** est donné par $\delta W = \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$.

En général pour les systèmes thermodynamiques que l'on considérera, les forces extérieures se limitent aux forces de pression.
On se place dans le cas particulier du gaz comprimé avec une force $\overrightarrow{F}$ par l'intermédiaire d'un piston. On considère une transformation élémentaire du gaz correspondant au déplacement $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}'$, soit un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ du piston, dans le sens comprimant le volume du gaz.



$$\delta W = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\right\| = P_{\text{ext}} S \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\right\| = P_{\text{ext}}\mathrm{d}V_{\text{ext}} = -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V_{\text{gaz}} \Rightarrow \boxed{\delta W = -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V}$$

où P_{ext} désigne la pression extérieure agissant sur le piston, S la surface du piston, $\mathrm{d}V_{\text{ext}}$ la variation de volume du milieu extérieur au gaz et $\mathrm{d}V$ la variation de volume du gaz.

Cette formulation $\delta W = -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V$ **est en fait générale** et s'applique pour tous les systèmes et tous les types de variation de volume.

5.2. Différents types de transformations

Il est possible, pour les transformations quasi-statiques, de remplacer P_{ext} par P (pression du système) dans la relation $\delta W = -P_{ext}\mathrm{d}V$, et ainsi d'exprimer δW à l'aide des variables d'état du système. Les définitions suivantes sont à retenir.

• Transformation quasi-statique

Une transformation est quasi-statique si le système passe de son état initial à son état final par une succession d'états infiniment proches d'un état d'équilibre. Dans ce cas, les variables d'état P, V, T sont bien définies pendant la transformation et varient continûment.

• Transformation réversible

Une transformation réversible est une transformation quasi-statique dont on peut inverser le sens à tout moment, grâce à une modification infinitésimale (= élémentaire) des conditions extérieures. **Conséquence** : toute transformation réversible est quasi-statique (réciproque fausse).

• Transformation irréversible

C'est une transformation qui ne répond pas au critère précédent (donc non réversible). Notamment, lorsque les états intermédiaires (entre l'état initial et l'état final) de la transformation ne sont pas des états d'équilibre (transformation brutale par exemple), alors la transformation est irréversible. Parmi les phénomènes physiques à l'origine d'irréversibilité, on peut citer les frottements (solides ou fluides), et les déplacements de matière dus à des hétérogénéités spatiales de concentration. Plus généralement, presque toutes les transformations **naturelles ou spontanées** sont des transformations irréversibles.

Un bon **critère** pour reconnaître une grande partie des transformations irréversibles : on ne peut imaginer la transformation s'effectuant en sens inverse (goutte d'encre dans l'eau).

5.3. Travail des forces de pression pour une transformation quasi-statique

Dans le cas d'une transformation quasi-statique, à tout moment le système est en équilibre avec le milieu extérieur, donc $P = P_{ext}$, et le travail élémentaire échangé est $\boxed{\delta W = -P\mathrm{d}V}$. De même pour l'ensemble de la transformation amenant le système d'un état initial (i) à un état final (f), le travail total est $\boxed{W = \int_i^f -P\mathrm{d}V}$.

5.4. Exemples de calcul du travail

• Transformation non quasi-statique

$W = \int_i^f -P_{ext}\mathrm{d}V$. Dans le cas fréquent où la pression extérieure est constante, on a simplement $W = -P_{ext}\Delta V = -P_{ext}(V_f - V_i)$.

• **Transformation quasi-statique**

– Transformation **isochore** ($\mathrm{d}V = 0$) : $W = \int_i^f -P\mathrm{d}V = 0.$

– Transformation **isobare** : $W = \int_i^f -P\mathrm{d}V = -P\Delta V.$

– Transformation **isotherme** d'un gaz parfait, à nombre de moles constant :

$$W = \int_i^f -P\mathrm{d}V = \int_i^f -\frac{n\mathrm{R}T}{V}\mathrm{d}V = -n\mathrm{R}T\int_i^f \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$W = -n\mathrm{R}T\,[lnV]_i^f = -n\mathrm{R}Tln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

- Transformation **adiabatique** : *cf.* p. 650.

➜ **Voir exercices 2 et 4 à 6.**

6. Calcul de la chaleur échangée par un système

Dans la suite, on considérera un système fermé, de masse m, divariant.

6.1. Coefficients calorimétriques

Il est possible pour une transformation élémentaire du système, d'exprimer la quantité de chaleur élémentaire δQ échangée par le système en fonction des variables d'état (P, V, T). Suivant le jeu de variables choisi, on a l'une des trois expressions suivantes (équivalentes) :

$$\delta Q = mc_V\mathrm{d}T + m\ell\mathrm{d}V\,; \qquad \delta Q = mc_P\mathrm{d}T + mh\mathrm{d}P\,; \qquad \delta Q = m\mu\mathrm{d}V + m\lambda\mathrm{d}P$$

où c_V est la chaleur massique à volume constant
c_P est la chaleur massique à pression constante
ℓ est la chaleur latente de dilatation
h est la chaleur latente d'augmentation de pression
μ est la chaleur massique de dilatation à pression constante
λ est la chaleur massique d'augmentation de pression à volume constant.

Ces six grandeurs, appelées **coefficients calorimétriques**, sont a priori des fonctions d'état (dépendant des variables d'état). On peut définir également de façon analogue des coefficients molaires (désignés souvent par les mêmes notations, c_V, c_P, ...).

En pratique, ces coefficients calorimétriques sont très peu utilisés. Pour calculer la chaleur échangée par un système, on procèdera comme suit, en distingant deux cas : le cas des solides/liquides et le cas des gaz parfaits.

6.2. Chaleur échangée par des solides ou des liquides

• **Expression de la chaleur échangée**

Les solides et liquides se dilatant relativement peu (par comparaison aux gaz), on peut en général considérer que leur volume reste constant. Il suffit donc d'un seul coefficient

calorimétrique dans ce cas pour décrire δQ, appelé simplement chaleur massique (ou chaleur spécifique, ou capacité calorifique) et noté c :

$$\boxed{\delta Q = mc\mathrm{d}T}$$

on a $c \approx c_V \approx c_P$. c s'exprime en $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ et peut dépendre de la température.
Pour une transformation macroscopique entre un état initial (i) et un état final (f), on a $Q = \int_i^f \delta Q = \int_i^f mc(T)\,\mathrm{d}T$. Dans le cas fréquent où c peut être considéré comme constant :

$$\boxed{Q = mc\Delta T}$$

• Calorimétrie
Une expérience de calorimétrie consiste à mettre en contact plusieurs corps de température initiale T_i, de masse m_i et de chaleur massique c_i. À l'équilibre thermique, une température finale T_f, commune à tous les corps, est atteinte. Lorsque les corps sont placés dans un calorimètre (enceinte adiabatique) on peut alors écrire $\boxed{\sum_i Q_i = 0}$, où Q_i est la chaleur échangée par chacun des corps, soit encore $\sum_i m_i c_i \left(T_f - T_i\right) = 0$, s'il n'y a pas de changement de phase. Cette relation (qui suppose que le calorimètre ne participe pas aux échanges de chaleur) permet éventuellement de déterminer l'une des capacités calorifiques mise en jeu.

6.3. Chaleur échangée par un gaz parfait

• Expression de la chaleur échangée
Dans le cas du gaz parfait, la variation élémentaire d'énergie interne s'écrit :

$$\mathrm{d}U = nc_V\mathrm{d}T$$

Le plus simple pour exprimer δQ est donc d'utiliser le premier principe : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$.
S'il s'agit d'une **transformation quasi-statique**, on a donc :

$$\boxed{\delta Q = nc_V\mathrm{d}T + P\mathrm{d}V}$$

Il apparaît donc que pour le gaz parfait, $\ell = P$.
Pour une **transformation macroscopique** entre un état d'équilibre initial i et un état d'équilibre final f , la chaleur totale échangée est :

$$\boxed{Q = \Delta U - W}$$

• Transformations adiabatiques quasi-statiques du gaz parfait

Loi de Laplace : pour une transformation adiabatique quasi-statique d'un gaz parfait, on a :

$$PV^{\gamma} = \text{cste}$$

Démonstration : à chaque instant de la transformation $\delta Q = 0$, donc $\mathrm{d}U = \delta W$ soit $nc_V \mathrm{d}T + P\mathrm{d}V = 0$. En divisant par T : $nc_V \dfrac{\mathrm{d}T}{T} + \dfrac{P}{T}\mathrm{d}V = 0$ donc

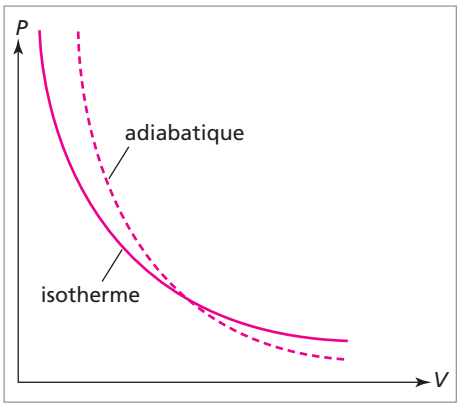
$$nc_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{n\mathrm{R}}{V}\mathrm{d}V = 0 \qquad \text{ou} \qquad c_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

$c_V \mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\, T) + \mathrm{R}\,\mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\, V) = 0$ donc

$$\frac{\mathrm{R}}{\gamma - 1}\mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\, T) + \mathrm{R}\,\mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\, V) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\, T) + (\gamma - 1)\,\mathrm{d}(\ell\mathrm{n}\, V) = 0$$

alors $\mathrm{d}\left(\ell\mathrm{n}\left(TV^{\gamma-1}\right)\right) = 0$ et donc $\ell\mathrm{n}\left(TV^{\gamma-1}\right) = \text{cste} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cste}$ ou encore en utilisant la loi de Boyle-Mariotte, $PV^{\gamma} = \text{cste}$.

L'allure de la représentation d'une transformation adiabatique dans un diagramme de Clapeyron est montrée ci-contre. L'isotherme décroît en $\dfrac{1}{V}$ tandis que l'adiabatique décroît en $\dfrac{1}{V^{\gamma}}$.



Le calcul du travail échangé pour une adiabatique quasi-statique, par la méthode directe donne :

$$W = \int_i^f -P\mathrm{d}V = \int_i^f -\frac{\mathrm{K}}{V^{\gamma}}\mathrm{d}V$$

$$= -\mathrm{K}\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_i^f = \frac{\mathrm{K}}{\gamma - 1}\left[V_f^{-\gamma+1} - V_i^{-\gamma+1}\right]$$

où K est la constante telle que $PV^{\gamma} = \mathrm{K}$.
Or on a $\mathrm{K} = P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma}$, donc :

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}\left[P_f V_f - P_i V_i\right]$$

En pratique, il est beaucoup plus simple d'utiliser le premier principe pour retrouver ce résultat $\Delta U = W + Q \Rightarrow W = \Delta U$
Donc $W = nc_V \Delta T = n\dfrac{\mathrm{R}}{\gamma - 1}\Delta T = \dfrac{1}{\gamma - 1}\left(P_f V_f - P_i V_i\right)$.

6.4. Changements de phase

• Expression de la chaleur échangée

La chaleur échangée par un système fait en général varier sa température (ainsi que les autres variables d'état) mais peut également provoquer un changement de phase. Dans ce cas, la chaleur échangée sert uniquement à effectuer le changement de phase : pendant toute la transformation, la température reste constante (et la pression également).
La quantité de chaleur échangée par un système de masse m pendant le changement de phase est :

$$Q = mL$$

où L est la **chaleur latente massique de transformation** (c'est une grandeur caractéristique du système et de la transformation). Elle s'exprime en $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

> ***Remarque :*** quelquefois c'est la **chaleur molaire** de transformation qui est utilisée L_M : $Q = nL_\mathrm{M}$, où n est le nombre de moles du système. L_M s'exprime en $\mathrm{J \cdot mol^{-1}}$.

Pour la **fusion**, L s'appelle la chaleur latente de fusion et est notée L_f. On a toujours $L_f \geqslant 0$. Pour la **vaporisation,** L s'appelle la chaleur latente de vaporisation et est notée L_V. On a toujours $L_\mathrm{V} \geqslant 0$.

> ***Exemple :*** Pour l'eau $L_f = 334{,}4\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ et $L_\mathrm{V} = 2\,245\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

• Relation au point triple

Au point triple T, on obtient la relation entre les chaleurs latentes L_f, L_V et L_C respectivement associées aux changements d'état solide→liquide, liquide→gaz et gaz→solide :

$$L_f + L_\mathrm{V} + L_\mathrm{C} = 0$$

• Relation de Clapeyron

La relation de Clapeyron relie la chaleur latente de changement d'état $L_{1\to2}$, faisant passer d'un état 1 à un état 2, à la pente de la courbe d'équilibre de changement d'état séparant les deux états sur un diagramme (P, T) :

$$L_{1\to2} = T\,(u_2 - u_1)\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{équilibre}}$$

$\left(\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{équilibre}}$ est la pente de la courbe calculée le long de la courbe séparant les deux états 1 et 2, courbe qui correspond à l'équilibre entre les deux états. T est la température et u_1 et u_2 sont les volumes massiques du système respectivement dans l'état 1 et l'état 2.

Application au cas de l'eau : on considère la transformation de fusion glace→eau liquide. La chaleur latente de cette transformation est positive. Par ailleurs, contrairement aux autres corps, la masse volumique du solide (glace) est inférieure à la masse volumique du liquide donc on a $u_1 > u_2$. Pour l'eau, la pente de la courbe de fusion $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{équilibre}}$ est donc négative. D'où l'allure particulière du diagramme (P, T) de l'eau (p. 642).

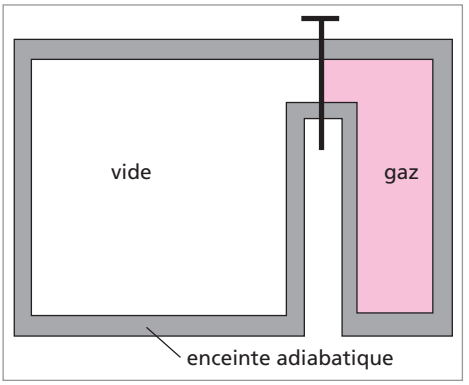
➜ **Voir exercices 2, 3, 5, 6 et 8.**

7. Détentes de Joule

Les expériences décrites permettent de déterminer dans quelle mesure un gaz peut être considéré comme parfait ou non.

7.1. Détente de Joule-Gay-Lussac

Expérience : On dispose de deux compartiments (1 et 2) équipés de **parois rigides et adiabatiques**, initialement séparés par un robinet fermé. Le compartiment 1 contient le gaz et le compartiment 2 est vide. On mesure T_i la température initiale du gaz. On ouvre le robinet. Le gaz diffuse de façon à remplir la totalité du volume disponible (les deux compartiments). La détente est irréversible. On mesure la température finale du gaz T_f.

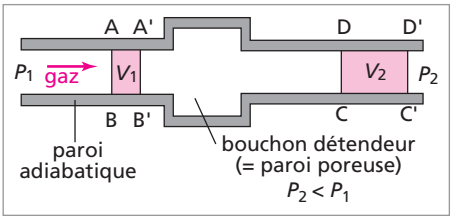


Propriétés : Dans une détente de Joule–Gay-Lussac, l'énergie interne du gaz (quelconque) se conserve. Le gaz est parfait si et seulement si $T_i = T_f$ (quel que soit le volume du compartiment 2).

Démonstration : $\Delta U = W + Q$, où $Q = 0$ (parois adiabatiques) et $W = \int -P_{\text{ext}} dV$. Or dans le vide $P_{\text{ext}} = 0$, donc $\Delta U = 0$ et U se conserve.
($\Rightarrow$) Supposons le gaz parfait, on a $\Delta U = nc_V \Delta T$. Or $\Delta U = 0$ donc $T_f = T_i$.
($\Leftarrow$) Supposons $T_f = T_i$. $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$, $dT = 0$ (on imagine une « petite » détente du gaz), donc $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = 0$ comme $dV \neq 0$, on a $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \Rightarrow U(T)$.

7.2. Détente de Joule-Thomson

Expérience : on alimente en gaz une conduite, aux parois adiabatiques, de façon à obtenir un régime permanent. Un « détendeur » est placé sur la conduite. On mesure les températures T_1 et T_2 du gaz respectivement avant et après la détente.



Propriétés : dans une détente de Joule-Thomson, l'enthalpie d'un gaz (quelconque) se conserve. Le gaz est parfait si et seulement si $T_1 = T_2$.

Démonstration : on considère une tranche de gaz ABCD à l'instant t. À $(t + \mathrm{d}t)$ cette tranche s'est déplacée et est devenue A′B′C′D′. On veut montrer que $H_{\mathrm{ABCD}} = H_{\mathrm{A'B'C'D'}}$, soit encore $H_{\mathrm{ABA'B'}} + H_{\mathrm{A'B'CD}} = H_{\mathrm{A'B'CD}} + H_{\mathrm{CDC'D'}}$, ou encore $H_{\mathrm{ABA'B'}} = H_{\mathrm{CDC'D'}}$. Bilan énergétique pour la tranche ABCD :

– travail reçu par ABCD poussé par P_1 : $W = \int -P_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}V = P_1V_1$

– travail fourni par ABCD qui travaille contre P_2 : $W = \int -P_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}V = -P_2V_2$

Donc le travail total est $W = P_1V_1 - P_2V_2$. Par ailleurs $Q = 0$ (parois adiabatiques) donc $\Delta U = P_1V_1 - P_2V_2$ soit :

$$U_{\mathrm{CDC'D'}} - U_{\mathrm{ABA'B'}} = P_1V_1 - P_2V_2 \Rightarrow U_{\mathrm{ABA'B'}} + P_1V_1 = U_{\mathrm{CDC'D'}} + P_2V_2$$

et donc $H_{\mathrm{ABA'B'}} = H_{\mathrm{CDC'D'}}$. H est conservé dans la détente.

($\Rightarrow$) Supposons le gaz parfait. $\Delta H = nc_P\Delta T$, or $\Delta H = 0$
donc $T_1 = T_2$.

($\Leftarrow$) Supposons la température constante. Si H dépend aussi de P, on a :

$$\mathrm{d}H = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P$$

pour $\mathrm{d}T = 0$, il vient $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P = 0$ avec $\mathrm{d}P \neq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0 \Rightarrow H\,(T)$.

8. Second principe de la thermodynamique

8.1. Notion d'entropie, énoncé du second principe

Définition : à tout système thermodynamique on associe une fonction d'état extensive appelée entropie, notée S, dont la variation pendant une transformation est due :
- aux échanges avec l'extérieur (notamment de chaleur) ;
- à la création d'entropie à l'intérieur du système du fait d'irréversibilité interne.

Second principe : dans une transformation élémentaire d'un système fermé, la variation élémentaire d'entropie est donnée par $\boxed{\mathrm{d}S = \delta_e S + \delta_i S}$, où $\delta_e S$ est la variation d'entropie due aux échanges avec l'extérieur et $\delta_i S$ la création interne d'entropie due à l'irréversibilité. On a $\boxed{\delta_e S = \dfrac{\delta Q}{T}}$, où δQ est la chaleur élémentaire échangée par le système à la température T.

$\boxed{\delta_i S = 0}$ si la transformation est **réversible**.

$\boxed{\delta_i S > 0}$ si la transformation est **irréversible**.

Principe d'évolution : d'après ce qui précède, quelle que soit la nature de la transformation on a $\boxed{\mathrm{d}S \geqslant \dfrac{\delta Q}{T}}$, puisque on a toujours $\delta_i S \geqslant 0$. Dans le cas particulier du **système isolé** ($\delta Q = 0$), $\mathrm{d}S \geqslant 0$: son entropie ne peut qu'**augmenter**.

> ***Remarques :*** Ceci explique que, dans les exercices, il est souvent demandé de calculer la variation totale d'entropie de l'univers (qui constitue un système isolé) pour vérifier $\Delta S_{\text{univers}} \geqslant 0$ ($= 0$ si la transformation est réversible, strictement positif sinon).
> Pour un **cycle** de transformations, on a $\boxed{\Delta S = 0}$, puisque S est une fonction d'état.
> L'**unité** de S est le $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

8.2. Différentielle de l'entropie ; application au cas du gaz parfait

• Relation entre *S*, *U* et *H*

Dans le cas des **transformations réversibles**, on a $\delta W = -P\mathrm{d}V$ (puisque réversible $\Rightarrow$ quasi-statique) et $\delta Q = T\mathrm{d}S$. Avec $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$ et dH = dU + PdV + VdP :

$$\boxed{\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P}$$

• Entropie d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait subissant des transformations réversibles, on utilise les expressions qui viennent d'être établies :

$$\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}S = \frac{nc_V\mathrm{d}T + P\mathrm{d}V}{T} \Rightarrow \mathrm{d}S = nc_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{n\mathrm{R}}{V}\mathrm{d}V$$

$$\boxed{S = nc_V\,\ell\mathrm{n}\,(T) + n\mathrm{R}\,\ell\mathrm{n}\,(V) + \mathrm{Cste}}$$

$$dH = TdS + VdP \qquad \text{soit } dS = \frac{dH - VdP}{T} = \frac{nc_P dT}{T} - \frac{nR}{P}dP$$

$$\boxed{S = nc_P \ell n\,(T) - nR\,\ell n\,(P) + \text{Cste}}$$

On en déduit dès maintenant les expressions de la variation d'entropie pour une transformation d'un gaz parfait :

$$\boxed{\Delta S = nc_P \ell n\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR\,\ell n\left(\frac{P_f}{P_i}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S = nc_V \ell n\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\,\ell n\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}$$

Ces expressions ne sont pas à mémoriser, mais il faut savoir les retrouver rapidement.

Remarque importante : on retiendra que pour une transformation isentropique (à entropie constante) d'un gaz parfait, la loi de Laplace est vérifiée : on a $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$, ou encore $PV^{\gamma} = \text{cste}$.
En effet :

$$dS = 0 \Rightarrow dS = nc_V \frac{dT}{T} + \frac{nR}{V}dV = 0$$
$$\Rightarrow \frac{R}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} + \frac{R}{V}dV = 0 \Rightarrow \ell n\left(TV^{\gamma-1}\right) = \text{cste}$$

8.3. Bilan entropique

Cadre général : lors d'une transformation thermodynamique entre un état initial (i) et un état final (f) la variation totale d'entropie du système est :

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f (\delta_e S + \delta_i S)$$

• **Transformation réversible**

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

– Pour une transformation **adiabatique** : $\boxed{\Delta S = 0}$

– Pour une transformation **isotherme** : $\boxed{\Delta S = \frac{Q}{T}}$

– Pour un s**olide** ou un **liquide** subissant une transformation à **pression constante**, avec $\delta Q = mcdT$:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{mcdT}{T} = [mc\,\ell n\,(T)]_i^f = mc\,\ell n\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

– Pour un **gaz parfait**, avec $\delta Q = nc_V \mathrm{d}T + P\mathrm{d}V$

$$\Rightarrow \Delta S = \int_i^f \frac{nc_V \mathrm{d}T}{T} + \frac{P}{T}\mathrm{d}V = \int_i^f \frac{nc_V \mathrm{d}T}{T} + \int_i^f \frac{n\mathrm{R}}{V}\mathrm{d}V$$
$$= \left[nc_V \,\ell\mathrm{n}\,(T) + n\mathrm{R}\,\ell\mathrm{n}\,(V)\right]_i^f = nc_V \,\ell\mathrm{n}\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + n\mathrm{R}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

On obtient ainsi une expression de la variation d'entropie dans le jeu de variables (T, V). Si on souhaite obtenir une expression faisant intervenir le jeu de variables (T, P), on utilise alors l'expression de dS obtenue à partir de dH :

$$\Delta S = nc_P \,\ell\mathrm{n}\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - n\mathrm{R}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

• Transformation irréversible

A priori on ne sait pas calculer ΔS puisque on ne connaît pas explicitement le terme $\delta_i S$.

On sait juste que $\Delta S \geqslant \displaystyle\int_i^f \frac{\delta Q}{T}$. Mais S est une fonction d'état, donc ΔS ne dépend pas du « chemin suivi » entre l'état initial et l'état final. On peut donc imaginer une transformation réversible allant du même état initial au même état final et on est ramené au cas précédent :

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

Mais **attention,** le chemin réversible n'a pas forcément les mêmes caractéristiques que la transformation irréversible étudiée (notamment si le chemin réel est adiabatique cela n'est pas forcément le cas du chemin imaginaire...). Le résultat trouvé pour ΔS ne sera donc pas le même que pour une transformation réellement réversible.

Dans les exemples suivants, on va calculer pour chacune des transformations les variations d'entropie du système ΔS_{syst}, du milieu extérieur ΔS_{me}, et de l'univers $\Delta S_u = \Delta S_{\text{syst}} + \Delta S_{\text{me}}$. Si la transformation est irréversible on doit vérifier $\Delta S_u > 0$, si la transformation est réversible on doit vérifier $\Delta S_u = 0$. Par contre le signe de ΔS_{syst} ne dit en général rien sur la réversibilité de la transformation, car le système n'est pas forcément isolé.

• Exemples de calculs de ΔS

Changement de phase d'un corps pur : on considère la fusion (effectuée de façon réversible) d'une masse m d'un corps pur.

On a $\Delta S_{\text{syst}} = \displaystyle\int \delta_e S = \int \frac{\delta Q}{T}$. Les changements de phase se font à température constante donc $\Delta S_{\text{syst}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int \delta Q = \frac{Q}{T}$, où Q est la chaleur échangée par le système.

$\Delta S_{\text{me}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int \delta Q_{\text{me}} = \frac{-Q}{T}$ (on a $T_{\text{me}} = T_{\text{syst}} = T$ car on part d'un état d'équilibre).

On vérifie que $\Delta S_u = \Delta S_{\text{syst}} + \Delta S_{\text{me}} = 0$.

Échanges de chaleur : on considère deux corps, solides ou liquides, de même masse m, de capacité calorifique c identique et de températures initiales respectives T_1 et T_2. On met les deux corps au contact dans une enceinte adiabatique. Une fois l'équilibre thermique atteint les deux corps ont une température finale commune T_F : $T_F = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$. Ici, $\Delta S_{me} = 0$ et donc $\Delta S_u = \Delta S_{syst} = \Delta S_1 + \Delta S_2$.
La transformation est irréversible, mais l'état final est connu, on peut donc imaginer un chemin réversible pour calculer ΔS_{syst}. $\Delta S_1 = \displaystyle\int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_F} \frac{mc\mathrm{d}T}{T} = mc\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{T_F}{T_1}\right)$.
De même $\Delta S_2 = mc\,\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{T_F}{T_2}\right)$. Donc :

$$\Delta S_u = mc\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{T_F^2}{T_1 T_2}\right) = mc\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2}{4T_1T_2}\right)$$

or $\dfrac{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2}{4T_1T_2} > 1 \Leftrightarrow (T_1 - T_2)^2 > 0$, ce qui est le cas donc $\Delta S_u > 0$.

8.4. Diagrammes entropiques

Sur ces diagrammes, utilisés dans le cas de transformations réversibles de gaz parfaits, la température T est portée en ordonnée et l'entropie S est portée en abscisse. Ils constituent l'analogue des diagrammes de Clapeyron (P, V). En effet, de même que les diagrammes de Clapeyron permettent de calculer graphiquement le travail échangé $W = \displaystyle\int -P\mathrm{d}V$, les diagrammes entropiques permettent de calculer graphiquement la chaleur échangée $Q = \displaystyle\int T\mathrm{d}S$.

– **Transformations isentropiques :** pour qu'une transformation soit isentropique, il faut $S = \text{Cte}$ donc $\mathrm{d}S = 0$. Les transformations **adiabatiques réversibles** sont donc des **isentropiques**. La réciproque est fausse. La représentation graphique d'une isentropique sur un diagramme (T, S) est une droite.

– **Transformation isotherme :** la représentation graphique est une droite.

– **Transformation isochore :** pour $V = \text{Cte}$, on cherche la relation $T(S)$:

$$\mathrm{d}S = nc_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{P}{T}\mathrm{d}V \qquad \text{or} \qquad \mathrm{d}V = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{d}S = nc_V\dfrac{\mathrm{d}T}{T} \Rightarrow S = nc_V\,\ell\mathrm{n}\,(T) + \text{Cste}$ dans le cas fréquent où c_V est constant.
$\Rightarrow nc_V\,\ell\mathrm{n}\,(T) = S + \text{Cste} \Rightarrow \ell\mathrm{n}\,(T) = \dfrac{S}{nc_V} + \text{Cste} \Rightarrow T = \text{Cte} \times \exp\left(\dfrac{S}{nc_V}\right)$.

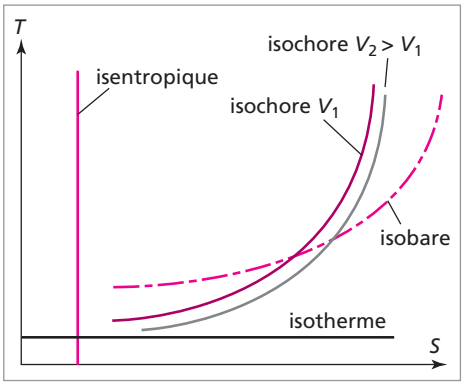
– **Transformation isobare :** pour $P = \text{Cte}$, on a $\delta Q = nc_P\mathrm{d}T - V\mathrm{d}P$ donc :

$$\mathrm{d}S = nc_P\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{V}{T}\mathrm{d}P$$

$$dP = 0 \Rightarrow dS = nc_P \frac{dT}{T} \Rightarrow S = nc_P \ln(T) + \text{Cste} \Rightarrow \ln(T) = \frac{1}{nc_P} S + \text{Cste}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \text{Cte} \times \exp\left(\frac{1}{nc_P}.S\right)}$$

Remarque : la croissance des courbes représentant les isochores est plus forte que celle des isobares car $c_P \geqslant c_V$.

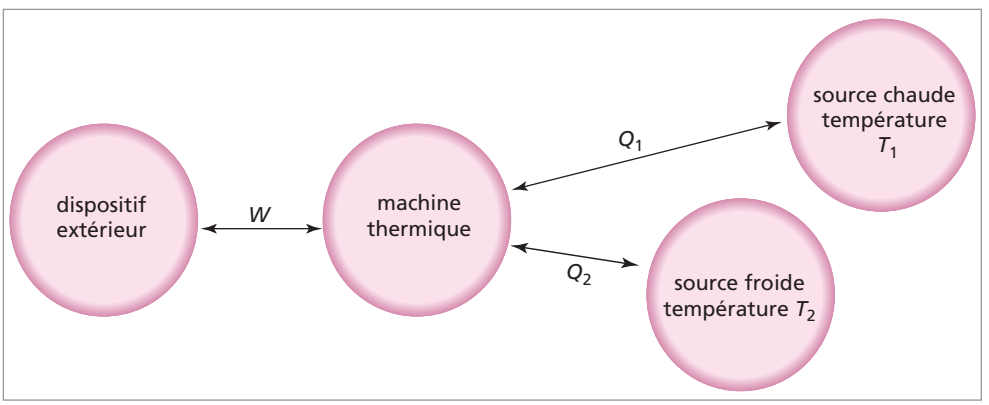


➜ **Voir exercices 5, 7 et 8.**

9. MACHINES THERMIQUES

Définition : une machine thermique est un système thermodynamique qui subit des cycles de transformations en échangeant du travail et de la chaleur avec au moins deux sources de chaleur différentes.

On envisagera ici uniquement le cas de machines dithermes (deux sources de chaleur).



W, Q_1 et Q_2 sont les grandeurs échangées **par le système** et pour la **totalité d'un cycle**.
On distingue deux types de machines thermiques :
– si $W \leqslant 0$, la machine fournit du travail. C'est un **moteur** ;
– si $W \geqslant 0$, la machine reçoit du travail. C'est un **récepteur**, ou encore une **machine frigorifique**.
A priori, le système peut subir n'importe quel type de transformations. Si elles sont réversibles, on parle de **machines réversibles**, dans le cas contraire de machines irréversibles.

9.1. Relations fondamentales. Inégalité de Clausius

Pour un cycle de la machine, on a $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0$.

• 1re relation fondamentale : de $\Delta U = 0$ on déduit :

$$\boxed{W + Q_1 + Q_2 = 0} \tag{1}$$

• 2e relation fondamentale :

$$\Delta S = 0 \Rightarrow \int_{\text{cycle}} \mathrm{d}S = 0 \Rightarrow \int \frac{\delta Q}{T} + \delta_i S = 0 \Rightarrow \int \frac{\delta Q}{T} + \int \delta_i S = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{\delta Q_1}{T_1} + \int \frac{\delta Q_2}{T_2} + \int \delta_i S = 0$$

où δQ_1 est la quantité de chaleur élémentaire échangée avec la source 1. Comme $\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} = -\int \delta_i S$, on a :

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0}$$

Cette deuxième relation est l'**inégalité de Clausius**.

Si la machine est **réversible**, alors on a $\delta_i S = 0$ et donc l'inégalité de Clausius devient :

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0} \tag{2}$$

9.2. Différents types de machines thermiques

• **Les moteurs**

Pour être un moteur ($W \leqslant 0$) une machine thermique doit recevoir de la chaleur d'une source chaude ($Q_1 \geqslant 0$) et en céder une partie à une source froide $\left(Q_2 \leqslant 0\right)$.

Démonstration : $W \leqslant 0 \Rightarrow -Q_1 - Q_2 \leqslant 0$. D'autre part on sait que $\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} \leqslant 0$. On multiplie la première relation par $\dfrac{1}{T_1}$, $-\dfrac{Q_1}{T_1} - \dfrac{Q_2}{T_1} \leqslant 0$, puis on ajoute les deux inégalités : $-\dfrac{Q_1}{T_1} - \dfrac{Q_2}{T_1} + \dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} \leqslant 0 \Rightarrow Q_2\left(\dfrac{-1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2}\right) \leqslant 0$. Par hypothèse $T_1 \geqslant T_2$, donc :

$$\frac{1}{T_1} \leqslant \frac{1}{T_2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \geqslant 0 \Rightarrow \boxed{Q_2 \leqslant 0}$$

De même pour avoir une information sur le signe de Q_1, il faut multiplier la première relation par $\dfrac{1}{T_2}$ puis additionner membre à membre et on trouve $Q_1 \geqslant 0$.

• **Machines frigorifiques**

Dans quel sens sont permis les échanges de chaleur si $W \geqslant 0$? Passons en revue toutes les possibilités de fonctionnement :

$Q_1 \geqslant 0$ $\begin{cases} Q_2 \geqslant 0 \text{ impossible (contradiction avec le premier principe).} \\ Q_2 \leqslant 0 \text{ pas d'intérêt} \end{cases}$

$Q_1 \leqslant 0$ $\begin{cases} Q_2 \geqslant 0 \textbf{ machine frigorifique} \\ Q_2 \leqslant 0 \text{ pas d'intérêt} \end{cases}$

9.3. Rendement et efficacité des machines thermiques

En général, dans le cas de moteurs, on parle de rendement et dans le cas de machines frigorifiques, on parle d'efficacité.

• **Rendement d'un moteur**

Le rendement r est défini comme le rapport du « travail fourni » à « l'énergie reçue sous forme de chaleur », soit :

$$r = \frac{-W}{Q_1}$$

Le signe moins permet d'obtenir un rendement positif.

Certaines machines effectuent ce que l'on appelle un **cycle de Carnot**, c'est-à-dire un cycle moteur **réversible** fonctionnant avec deux, et seulement deux, sources de chaleur. Dans ce cas, on retiendra que :

$$r = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Démonstration : les deux égalités fondamentales sont dans ce cas : $W + Q_1 + Q_2 = 0$ (1) et $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (2). D'après (1) $r = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$. Or d'après (2), $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$ donc $r = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Remarque : ce rendement est totalement indépendant du fonctionnement interne de la machine. Dans la réalité, les machines thermiques ont le plus souvent un fonctionnement irréversible. Dans ce cas (2) devient $\frac{Q_2}{Q_1} < -\frac{T_2}{T_1}$ soit $r < 1 - \frac{T_2}{T_1}$

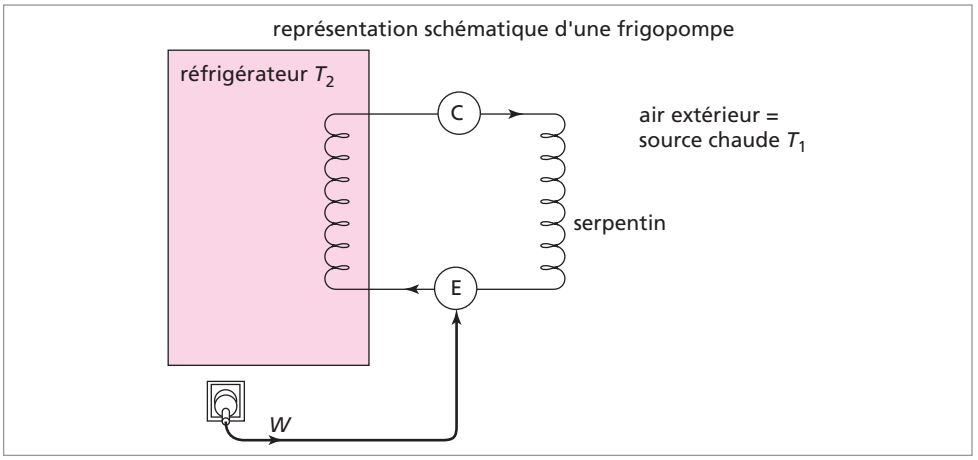
• **Efficacité d'une machine frigorifique**

La définition dépend du type de la machine thermique. Deux cas différents sont envisagés ci-dessous.

9.4. Exemples de fonctionnement de machines frigorifiques

• Réfrigérateur

Pour produire du froid, on utilise le fait que la vaporisation d'un liquide requiert de la chaleur. Le fréon (CF_2Cl_2) était utilisé car très volatil. Il est maintenant souvent remplacé par du tétrafluoroéthane (R134).



Le système choisi circule dans un **condenseur C** où la pression est élevée, il se liquéfie dans le serpentin et il dégage de la chaleur $Q_1 \leqslant 0$. Quand il arrive dans l'**évaporateur E**, où la pression est faible, il s'évapore en produisant du froid $Q_2 \geqslant 0$.

L'**efficacité** ε est définie comme le rapport du « froid produit » à « l'énergie dépensée » :

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W}$$

Le calcul de ε à l'aide des relations (1) et (2) donne $\varepsilon = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$

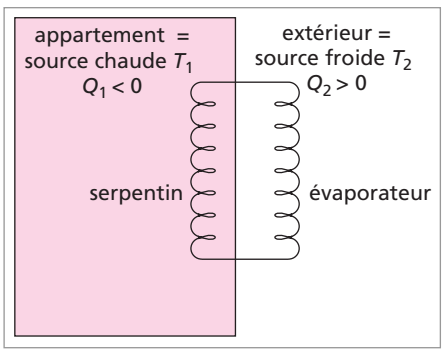
On trouve bien une **efficacité positive, mais on ne peut rien dire de plus** (supérieure ou inférieure à 1) alors que le rendement d'un moteur est toujours inférieur à 1.

• Pompe à chaleur (radiateur)

Pour obtenir une pompe à chaleur, il suffit de prendre une frigopompe et d'en inverser le sens. Cette fois-ci l'efficacité est évidemment définie autrement :

$$\varepsilon = \frac{-Q_1}{W}$$

On peut montrer à l'aide des relations (1) et (2) que $\varepsilon = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2}$.



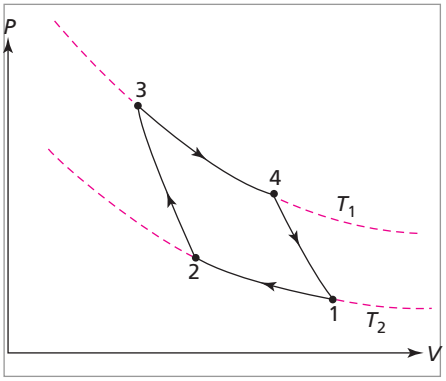
9.5. Moteurs de Carnot

Il s'agit d'un moteur ditherme fonctionnant de façon réversible et effectuant le cycle de transformations d'un gaz suivant :

– **Compression isotherme à T_2** (état 1→état 2) : échange de chaleur avec la source froide à la température T_2. On vérifie bien que $Q_2 \leqslant 0$ car

$$Q_2 + W = \Delta U = 0$$

$$\Rightarrow Q_2 = -W = \int P\mathrm{d}V \leqslant 0$$



puisque V diminue.

– **Compression adiabatique réversible** (isentropique) (état 2→état 3) : T évolue de T_2 à T_1 (avec $T_2 \leqslant T_1$) et $W \geqslant 0$.

– **Détente isotherme à T_1** (état 3→état 4) : échange de chaleur avec la source chaude à la température T_1. On vérifie bien $Q_1 \geqslant 0$ puisque

$$Q_1 + W = \Delta U = 0 \Rightarrow Q_1 = -W = \int P\mathrm{d}V \geqslant 0$$

puisque V augmente.

– **Détente adiabatique réversible** (isentropique) (état 4→état 1) : $W \leqslant 0$ et T évolue de T_1 à T_2.

On vérifie par la méthode des aires (détermination graphique de W) que l'on a $W \leqslant 0$, le système fonctionne donc bien en moteur. Le rendement de ce moteur effectuant des cycles de Carnot est bien sûr $r = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$. On peut également retrouver ce résultat en utilisant la définition générale du rendement, $r = \dfrac{-W}{Q_{\text{reçue}}}$, et calculer W le travail échangé sur la totalité du cycle ainsi que $Q_{\text{reçue}}$ $(= Q_1)$ la chaleur reçue sur la totalité du cycle.

➜ **Voir exercices 5 et 6.**

10. Théorie cinétique des gaz parfaits monoatomiques

Dans cette partie, les résultats et les démonstrations sont présentés pour un gaz monoatomique, mais sont en général utilisables également pour les autres gaz parfaits. On trouvera donc parfois le terme « molécules » à la place d'« atomes ». Les différences principales entre le comportement des gaz monoatomiques et les autres gaz concernent essentiellement les capacités calorifiques molaires ; ces différences seront signalées.

10.1. Les bases de la théorie

Un gaz parfait à l'équilibre est constitué d'atomes, ou de molécules, qui sont continuellement en mouvement. Il s'agit donc d'un « équilibre statistique ». Ce mouvement, qui constitue « l'agitation thermique » est totalement aléatoire puisqu'il n'existe, par définition, pas d'interaction entre les molécules d'un gaz parfait (et que leur poids est négligeable). Donc, le mouvement des molécules est composé de chocs (entre elles et contre les parois qui limitent le gaz) et de trajectoires rectilignes et uniformes entre ces chocs. La vitesse des molécules dans ces portions rectilignes est distribuée selon une loi statistique, que la « théorie cinétique des gaz parfait » permet d'expliciter.

• Notions de probabilités

Le but est donc d'étudier la répartition des vitesses des atomes contenus dans un volume V de gaz. Par vitesse, on entend soit le module de la vitesse $\|\overrightarrow{v}\|$, soit l'une des composantes v_x, v_y, ou v_z dans un repère orthonormé $Oxyz$. On note ici l'une quelconque de ces grandeurs simplement par v. La seule distinction à effectuer est le domaine de variation de v : $[0, +\infty[$ lorsqu'il s'agit du module, et $]-\infty, +\infty[$ pour une composante.

La **probabilité** $p(v)$ d'avoir une vitesse comprise entre v et $(v + \mathrm{d}v)$ est proportionnelle à la largeur de l'intervalle $\mathrm{d}v$: $p(v) = f(v)\mathrm{d}v$. $f(v)$ est la fonction **densité de probabilité**. Cette fonction doit vérifier $\int f(v)\mathrm{d}v = 1$, où l'intégration porte sur le domaine de variation de v, différent suivant le cas envisagé (module ou composante). On peut aussi exprimer $p(v)$ de la façon suivante. Si $\mathrm{d}N$ est le nombre de molécules d'un volume V ayant une vitesse comprise entre v et $(v + \mathrm{d}v)$, et N le nombre total de molécules, la probabilité $p(v)$ d'avoir une vitesse comprise entre v et $(v + \mathrm{d}v)$ est $p(v) = \dfrac{\mathrm{d}N}{N}$.

La **valeur la plus probable** de la vitesse v_p est telle que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}(v_\mathrm{p}) = 0$ (extremum).

La **valeur moyenne** de la vitesse est $v_\mathrm{m} = \langle v \rangle = \int v f(v)\mathrm{d}v$.

La valeur moyenne du carré de la vitesse est $\langle v^2 \rangle = \int v^2 f(v)\mathrm{d}v$

On utilisera aussi v_q, vitesse quadratique des molécules, définie par :

$$v_\mathrm{q} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int v^2 f(v)\mathrm{d}v} \quad \text{(où } v \text{ désigne ici le module de la vitesse : } v = \|\overrightarrow{v}\|\text{)}.$$

• Les hypothèses de la théorie : modèle microscopique du gaz parfait

Les hypothèses sont soit relatives à la définition du gaz parfait (deux premières), soit propres à la théorie cinétique des gaz parfaits.

– La taille des molécules est très faible devant le volume total du gaz, ce qui permet de les considérer comme ponctuelles. De plus, on suppose que les lois de la mécanique classique s'appliquent à l'échelle des molécules.

– Il n'existe aucune force d'interaction entre les molécules qui constituent le gaz, ce qui implique que leur énergie est purement d'origine cinétique. Il existe simplement des

collisions élastiques entre les molécules (conservation de l'énergie cinétique totale) et des collisions entre une molécule et la paroi (conservation de l'énergie cinétique de la molécule).
– Hypothèse « d'homogénéité de la densité moléculaire » : le nombre moyen n de molécules par unité de volume est constant ($n = \dfrac{N}{V}$, où N est le nombre total de molécules dans un volume V).
– Hypothèse « d'homogénéité de la distribution des vitesses » : la probabilité $P\left(v_x, v_y, v_z\right)$ d'avoir un vecteur vitesse dont les composantes sont simultanément dans les intervalles $[v_x, v_x + \mathrm{d}v_x]$, $\left[v_y, v_y + \mathrm{d}v_y\right]$, $[v_z, v_z + \mathrm{d}v_z]$ dépend uniquement du vecteur vitesse de composantes v_x, v_y, v_z, et non du point considéré dans le gaz parfait.
– Hypothèse « d'isotropie de la distribution des vitesses » : le mouvement des molécules est aléatoire, ce qui signifie que leurs vecteurs vitesse sont orientés de façon aléatoire. $P(v_x, v_y, v_z)$ dépend du module de v_x, v_y, v_z et non de son orientation.

Remarque : la dernière hypothèse n'implique rien en ce qui concerne le module du vecteur vitesse des molécules. Au contraire, celui-ci n'est pas distribué de façon aléatoire.

10.2. Propriétés du gaz parfait : interprétation microscopique de la pression et de la température

• Remarques préliminaires
1. Soit $f\,(v_x)$ la densité de probabilité de la composante sur Ox du vecteur vitesse. Il n'existe pas de direction privilégiée pour le vecteur vitesse, ce qui traduit le fait qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble du gaz. On doit avoir :

$$\langle v_x \rangle = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f(v_x) \mathrm{d}v_x \quad \text{et donc} \quad f\,(v_x) = f\,(-v_x) \;:\; \text{la fonction } f \text{ est paire.}$$

Même raisonnement pour v_y et v_z.
2. Comme les trois directions Ox, Oy, Oz sont équivalentes et indépendantes on a :

$$\left\langle v_x^2 \right\rangle = \left\langle v_y^2 \right\rangle = \left\langle v_z^2 \right\rangle \quad \text{donc} \quad \left\langle v^2 \right\rangle = \left\langle v_x^2 + v_z^2 + v_y^2 \right\rangle = \left\langle v_x^2 \right\rangle + \left\langle v_y^2 \right\rangle + \left\langle v_z^2 \right\rangle = 3 \left\langle v_x^2 \right\rangle$$

• Pression d'un gaz parfait
On considère une surface élémentaire dS sur une paroi, normale à l'axe Ox, limitant un gaz parfait. On veut calculer la pression P engendrée sur cette paroi par les chocs des molécules composant le gaz. On a $P = \dfrac{\left\| \overrightarrow{F} \right\|}{\mathrm{d}S}$, où $\overrightarrow{F}$ est la force exercée sur la surface dS.
– **Calcul de la force due au choc d'une seule molécule** : lorsqu'une molécule frappe la paroi, on a d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\overrightarrow{F}_{\text{paroi}\to\text{molécule}} = m\overrightarrow{a} = m\frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

où m est la masse de la molécule, $\Delta\overrightarrow{v}$ la variation de son vecteur vitesse et Δt un temps court durant lequel se produit le choc.
D'après le principe de l'action et de la réaction on a $\overrightarrow{F}_{\text{molécule}\to\text{paroi}} = -\overrightarrow{F}_{\text{paroi}\to\text{molécule}}$ donc si l'on note simplement $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = \left\|\overrightarrow{F}_{\text{molécule}\to\text{paroi}}\right\|$, on a alors :

$$\Delta t \left\|\overrightarrow{F}\right\| = \left\|\Delta\left(m\overrightarrow{v}\right)\right\|$$

Avant le choc : $\overrightarrow{v}_i = v_x\overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{u}_t$ et après le choc : $\overrightarrow{v}_f = v'_x\overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{u}'_t$.
Lors du choc la composante tangentielle est conservée : il n'y a pas de force tendant à faire glisser la paroi dans son plan. On peut le comprendre aussi en considérant par exemple une molécule telle que $v_x = 0$, il n'y alors pas de choc et son vecteur vitesse (tangentiel) doit être conservé. Le choc est élastique, il doit donc y avoir conservation de l'énergie cinétique de la molécule pendant le choc : $v_x^2 + \|\overrightarrow{u}_t\|^2 = v_x'^2 + \|\overrightarrow{u}'_t\|^2$, or $\|\overrightarrow{u}_t\|^2 = \|\overrightarrow{u}'_t\|^2$, donc $v_x^2 = v_x'^2$ ce qui implique $v_x = \pm v'_x$. Seule la solution $v_x = -v'_x$ est possible après un choc.
Finalement on a :

$$\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_f - \overrightarrow{v}_i = \left(v'_x - v_x\right)\overrightarrow{u}_x = -2v_x\overrightarrow{u}_x$$

Donc $\|\Delta\overrightarrow{v}\| = 2v_x$, puisque l'on considère forcément une molécule telle que $v_x \geqslant 0$, de façon à avoir effectivement un choc.
D'où :

$$\Delta t \left\|\overrightarrow{F}\right\| = \left\|\Delta\left(m\overrightarrow{v}\right)\right\| = 2mv_x \Rightarrow \left\|\overrightarrow{F}\right\| = \frac{2mv_x}{\Delta t}$$

– **Nombre de chocs pendant Δt sur $\mathrm{d}S$:** on compte les particules ayant pour composante normale v_x et qui heurtent la paroi pendant le temps Δt. Elles sont « éloignées au plus » de la distance $(v_x\Delta t)$ de la paroi, donc contenues dans le volume $(\mathrm{d}Sv_x\Delta t)$ (on fait ici l'hypothèse simplificatrice que toutes les molécules se déplacent suivant Ox). Si n est le nombre de molécules par unité de volume, le nombre de molécules cherché est donc $n\mathrm{d}Sv_x\Delta t$. Et le nombre de chocs est $(n\mathrm{d}Sv_x\Delta t)$.
La force totale engendrée par les molécules de vitesse v_x est :

$$\left\|\overrightarrow{F}\right\| = \frac{2mv_x}{\Delta t} nv_x\mathrm{d}S\Delta t = 2nmv_x^2\mathrm{d}S$$

– **Moyenne de la force sur toutes les valeurs possibles de v_x :** L'expression précédente de la force a été trouvée pour un v_x donné, il faut donc la moyenner sur toutes les valeurs que peut prendre v_x :

$$\left\langle\left\|\overrightarrow{F}\right\|\right\rangle = \int_0^{+\infty}\left(2nmv_x^2\mathrm{d}S\right)f\left(v_x\right)\mathrm{d}v_x$$

où $f(v_x)$ est la densité de probabilité de v_x (l'intégrale ne porte que sur les vitesses v_x positives, correspondant aux molécules se dirigeant vers la paroi).
Donc $\left\langle\left\|\overrightarrow{F}\right\|\right\rangle = 2nm\mathrm{d}S\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(v_x^2\right)f\left(v_x\right)\mathrm{d}v_x = 2nm\mathrm{d}S \times \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f\left(v_x\right)\mathrm{d}v_x$, d'après la remarque préliminaire **1**.

Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \langle v_x^2\rangle = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$. Donc, $\left\langle \left\| \overrightarrow{F} \right\| \right\rangle = \frac{1}{3} nm\mathrm{d}S \langle v^2\rangle$, d'après la remarque **2**.

On a donc la pression totale $P = \dfrac{\left\langle \left\| \overrightarrow{F} \right\| \right\rangle}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{3} nm \langle v^2\rangle$. Vu la définition de la vitesse quadratique v_q, on a donc :

$$\boxed{P = \frac{1}{3} n m v_q^2}$$

• Énergie cinétique moyenne d'une molécule

Par définition, l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule est $\frac{1}{2} m \langle v^2\rangle = \langle E_\mathrm{c}\rangle$.

Il vient donc $P = 2/3 n \langle E_\mathrm{c}\rangle$. Notons ici que, dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, l'énergie cinétique de translation est identifiable à l'énergie cinétique totale ; dans le cas d'un gaz parfait diatomique, il faut tenir compte des rotations de la molécule dans l'énergie cinétique totale.

Par ailleurs, si on admet la relation $PV = \nu \mathrm{R} T$, où ν est le nombre de moles de gaz, on a alors $PV = \dfrac{N}{\mathrm{N_A}} \mathrm{R} T$ avec N nombre total de molécules dans V et $\mathrm{N_A}$ nombre d'Avogadro.

Donc $P = \dfrac{N}{V} \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{N_A}} T$. Par définition de la constante de Boltzmann, on a :

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{N_A}} = \frac{8{,}31}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{SI}$$

donc :

$$\boxed{P = n\mathrm{k}T}$$

où n est le nombre de molécules par unité de volume du gaz. Cette relation est à mémoriser.

En égalant les deux expressions de P qui viennent d'être trouvées on a $\frac{2}{3} n \langle E_\mathrm{c}\rangle = n\mathrm{k}T$,

Soit donc $\boxed{\langle E_\mathrm{c}\rangle = \frac{3}{2}\mathrm{k}T}$. Cette expression est relative à l'énergie cinétique moyenne **d'une seule** molécule en translation. Si l'on souhaite obtenir l'énergie cinétique moyenne **d'une mole** de molécule il faut multiplier cette expression par $\mathrm{N_A}$ et on a $\langle E_\mathrm{c}\rangle_{1\text{ mole}} = \frac{3}{2}\mathrm{k}\mathrm{N_A} T \Rightarrow$

$$\boxed{\langle E_\mathrm{c}\rangle_{1\text{ mole}} = \frac{3}{2}\mathrm{R}T}$$

(Résultat à retenir.)

Remarque importante : Cette expression de l'énergie cinétique moyenne de translation permet de trouver très simplement la valeur de la vitesse quadratique

moyenne des molécules $v_q = \left(\int v^2 f(v)\, dv \right)^{\frac{1}{2}}$. En effet, $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m v_q^2$ d'où $v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par N_A on obtient une autre expression utile de la vitesse quadratique $v_q = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, où M désigne cette fois-ci la masse molaire du gaz .

• Énergie interne du gaz. Capacités calorifiques

L'énergie $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT$ est une énergie cinétique moyenne de translation. Si l'on suppose que cette énergie est également répartie dans toute les directions (équipartition de l'énergie), alors l'énergie cinétique moyenne associée à chaque degré de liberté de translation est $\frac{1}{2} kT$.

Cas d'un gaz monoatomique : Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, l'énergie interne U se résume à l'énergie cinétique de translation suivant les trois directions x, y, z donc :

$$\langle U(T) \rangle = \frac{3}{2} kT$$

et donc comme on l'a vu $\langle U(T) \rangle_{1 \text{ mole}} = \frac{3}{2} RT$. Comme l'on sait que pour **une mole** on doit avoir $dU = c_V dT$, on en déduit la valeur de la capacité calorifique à volume constant :

$$\boxed{c_V = \frac{3}{2} R}$$

D'après la relation de Mayer, on a $c_P = \frac{5}{2} R$, et $\gamma = c_P / c_V = 5/3 = 1{,}666...$

Cas d'un gaz diatomique : Dans le cas de molécules diatomiques, il faut prendre en compte dans l'énergie interne les termes dus à la rotation propre de la molécule. Il n'y a pas de rotation selon l'axe de la molécule, il faut donc seulement ajouter deux degrés de liberté supplémentaires. En admettant que ces degrés de liberté « comptent » également pour $\frac{1}{2} kT$, on obtient au total $U = \frac{5}{2} kT$. Par conséquent, pour un gaz diatomique

$\boxed{c_V = \frac{5}{2} R}$ $c_P = \frac{7}{2} R$, et, $\gamma = 7/5 = 1{,}4...$

10.3. Loi de distribution de Maxwell

• Distribution des vitesses

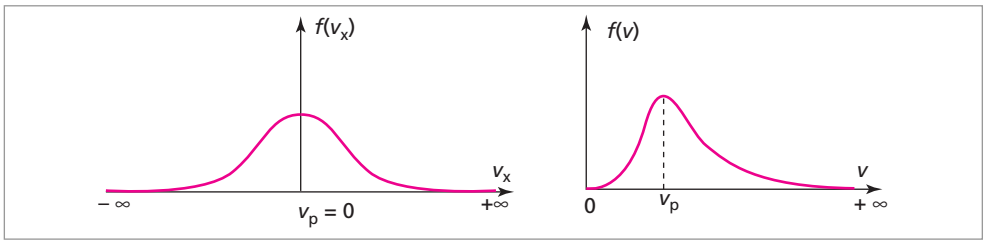
À l'aide des hypothèses (physiquement raisonnables) du 10.2 et de quelques arguments mathématiques, on montre que les différentes densités de probabilité s'écrivent :

$$\boxed{f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}}$$

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

où $f(v_x)$ est la densité de probabilité d'une composante, $f(v_x, v_y, v_z)$ est relative à la probabilité d'avoir simultanément les composantes de la vitesse dans les intervalles $[v_x; v_x + dv_x]$, $[v_y; v_y + dv_y]$, $[v_z; v_z + dv_z]$ et enfin $f(v)$ est la densité de probabilité du module de la vitesse.



La vitesse la plus probable, v_p, correspondant au maximum de densité, est nulle dans le cas de v_x et est non nulle pour v. Par dérivation, on peut vérifier que : $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

• Calcul de la vitesse moyenne et de la vitesse quadratique moyenne

À l'aide de la forme de $f(v)$ ci-dessus et des valeurs de quelques intégrales classiques on calcule la vitesse moyenne :

$$v_m = \langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

et la vitesse quadratique pour laquelle on vérifie que :

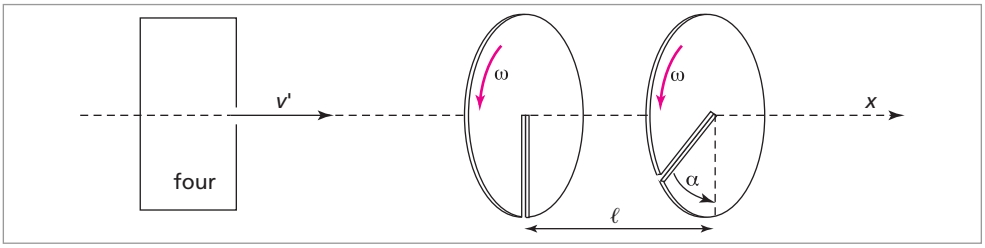
$$v_q = \left(\langle v^2 \rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

On peut, par exemple, faire les applications numériques de ces différentes vitesses à différentes températures pour l'hélium ($4\ g \cdot mol^{-1}$). À $T = 298$ K, on a $v_m = 1\,256\ m \cdot s^{-1}$ et $v_q = 1\,362\ m \cdot s^{-1}$. Il s'agit donc de vitesses très élevées.

• Vérification expérimentale de la loi de Maxwell

Voici une expérience qui permet de vérifier la forme annoncée pour la densité de probabilité $f(v)$ du module de la vitesse. On veut « compter » le nombre de molécules ayant

un module compris dans $[v, v + dv]$. Pour cela, on génère un jet de vapeur métallique et on analyse la vitesse des atomes sortant du four. Le dispositif expérimental est le suivant :



Les atomes de métal sont vaporisés dans le four. Une fente permet aux atomes de sortir dans la direction Ox. De plus, le vide est créé autour du four de sorte que les atomes sortant ne sont pas ralentis. À la sortie du four, on place deux disques, chacun muni d'une fente, tournant à la vitesse angulaire ω, distants de ℓ et déphasés de α. Lorsqu'un atome sortant du four à une vitesse v passe la fente du premier disque, il met un temps $t = \ell/v$ à arriver au deuxième disque. Pour qu'il passe alors au travers de ce second disque, donc au travers de la seconde fente, il faut que le déphasage α soit égal à $\alpha = \omega t$ soit encore $\alpha = \omega\ell/v$. Ainsi, en réglant le déphasage des disques, on peut sélectionner spécifiquement une vitesse. On place alors après le second disque un détecteur où les atomes forment un film mince. En mesurant l'épaisseur du film, on détermine le nombre d'atomes sortis du four à la vitesse v et en faisant de même pour plusieurs vitesses, on obtient la fonction $f(v)$.

➜ **Voir exercices 6 et 7**

11. TRANSFERTS THERMIQUES

11.1. Aspects phénoménologiques de la diffusion thermique

• Différents modes de transferts de chaleur

Les transferts de chaleur peuvent se faire selon différents processus :

– **diffusion thermique :** l'énergie interne est transmise de proche en proche, à une échelle microscopique, à l'intérieur du système, sans déplacement macroscopique de matière. On dit alors qu'il y a diffusion thermique, ou encore conduction thermique. Seul ce processus sera envisagé ici ;

– **convection :** lorsque les échanges thermiques à l'intérieur du système sont accompagnés de déplacement de matière (assurant le transfert d'énergie) on parle de convection. Ce phénomène observé dans les fluides, est généralement beaucoup plus efficace que la diffusion thermique, à laquelle il est couplé ;

– **rayonnement électromagnétique :** lorsqu'il s'agit d'échange d'énergie avec le milieu extérieur sous forme de rayonnement électromagnétique, on parle alors de transferts thermiques radiatifs.

• **La diffusion thermique dans différents milieux**

Très schématiquement, on peut dire que :

– **dans les gaz**, le transport d'énergie interne est assuré par les chocs moléculaires. Ceux-ci tendent à déplacer l'énergie interne vers les zones de plus faible énergie, donc de basse température. Pour les gaz, aux pressions usuelles, ces phénomènes de conduction sont très souvent accompagnés de convection (beaucoup plus efficace vis-à-vis de la conduction de la chaleur). En effet, la masse volumique des gaz diminue lorsque la température augmente, un élément de volume de gaz « plus chaud » aura donc tendance à s'élever naturellement ;

– **dans les liquides**, on retrouve les mêmes processus que pour les gaz, avec simplement une densité moléculaire plus élevée, ce qui accroît leur efficacité. De plus, d'autres phénomènes, dus par exemple à la présence d'électrons libres, peuvent faciliter le transfert d'énergie interne à l'intérieur du liquide.

– **dans les solides**, il ne peut y avoir de chocs entre atomes. C'est l'énergie vibratoire de ces derniers qui se déplace de proche en proche. Ceci concerne tous les solides, mais dans le cas de conducteurs électriques l'efficacité du transfert est accrue par la présence d'électrons de conduction, qui se mettent facilement en mouvement. Les bons conducteurs électriques sont donc également les meilleurs conducteurs thermiques.

11.2. Flux de chaleur

Définition : Le flux de chaleur Φ à travers une surface donnée et dans un sens donné est la quantité de chaleur qui traverse cette surface par unité de temps, dans le sens choisi (c'est donc une puissance thermique).

En chaque point, **le vecteur densité de courant de chaleur** $\overrightarrow{j}$ (ou densité de courant thermique) est un vecteur qui a pour direction et sens celui du transfert de chaleur. Son module est tel que le flux $\mathrm{d}\Phi$ à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}S$, dans le sens de $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\overrightarrow{u}$ (où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à la surface élémentaire), est :

$$\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Dans le cas fréquent où l'on considère des **transferts de chaleur unidimensionnels,** suivant un axe Ox, on a $\mathrm{d}\Phi(x,t) = j(x,t).\mathrm{d}S$, si $\mathrm{d}S$ est une surface orthogonale à Ox et située à l'abscisse x. $j(x,t)$ est la mesure algébrique de $\overrightarrow{j}$ sur Ox et son signe indique dans quel sens se fait effectivement le transfert de chaleur.

La chaleur élémentaire δQ traversant pendant le temps $\mathrm{d}t$ une surface S est donc

$$\delta Q = \iint_S \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t$$

11.3. Loi de Fourier

Cette loi, qui résulte de constatations expérimentales établies par J. Fourier (début du XIX^{e} siècle), donne l'expression de la densité de courant de chaleur $\overrightarrow{j}$ dans un milieu

isotrope :

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

T désigne la température en chaque point du milieu. λ est une constante qui ne dépend que du milieu, appelée **conductivité thermique**.
Dans le cas des transferts de chaleur suivant un axe Ox, cette loi s'écrit :

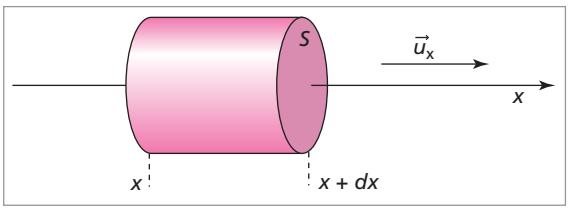
$$j(x,t) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

L'unité de λ est le $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Par ailleurs, pour les gaz, λ croît avec la température, alors qu'il dépend peu de la pression. Enfin, la conductivité thermique d'un solide est plus grande que celle d'un liquide, elle-même supérieure à celle du gaz.
Le signe « moins » de la loi de Fourier exprime simplement que les transferts de chaleur se font nécessairement des zones où la température est la plus élevée vers les zones où la température est plus basse.
Il y a analogie entre la loi de Fourier et la loi de Fick qui établit la densité de courant particulaire $\vec{j_N}$ dans le phénomène de la diffusion moléculaire : $\vec{j_N} = -D\overrightarrow{\text{grad}} N$, où D est le coefficient de diffusion et N le nombre de molécules par unité de volume.

11.4. Les équations de la diffusion thermique

• Bilan d'énergie unidimensionnel

On considère le cas où les transferts de chaleur se font dans une seule direction : selon un axe Ox. Par ailleurs, toutes les variables d'état caractérisant le milieu matériel ne sont également fonction que de l'abscisse x et du temps t. Soit un cylindre d'axe Ox, et de section S.



On calcule la variation d'énergie interne de ce cylindre pendant le temps dt. On suppose toujours que les variations de l'énergie interne sont dues aux seuls échanges de chaleur avec l'extérieur, on a donc :

$$\mathrm{d}U = U(x, t+\mathrm{d}t) - U(x,t) = \delta Q = \varphi(x)\,\mathrm{d}t - \varphi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t$$

où $\varphi(x)$ est le flux de chaleur traversant la section du cylindre se trouvant à l'abscisse x pendant dt et dans le sens de Ox. Soit $\vec{j}$ le vecteur densité de courant thermique, on a $\vec{j} = j(x,t)\,\vec{u}_x$ et le flux de chaleur est donc $\varphi(x) = j(x,t)\,S\mathrm{d}t$. Il vient alors,

$$\mathrm{d}U = j(x,t)\,S\mathrm{d}t - j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\mathrm{d}t \qquad \text{soit encore} \qquad \mathrm{d}U = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x S\mathrm{d}t$$

Si on note U_V l'énergie volumique, qui dépend a priori des variables x et t, on peut également écrire ce bilan d'énergie sous la forme $\boxed{\dfrac{\partial U_V}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}}$, appelée équation de continuité.

• Bilan d'énergie : cas général

Le calcul précédent se généralise au cas où le vecteur $\overrightarrow{j}$ prend n'importe quelle direction dans l'espace : il a donc trois composantes j_x, j_y et j_z. On considère alors un parallélépipède de volume élémentaire $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dont on évalue la variation d'énergie interne pendant $\mathrm{d}t$, en comptabilisant les flux de chaleur à travers chacune des six faces. On obtient :

$$\boxed{\frac{\partial U_V}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\operatorname{div}\overrightarrow{j}}$$

Cette équation de conservation de l'énergie est l'analogue, par exemple, de l'équation de conservation de la densité de charge ρ en électrostatique $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\overrightarrow{j} = 0$, où $\overrightarrow{j}$ est alors la densité de courant de charges.

• L'équation de la chaleur

En combinant le bilan d'énergie obtenu ci-dessus avec la loi de Fourier, on obtient l'équation de la chaleur. La variation d'énergie interne volumique pendant $\mathrm{d}t$ est $\dfrac{\partial U_V}{\partial t} = -\operatorname{div}\overrightarrow{j}$ avec $\overrightarrow{j} = -\lambda \operatorname{grad} T$, il vient donc :

$$\boxed{\frac{\partial U_V}{\partial t} = \lambda \Delta T = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)}$$

Dans le cas unidimensionnel, cette équation devient $\boxed{\dfrac{\partial U_V}{\partial t} = \lambda\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)}$.

Suivant les problèmes envisagés, il y a ensuite essentiellement deux façons différentes d'exploiter cette équation de la chaleur.

– Si le régime est supposé **permanent**, on doit avoir à une abscisse x donnée $\dfrac{\partial U_V}{\partial t} = 0$. L'équation de la chaleur devient donc $\Delta T = 0$.

– Si le régime n'est pas permanent, et que le système envisagé est un solide ou un liquide de capacité calorifique massique c constante, alors on peut écrire pour un élément de volume de masse m, $\mathrm{d}U = mc\mathrm{d}T$, soit encore $\mathrm{d}U_V = \rho c \mathrm{d}T$, et l'équation de la chaleur devient donc :

$$\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

➜ **Voir exercice 8.**

ÉNONCÉS

Exercice 1 Pression et altitude (d'après CAPES agricole 2000)

1. Établir l'équation locale d'un fluide de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre uniforme $\overrightarrow{g}$: $\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z$ (l'axe Oz est vertical ascendant).

2. On peut considérer que dans une zone de l'atmosphère terrestre d'environ 10 km d'épaisseur ($0 \leqslant z \leqslant 10$ km), la température décroît avec l'altitude z selon une loi affine $T = T_0\,(1 - kz)$ où T_0 et k sont des constantes positives. Le champ de pesanteur reste pratiquement constant et l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. L'indice 0 (P_0, ρ_0, T_0) est relatif aux grandeurs au sol ($z = 0$). On posera $\alpha = \dfrac{Mg}{k\mathrm{R}T_0} > 1$, où R est la constante universelle des gaz parfaits.

a. Exprimer la pression P à l'altitude z en fonction de P_0, k, α et z.

b. Calculer numériquement la pression P dans une station de sports d'hiver à l'altitude $z = 1\,500$ m, sachant que $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1} ; $T_0 = 293$ K ; $\mathrm{R} = 8{,}32$ J · mol^{-1} · K^{-1} ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2} ; $P_0 = 10^5$ Pa ; $k = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ m^{-1}.

Exercice 2 Diagramme de phases de l'eau (d'après CAPES interne 1991)

Le diagramme de phases de l'eau est représenté en coordonnées P et T ci-contre.

1. Compléter le diagramme en précisant les domaines d'existence des différentes phases.

2. Placer les points caractéristiques sur le diagramme et indiquer brièvement ce qu'ils représentent.

3. Définir la pression de vapeur saturante. De quel(s) paramètre(s) dépend cette grandeur ?

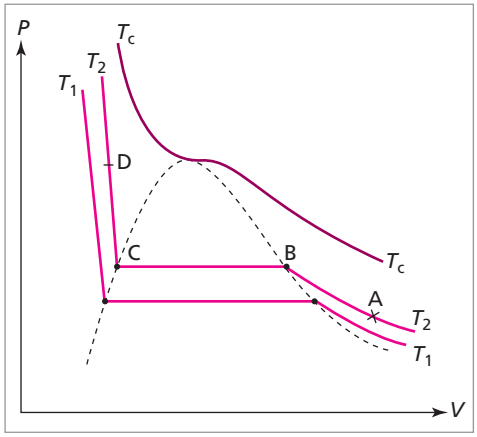
4. Quelle particularité possède la courbe d'équilibre des phases liquide et solide ? Quelle conséquence peut-on en déduire ?

5. On donne le réseau d'isothermes, représenté ci-après, correspondant aux phases liquide et vapeur d'une mole d'eau.

a. Préciser les domaines d'existence des deux phases. Comment nomme-t-on la courbe en pointillés ?

b. Proposer une schématisation simple de l'expérience permettant de réaliser la transformation ABCD. Décrire l'état du système au cours des différents stades de la transformation.

c. Reproduire le diagramme (P, T) et représenter la transformation ABCD en précisant la position des points A, B, C et D.



6. Différencier brièvement les phénomènes d'ébullition et d'évaporation dans l'atmosphère.

7. Le degré hygrométrique de l'air, contenu dans une enceinte à la température T, est le rapport de la pression partielle de vapeur d'eau présente dans l'enceinte à la pression de vapeur saturante à cette température. Ce nombre s'exprime en pourcentage. Sachant que la pression de vapeur saturante de l'eau à 20 °C est 2 300 Pa, calculer la masse d'eau contenue dans 1 m^3 d'air à 20 °C, dont le degré hygrométrique est 70 %. On assimilera l'air à un gaz parfait. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\ J \cdot mol^{-1}K^{-1}$ et la masse molaire de l'eau $M = 18\ g \cdot mol^{-1}$.

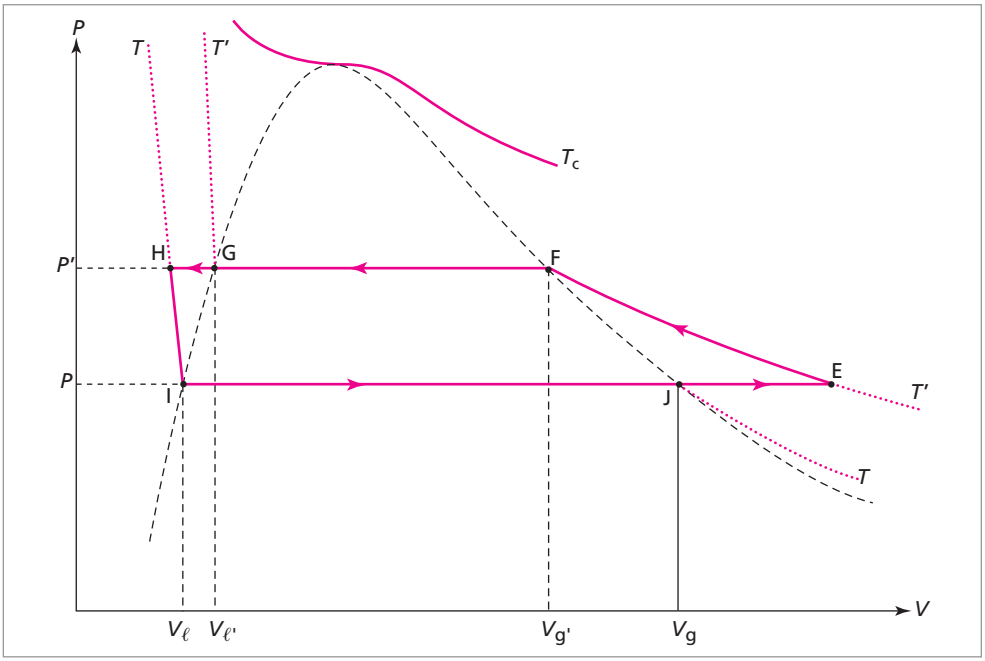
8. Dans cette question, on s'intéresse à l'évolution de la chaleur latente L de vaporisation en fonction de la température.

a. Définir la chaleur latente molaire de vaporisation de l'eau.

b. Une mole d'eau subit la transformation EFGHIJE représentée en coordonnées P et V page suivante. Les volumes molaires de l'eau liquide respectivement aux températures T et T' sont notés V_ℓ et V'_ℓ. De même V_g et V'_g sont les volumes molaires de la vapeur d'eau aux températures T et T'. Au cours de cette transformation, on néglige les volumes molaires de l'eau liquide face aux volumes molaires de la vapeur d'eau. On admet de plus que la dilatation ou la compression isotherme quasi-statique de l'eau liquide s'effectuent sans échange thermique avec le milieu extérieur. D'autre part, les capacités calorifiques molaires C_{pl} et C_{pg}, respectivement des phases liquides et vapeur, sont considérées comme étant indépendantes de la température. On indique que C_{pl} est supérieure à C_{pg}. Enfin la vapeur d'eau sera assimilée à un gaz parfait. Représenter le cycle étudié sur le diagramme des phases en coordonnées P et T.

c. On appelle L et L' les chaleurs latentes molaires de vaporisation respectivement aux températures T et T'. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au cycle considéré et déterminer l'expression de la différence $L - L'$ en fonction de C_{pl}, C_{pg}, T et T'.

d. En déduire que la chaleur latente molaire de vaporisation peut s'écrire sous la forme $L = L_0 - aT$ où L_0 et a sont deux constantes positives.



Exercice 3 Étude d'un autocuiseur (d'après CAPES interne 1993)

Données : Caractéristiques de l'ambiant : température $T_0 = 20\ °C = 293\ K$, pression $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa = 1{,}013\ bar$.
Caractéristiques de l'eau : capacité thermique massique du liquide (chaleur massique du liquide) $c = 4\,180\ J \cdot kg^{-1}K^{-1}$.
Extrait des tables des phases liquide et vapeur d'eau en équilibre :

Pression (bar)	Température (°C)	Volume massique ($m^3 \cdot kg^{-1}$)		Chaleur latente de vaporisation ($kJ \cdot kg^{-1}$)
		liquide	vapeur	
0,0234	20	0,001002	57,840	2 453
1,0131	100	0,001043	1,673	2 257
1,2079	105	0,001047	1,419	2 243
1,4326	110	0,001051	1,210	2 230
1,6905	115	0,001056	1,036	2 215

Caractéristiques du récipient : cylindre d'acier inoxydable de masse $m = 4{,}2\ kg$ (couvercle compris) et de capacité thermique massique $c_r = 460\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.
Dimensions intérieures : diamètre $D = 28\ cm$; hauteur $h = 16\ cm$.

Conditions initiales : on met 1,0 litre d'eau dans l'autocuiseur à la température ambiante. On ferme le couvercle muni de sa soupape. À la date $t = 0$, on commence à chauffer avec une plaque électrique fournissant une puissance effective $P = 2$ kW au système.

Durée du chauffage

1. Considérons les hypothèses simplistes suivantes.
– L'air surmontant l'eau est sec, on néglige toute formation de vapeur ;
– La température T de l'ensemble eau + air + récipient est uniforme ;
– On néglige toute perte thermique entre le récipient et l'ambiant ;
– On néglige la chaleur nécessaire au chauffage de l'air.
Calculer le temps t au bout duquel l'ensemble atteindra la température de 100 °C.

2. On tient compte des pertes par convection entre le récipient et l'extérieur. La puissance perdue P' est supposée proportionnelle à l'écart de température entre le système et l'ambiant. Soit :

$$P' = K(T - T_0) \qquad \text{avec} \qquad K = 4{,}0\ \text{W} \cdot \text{K}^{-1}$$

Les autres hypothèses restant inchangées, reprendre le calcul du temps de chauffage de 20 °C à 100 °C.

3. Est-il réaliste de négliger la formation de vapeur d'eau avant que l'on ait atteint la température de 100 °C ? (Réponse qualitative brève).

Étude du régime établi

On considère que la pression à l'intérieur de l'autocuiseur a atteint la valeur de régime $P = 1{,}69$ bar. À ce moment, l'air a entièrement été chassé, la phase vapeur interne est entièrement constituée de vapeur d'eau en équilibre avec le liquide. On continue à chauffer avec une puissance de 2,0 kW. La soupape s'est mise en rotation rapide, laissant s'échapper un jet caractéristique. À partir des données numériques rassemblées en début d'énoncé, répondre aux questions suivantes.

4. Quelle est la température qui règne à l'intérieur de l'autocuiseur ?

5. Quelle masse de vapeur surmonte l'eau liquide (on suppose que la masse de liquide reste sensiblement égale à 1 kg : on est au début de cette phase) ?

6. Avec quel débit (mesuré en grammes par seconde) l'eau s'échappe-t-elle par la soupape ?

7. Sous quel état physique se présente le jet observé : vapeur, eau liquide ou mélange des deux ? Quelle est sa température ? (les réponses appellent des raisonnements clairs plutôt que de longs calculs).

Retour à la température ambiante

On arrête le chauffage, la soupape se referme hermétiquement dès que la pression est inférieure à 1,69 bar. On laisse revenir le système à la température ambiante de 20 °C.

8. Expliquer pourquoi le couvercle semble alors « collé » au récipient ?

9. Calculer la force à exercer sur le couvercle pour arriver à le décoller.

10. Pourquoi est-il beaucoup plus simple d'ouvrir alors la soupape ?

Exercice 4 Transformations réversibles et irréversibles (d'après CAPES 1994)

On notera P, T, V les paramètres pression, température, et volume d'un gaz ; on notera respectivement c_p, c_v les capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant, et γ le rapport $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$. Dans la suite, les systèmes thermodynamiques étudiés seront des gaz parfaits.

Quelques propriétés d'un gaz parfait

1. Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait ; on désignera par n, le nombre de moles, et par R la constante molaire des gaz parfaits.

2.a. Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie H à la fonction d'état énergie interne U.

b. Montrer que (relation de Mayer) $c_p - c_v = \mathrm{R}$.

c. Exprimer c_v en fonction de R et γ.

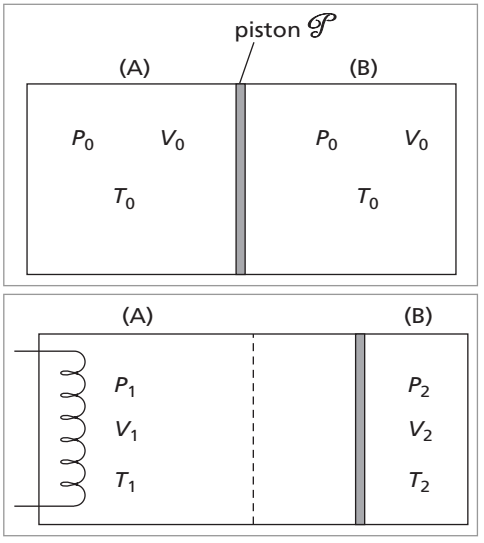
d. n moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial caractérisé par P_0, V_0 jusqu'à un état final caractérisé par P_1, V_1. Montrer que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire : $\Delta U = \dfrac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}$.

Transformations réversibles d'un gaz parfait

Un cylindre horizontal, de volume invariable, est fermé à ses deux extrémités par deux parois fixes. Ce cylindre est séparé en deux compartiments A et B par un piston P mobile sans frottements. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

Dans l'état initial, les deux compartiments A et B contiennent un même nombre de moles d'un gaz parfait dans le même état (figure ci-contre).

On chauffe le compartiment A à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à un état final où la pression dans le compartiment A est $P_1 = 3P_0$ (figure ci-contre).



On pourra considérer la suite des états du système comme une suite d'états d'équilibre.

3. Calculer :

a. Pour l'état final du compartiment B : la pression P_2 ; le volume V_2 ; la température T_2.

b. Pour l'état final du compartiment A : le volume V_1 ; la température T_1.

4. On veut déterminer la quantité de chaleur Q_1 fournie par la résistance chauffante au compartiment A.

a. Montrer que Q_1 s'exprime très facilement en fonction des variations d'énergie interne des gaz des compartiments A et B (respectivement ΔU_1 et ΔU_2).

b. Donner l'expression de Q_1 en fonction de P_0, V_0 et γ.

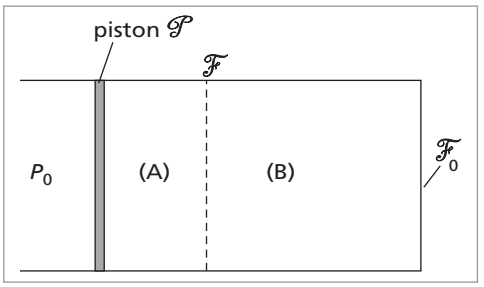
Détente irréversible d'un gaz parfait

Un cylindre horizontal est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe F_0, et à l'autre extrémité par un piston P qui peut coulisser sans frottements le long du cylindre.

Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe F.

Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique P_0 que l'on suppose uniforme et constante.

Dans la situation initiale, le compartiment A de volume V_A contient n moles d'un gaz parfait. Le compartiment B de volume V_B est initialement vide (figure ci-contre).



Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

5. Préciser la pression et la température initiale dans le compartiment A.

6. On perce un orifice dans la paroi fixe F et on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre qu'on supposera atteint.

a. En analysant qualitativement le problème, montrer que selon la valeur de V_B par rapport à une valeur seuil V_{B_s} (qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade de l'étude), deux types de solutions existent ; pour répondre à cette question, on pourra s'intéresser à l'équilibre mécanique du piston dans l'état final.

b. En supposant que V_B est inférieur à la valeur seuil, déterminer les caractéristiques P_1, V_1, T_1 du gaz enfermé dans le cylindre A + B quand le nouvel état d'équilibre est atteint ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données P_0, γ, n, V_A, V_B et de R.

c. Déterminer la valeur seuil V_{B_s} en fonction de V_A et de γ.

d. On suppose cette fois V_B supérieur à V_{B_s}. Déterminer P_2, V_2, T_2 du gaz enfermé à l'intérieur du cylindre dans le nouvel état d'équilibre. On exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données P_0, γ, n, V_A, V_B et de R.

7.a. Déterminer l'entropie d'un gaz parfait (à une constante près) en fonction de n, c_P, γ, P, V.

b. En déduire l'expression de la variation d'entropie ΔS_1 du gaz en fonction de n, γ, V_A, V_B et c_P dans le cas où l'état final est celui du **6.b**. Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

c. Déterminer de la même façon ΔS_2 : l'état final étant celui du **6.d**. Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

Exercice 5 Transformation d'un gaz parfait (d'après CAPES agricole 2000)

Un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1{,}4$) décrit de façon réversible, sans changer d'état, un cycle de Carnot récepteur selon les caractéristiques suivantes (les valeurs numériques non données seront à calculer au **2**) : $n = 0{,}01$ mole

État 1 $P_1 = 1\,000$ hPa	**État 2** $P_2 = 1\,600$ hPa	**État 3** $P_3 = 920$ hPa	**Etat 4** $P_4 = 575$ hPa
$V_1 = 0{,}24$ L	$V_2 = ?$	$V_3 = ?$	$V_4 = ?$
$T_1 = ?$	$T_2 = ?$	$T_3 = ?$	$T_4 = ?$

Transformations	1-2 : isotherme	2-3 : adiabatique	3-4 : isotherme	4-1 : adiabatique

1.a. Donner une définition du gaz parfait (microscopique ou macroscopique).

b. Donner la définition de γ et préciser les facteurs dont il dépend.

c. Préciser ce qu'est un cycle récepteur.

d. Démontrer la loi de Laplace typique d'une transformation adiabatique quasi-statique dans le cas où γ est constant.

2.a. Calculer les valeurs des volumes et des températures inconnues (la constante des gaz parfaits est R = 8,32 SI).

b. Donner l'aspect du graphe $P = f(V)$, dit diagramme de Clapeyron du cycle.

3. Calculer pour chaque transformation :

a. Le travail W mis en jeu ;

b. L'énergie thermique Q, ou chaleur, mise en jeu ;

c. En déduire l'ensemble énergétique $W + Q$. Commenter.

4.a. Calculer la variation d'entropie ΔS au cours de chaque transformation.

b. Calculer la variation d'entropie totale ΔS_t du cycle. Commenter.

c. Donner l'aspect du graphe $T = f(S)$, dit diagramme entropique.

5. On suppose que ce cycle est celui d'une thermopompe, ou pompe à chaleur :

a. Schématiser les échanges thermodynamiques entre les deux sources, le système gaz et l'extérieur.

b. Calculer l'efficacité théorique e, (ou coefficient de performance) de ce récepteur en fonction des températures.

c. Expliquer comment il faut modifier les températures des sources pour augmenter l'efficacité théorique.

d. Expliquer pourquoi au niveau thermodynamique dans la réalité, ce coefficient est bien plus faible.

6. Préciser ce que représente l'aire de chacun des cycles $P = f(V)$ et $T = f(S)$. Commenter.

Exercice 6 Cycle Beau de Rochas (d'après CAPES interne 1995)

Le cycle d'un moteur à explosion d'automobile peut être décrit de la manière simplifiée suivante (cycle Beau de Rochas) dans un cylindre.

Premier temps : étape EA

En E, le piston est au point mort haut.

EA est l'admission du mélange air-carburant à pression et température constantes.

Deuxième temps : étapes AB et BC

AB est une compression adiabatique réversible du mélange.

En B, le piston est au point mort haut et une étincelle électrique allume le mélange.

Durant la transformation BC, la pression passe presque instantanément de P_B à P_C à volume constant.

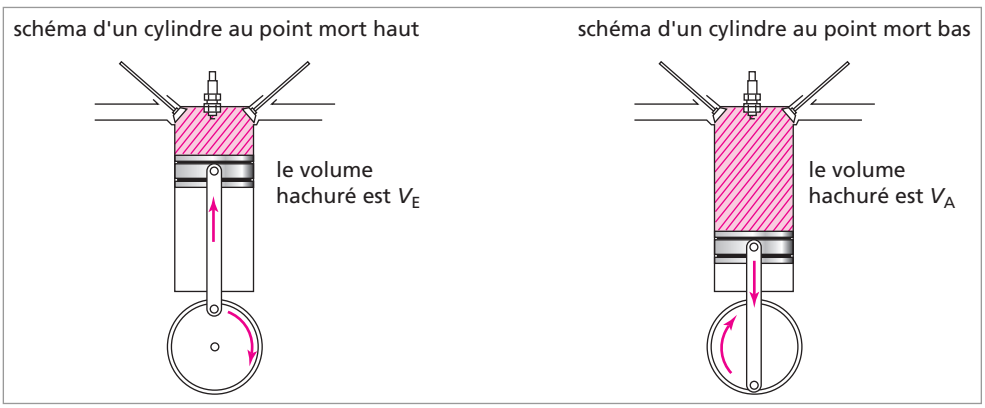
Troisième temps : étape CD

CD est une détente adiabatique réversible du mélange (air et gaz brulés).

Quatrième temps : étapes DA et AE

DA est un refroidissement à volume constant.

AE est un refoulement à pression et température constantes.



L'automobile possède quatre cylindres. Sa cylindrée est $4\,(V_A - V_E)$. Le rapport volumétrique est $a = \dfrac{V_A}{V_E}$. Dans la notice technique de l'automobile (boîte 5 rapports), on lit les indications suivantes.

Caractéristiques principales :

Alésage × course (mm) : 75,8 × 77 ; Cylindrée (cm^3) : 1 390 ; Rapport volumétrique : 9,5/1 ; Pression de compression : 14 bars ; Puissance fiscale : 6 (boîte 4 rapports) – 7 (boîte 5 rapports). Puissance maxi :

– DIN (ch/tr/min) 80/5 750

– ISO (kw/tr/min) 57,5/5 750

Couple maxi :

– DIN (m.kg/tr/min) 11/2 750

– ISO (N.m/tr/min) 106/2 750.

Caractéristiques de la voiture :

Combinaison des vitesses	Rapports de boîte	Démult. avec couple 0,2459	Vit. (km/h) pour 1 000 tr/min(*).
$1^{ère}$	0,2683	0,0659	6,828
$2^{ème}$	0,4883	0,1200	12,429
$3^{ème}$	0,7567	0,1860	19,260
$4^{ème}$	1,0344	0,2543	26,328
$5^{ème}$	1,2580	0,3093	32,049
M.AR.	0,2820	0,0693	7,178
(*) avec pneumatiques 165/70 R13, circonférence de roulement sous charge, 1 725 mm			

Consommation de la voiture à 90 km/h : 5,1 L/100 km :
On supposera, pour tout l'exercice, que l'automobile roule à 90 km/h en 5^e vitesse.
Le carburant utilisé est assimilable à du 2,2,4-triméthylpentane, de formule brute C_8H_{18}, de masse volumique égale à 720 kg/m^3. Sa combustion dégage une quantité de chaleur $5{,}5 \cdot 10^3$ kJ/mol.

Données :
Masses molaires atomiques en g/mol : C=12 ; H=1 ; $R = 8{,}31\,J \cdot mol^{-1}K^{-1}$; température à l'admission : $t_E = 77\,^\circ C$; pression d'admission : $P_E = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa.
On fera d'autre part l'approximation suivante : l'air étant en grand excès par rapport au carburant, on assimilera le mélange qui décrit le cycle EABCDAE à un gaz parfait unique, de coefficient $\gamma = 1{,}4$ ($\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$ est le rapport des capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant), de masse molaire $M = 29{,}0\ g \cdot mol^{-1}$.

1. Tracer l'allure du cycle EABCDE dans un diagramme de Watt (pression en ordonnées, volume en abscisses).

2. Calculer numériquement les volumes V_E et V_A.

3.a. Calculer la vitesse angulaire du moteur.

b. Calculer la durée de la compression AB. On rappelle qu'un cycle EABCDAE (quatre temps) correspond à deux tours de l'arbre moteur. Quelle hypothèse est ainsi justifiée ?

4. Comparer la vitesse moyenne du piston dans la transformation AB à un ordre de grandeur de la vitesse moyenne d'agitation thermique des molécules en A. Quelle hypothèse est ainsi justifiée ?

5. Calculer la pression et la température du gaz dans l'état B.

6.a. Calculer la consommation de carburant par cycle, pour un cylindre.

b. Calculer la quantité de chaleur Q_{BC} reçue par le gaz au cours de la combustion (pour un cylindre).

c. En déduire la température, puis la pression du gaz dans l'état C.

7. Calculer la température et la pression du gaz dans l'état D.

8. Pour chacune des étapes AB, BC, CD, DA, calculer la chaleur et le travail échangés par le gaz. Interpréter les signes obtenus pour chacune de ces grandeurs.

9.a. Définir le rendement thermodynamique du cycle : η.

b. Calculer numériquement η à partir des résultats de la question 8.

c. Montrer que $\eta = 1 - \dfrac{1}{a^{\gamma-1}}$. Calculer numériquement η à l'aide de cette formule.

Exercice 7 Étude d'un gaz monoatomique (d'après CAPES 1989)

Données :

Constante de Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$; constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$

Pour le césium 133, sous une pression de 10^5 Pa :

– la température de fusion : $T_f = 29\ °C$

– la température d'ébullition : $T_e = 670\ °C$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

1. Dans une horloge atomique, la température du four dans lequel se forme la vapeur de césium est voisine de 100 °C.

a. Quel paramètre physique faut-il modifier pour que le césium soit effectivement à l'état de vapeur dans le four ? Justifier la réponse en donnant l'allure du diagramme de stabilité des différentes phases d'un corps pur dans le cas le plus usuel. Donner les noms des points remarquables de ce diagramme.

b. Pour quelle(s) raison(s) est-il préférable d'utiliser une vapeur à 100 °C au lieu de 670 °C ?

2. Dans le four précédent, le césium 133 se comporte comme un gaz parfait monoatomique. Un volume V contient N atomes de masse m (soit $n = \dfrac{N}{V}$ atomes par unité de volume) à la température T.

a. Rappeler les significations, à l'échelle microscopique, de l'expression « gaz parfait ».

b. Indiquer l'expression de l'énergie cinétique E d'un atome de gaz parfait mono-atomique en fonction de sa vitesse.

3. On admet que le gaz précédent obéit à la statistique de Boltzmann : le nombre d'atomes contenus dans un volume infinitésimal dV, dont les vecteurs vitesses ont une norme comprise entre v et $v + dv$ est : $dN = Ae^{-\frac{E}{kT}} v^2 dv dV$.

a. Donner l'expression de N, le nombre total d'atomes contenus dans le volume V en fonction de A.

b. Calculer la vitesse quadratique moyenne u (racine carrée de la moyenne des carrés des vitesses des divers atomes) en utilisant le résultat précédent.

c. Application numérique : calculer cette vitesse pour le césium 133 gazeux à 100 °C.

4. Définir l'énergie interne U du gaz parfait étudié contenu dans le volume V ; donner son expression en fonction de la température absolue T.

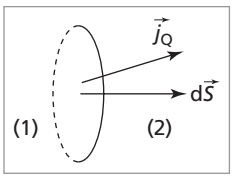
5. En utilisant l'équation des gaz parfaits, montrer que la pression p peut s'écrire sous la forme $p = \frac{1}{3}nmu^2$.

Exercice 8 Transfert de chaleur (d'après CAPES 2001)

Généralités

1. Quels sont les différents processus de transfert thermique ? Associer, chaque fois que possible, une loi (ou son nom) régissant le mode de transfert concerné. Donner des exemples pris dans la vie courante, où ces différents processus interviennent.

2. Pour décrire les transferts d'énergie thermique, on fait parfois intervenir le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q}$, que l'on définit par son flux $\mathrm{d}\phi$ à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ orientée de (1) vers (2) : le flux élémentaire $\mathrm{d}\phi = \overrightarrow{j_Q}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ représente la puissance thermique échangée à travers $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, fournie par 1 et reçue par 2.



Le flux $\mathrm{d}\phi$ étant une grandeur algébrique, expliciter le sens des transferts effectifs de puissance thermique entre (1) et (2) à travers $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ lorsque $\mathrm{d}\phi$ est positif, puis lorsque $\mathrm{d}\phi$ est négatif.

3. L'expression mathématique de $\overrightarrow{j_Q}$ dans le cas du transfert de chaleur à travers un milieu solide, est de la forme $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{\nabla}T$, λ représentant la conductivité thermique du milieu ($\lambda > 0$).

On rappelle l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur gradient $\overrightarrow{\nabla}$:

$$\overrightarrow{\nabla}T(x,y,z,t) = \frac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial T}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial T}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

a. Expliquer la signification du signe « moins » qui intervient dans l'expression de $\overrightarrow{j_Q}$.

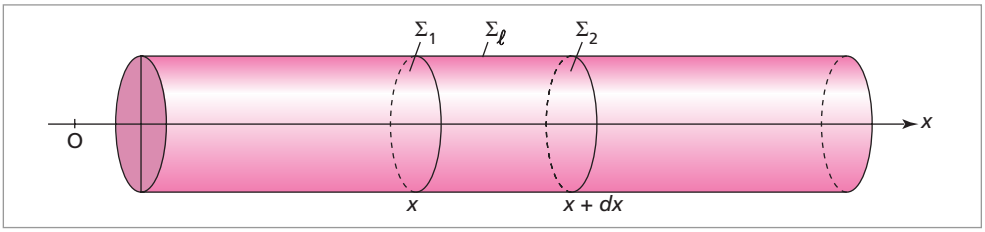
b. Rappeler l'unité de λ.

L'équation de la chaleur à une dimension

Soit un solide de conductivité thermique λ, auquel est attaché le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Sa chaleur massique est notée c, sa masse volumique est notée ρ. Les grandeurs λ, ρ et c seront supposées uniformes et stationnaires. À l'intérieur du solide, la température T est une fonction de la seule variable de position x et du temps t. On note donc $T(x,t)$ cette fonction.

4. Avec ces hypothèses, donner l'expression simplifiée de $\overrightarrow{j_Q}$ en fonction de λ, d'une dérivée partielle de T et d'un vecteur de base unitaire.

5. On considère la portion de solide ci-après :



La portion de solide considérée est délimitée par la surface fermée constituée des surfaces Σ_1, Σ_2 et Σ_ℓ. Les points de Σ_1 ont tous la même abscisse x, ceux de Σ_2 ont pour abscisse $x + \mathrm{d}x$. On note S l'aire des surfaces Σ_1 et Σ_2. La surface Σ_ℓ est une portion de cylindre de hauteur $\mathrm{d}x$ dont les génératrices sont parallèles à l'axe (Ox).
On suppose par ailleurs qu'il n'y a pas de source thermique dans le solide.

a. Soit δQ_1 la quantité de chaleur élémentaire reçue par la portion de solide à travers la surface Σ_1 entre l'instant t et l'instant $(t + \mathrm{d}t)$. Exprimer δQ_1 en fonction de λ, S, $\mathrm{d}t$ et d'une dérivée partielle de T. On aura soin de préciser les valeurs des variables de la dérivée partielle.

b. De même, δQ_2 représente la quantité de chaleur élémentaire cédée par la portion de solide à travers la surface Σ_2 entre l'instant t et l'instant $(t + \mathrm{d}t)$. Exprimer δQ_2 en fonction de λ, S, $\mathrm{d}t$ et d'une dérivée partielle de T. On aura soin de préciser les valeurs des variables de la dérivée partielle.

c. Justifier que la portion de solide n'échange aucune énergie thermique à travers Σ_ℓ.

d. Soit $\delta^2 Q$ la quantité de chaleur totale reçue par la portion de solide entre les instants t et $(t + \mathrm{d}t)$. Relier $\delta^2 Q$ à δQ_1 et δQ_2. Exprimer ensuite $\delta^2 Q$ en fonction d'une dérivée de T, λ, S, $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.

e. Relier également $\delta^2 Q$ à la variation entre ces deux instants, de la température $\mathrm{d}T$ de la portion étudiée. On fera intervenir les grandeurs ρ, c, S et $\mathrm{d}x$.

f. Exprimer la variation de température $\mathrm{d}T$ entre les instants t et $(t + \mathrm{d}t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $T(x, t)$ et de $\mathrm{d}t$.

g. Déduire des trois questions précédentes que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Préciser l'expression de a en fonction de la masse volumique ρ, de la chaleur massique c et de la conductivité thermique λ. Cette relation constitue l'équation de la chaleur à une dimension. Le coefficient a est appelé diffusivité thermique.

Diffusion de la chaleur dans le sol

Le sol est assimilé à un milieu solide homogène de masse volumique ρ, de chaleur massique c et de conductivité thermique λ. Il occupe le demi-espace d'équation $z < 0$, et est surmonté par l'air dont la température moyennée sur une durée assez longue (de l'ordre

du mois) évolue au rythme des saisons. On note $T_{\text{air}}(t)$ cette température moyennée sur un mois, et on modélise son évolution dans le temps par une variation sinusoïdale centrée sur la valeur moyenne annuelle de la température notée T_m :

$$T_{\text{air}}(t) = T_m + T_{\text{A}} \cos(\omega t + \varphi)$$

La pulsation ω correspond à une période égale à un an. Par ailleurs, T_m est supposée constante. De même, on note $T(\text{M}, t)$ la température moyennée sur un mois au point $\text{M}(x, y, z)$ du sol à l'instant t. La situation étant invariante par translation selon les directions $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ du plan $(\text{O}xy)$, T n'est fonction que de z et de t.

Par hypothèse, la température du sol au contact avec l'air, en $z = 0$, est la même que la température de l'air qui le surplombe, ce qui fournit une première condition limite : $T(z = 0, t) = T_{\text{air}}(t) = T_m + T_{\text{A}} \cos(\omega t + \varphi)$

6. En faisant coïncider l'origine des temps avec le moment le plus froid de l'année (pris ici au 1er février), quelle est la valeur de φ ? On suppose que T_{A} est positif.

7. On pose $\theta(z, t) = T(z, t) - T_m$. À z fixé, $\theta(z, t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, car on se situe en régime sinusoïdal forcé, de pulsation ω. On introduit la fonction complexe $\underline{\theta}(z, t) = \underline{\theta}_{\text{A}}(z) \exp(j\omega t)$, avec $j^2 = -1$. On recherche les solutions de l'équation de la chaleur sous la forme $T(z, t) = T_m + \text{R}e(\underline{\theta}(z, t))$.

Dans cette partie, on notera que l'équation de la chaleur a pour expression $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, la diffusivité thermique a ayant l'expression déterminée à la question **5.g**.

a. Justifier que $\theta(z, t)$, puis $\underline{\theta}(z, t)$ sont solutions de l'équation de la chaleur.

b. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\theta}_{\text{A}}(z)$.

c. Donner la forme générale de la solution en $\underline{\theta}_{\text{A}}(z)$, puis en $\underline{\theta}(z, t)$.

d. Dans les deux termes que comporte $\underline{\theta}(z, t)$, identifier celui qui correspond à une onde se propageant dans le sens des z croissants, et celui qui correspond à une onde se propageant dans le sens des z décroissants. Lequel de ces deux termes est physiquement inacceptable et pourquoi ? En déduire la valeur de l'une des deux constantes d'intégration qui interviennent dans l'expression de $\underline{\theta}_{\text{A}}(z)$.

e. Déterminer l'expression de l'autre constante d'intégration, et fournir l'expression définitive de $T(z, t)$ dans le sol.

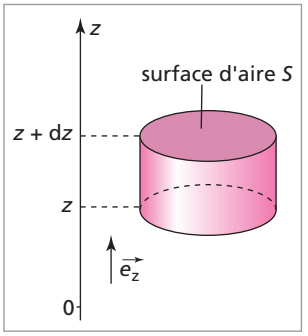
8. On fournit la valeur numérique de la diffusivité thermique $a = 3 \cdot 10^{-7} u$ SI. La valeur numérique de ω se déduit de l'énoncé.

a. Soit une cave dont la profondeur moyenne vaut $|z_m|$. On admet que la température de cette cave est la même que celle du sol voisin à la côte z_m. À quelle profondeur faut-il creuser une cave pour que l'amplitude des variations annuelles de température ne soit plus que le dixième de ce qu'elle est à l'extérieur ?

b. À quel moment de l'année fait-il le plus froid dans la cave creusée à une telle profondeur ?

SOLUTIONS

1 **1.** Considérons un élément de volume cylindrique, de section S, compris entre les cotes verticales z et $z + \mathrm{d}z$. Cet élément de volume étant à l'équilibre on peut lui appliquer le principe fondamental de la dynamique $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.



Les forces qui s'appliquent sur ce volume élémentaire $\mathrm{d}V$ sont :
– les forces de pression s'exerçant sur la surface latérale, parallèles au plan horizontal,
– les forces de pression s'exerçant sur la face « de dessous » de section S, située à la côte z : $\left(SP(z)\,\overrightarrow{e_z}\right)$, où $P(z)$ désigne la pression à la côte z,
– les forces de pression s'exerçant sur la face « de dessus » de section S, située à la côte $(z + \mathrm{d}z)$: $\left(-SP(z + \mathrm{d}z)\,\overrightarrow{e_z}\right)$, où $P(z + \mathrm{d}z)$ désigne la pression à la côte $(z + \mathrm{d}z)$,
– son poids : $\left(-\rho \mathrm{d}V g\,\overrightarrow{e_z}\right)$ où ρ est la masse volumique de l'air (à l'altitude z) et $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$.
En projetant l'expression du principe fondamental de la dynamique sur l'axe (Oz), il vient donc $(-SP(z + \mathrm{d}z)) + (SP(z)) + \left(-\rho S \mathrm{d}z g\right) = 0 \Rightarrow -P(z + \mathrm{d}z) + P(z) = -\mathrm{d}P = \rho g \mathrm{d}z$, $\Rightarrow \mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z$.

2.a. On peut appliquer la loi des gaz parfaits au volume élémentaire précédent :

$$P(z)\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}n \mathrm{R} T(z)$$

Le nombre de moles contenues dans le volume est donné par $\mathrm{d}n = \dfrac{\rho \mathrm{d}V}{M}$, d'où $\rho = \dfrac{P(z)\,M}{\mathrm{R}T(z)}$. En remplaçant dans l'équation locale précédente :

$$\mathrm{d}P = -\frac{PM}{\mathrm{R}T} g \mathrm{d}z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{\mathrm{R}T_0}\frac{1}{(1 - kz)}\mathrm{d}z$$

En intégrant, $\displaystyle\int_{P_0}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P}{P} = \int_{z=0}^{z} -\frac{Mg}{\mathrm{R}T_0}\frac{1}{(1 - kz)}\mathrm{d}z$

$[\ell \mathrm{n}\, P]_{P_0}^{P(z)} = \dfrac{Mg}{k\mathrm{R}T_0}\left[\ell \mathrm{n}\,(1 - kz)\right]_{z=0}^{z} \Rightarrow \ell \mathrm{n}\,\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{Mg}{k\mathrm{R}T_0}\,\ell \mathrm{n}\,(1 - kz)$, et finalement :

$$P = P_0 (1 - kz)^{\alpha}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{Mg}{k\mathrm{R}T_0}$$

b. Calculons d'abord

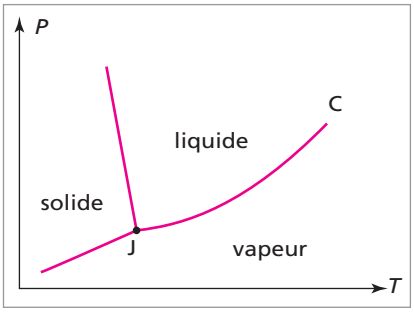
$$\alpha = \frac{Mg}{k\mathrm{R}T_0} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{2{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}32 \cdot 293} = 5{,}3$$

Donc :

$$P = P_0 (1 - kz)^{5{,}3}$$

À 1 500 mètres, $P_{1\,500} = 10^5 \left(1 - 2{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,500\right)^{5{,}3} = 8{,}4 \cdot 10^4$ Pa.

2 **1.** Voir schéma ci-contre



2. J, le point triple est le seul point où on a coexistence à l'équilibre des trois phases. J se situe à l'intersection des trois courbes sur lesquelles on a équilibre entre deux phases (solide/liquide, liquide/vapeur et solide/vapeur). C est le point critique. Au delà de C, on ne peut plus distinguer la phase liquide de la phase vapeur. L'état est alors simplement appelé fluide.

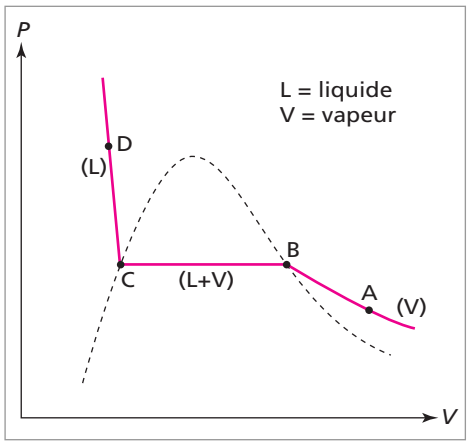
3. La pression de vapeur saturante est la pression à laquelle on a équilibre entre le liquide et la vapeur. Cette grandeur dépend de la température.

4. Dans le cas de l'eau, la courbe d'équilibre entre la phase solide et la phase liquide présente la particularité d'avoir une pente négative. La formule de Clapeyron relie la chaleur latente d'un changement d'état $L_{1\to 2}$ d'une phase 1 vers une phase 2 à la pente de la courbe d'équilibre entre les deux phases au point considéré :

$$L_{1\to 2} = T\,(u_2 - u_1)\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{équilibre}}$$

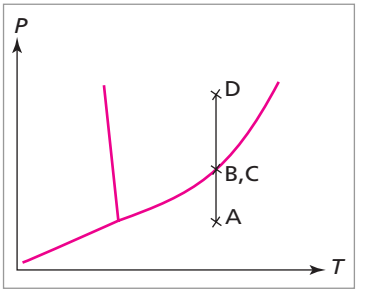
où u désigne le volume massique d'une phase. Dans le cas du changement de phase (solide $\to$ liquide) la chaleur latente est positive. La pente étant négative, il vient $u_{\text{liquide}} - u_{\text{solide}} \leqslant 0$, donc les masses volumiques vérifient $\rho_{\text{liquide}} \geqslant \rho_{\text{solide}}$. En conséquence le solide (la glace) flotte sur le liquide, ce qui est différent du cas des autres corps purs.

5.a. La courbe en pointillés se nomme la courbe de saturation.



b. ABCD est une compression quasi statique isotherme de la vapeur d'eau. Ceci peut être réalisé en plaçant la vapeur d'eau dans un cylindre, aux parois laissant parfaitement passer la chaleur, fermé par un piston mobile sans frottements. On comprime très lentement (aspect quasi-statique), et si le cylindre est placé dans un milieu thermostaté, la transformation est isotherme. De A à B le système est gazeux. La première goutte de liquide apparaît en B, et le changement de phase B-C est isobare. En C tout est liquide et la pression augmente très rapidement si l'on continue à comprimer.

c. Voir figure ci-contre (B et C sont confondus).



6. L'ébullition est le passage de la phase liquide à la phase gazeuse dû à l'agitation thermique des molécules. L'évaporation est également un passage de la phase liquide à la phase gazeuse, dû au fait que la pression partielle de la vapeur (du liquide qui s'évapore) dans la phase gazeuse est inférieure à la pression de vapeur saturante. Par exemple, dans le cas d'un verre d'eau placé dans l'air, comme le milieu extérieur est illimité, la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air n'atteint jamais la pression de vapeur saturante, et toute l'eau s'évapore.

7. On cherche la masse m d'eau contenue dans un volume $V = 1\ \text{m}^3$. Soit d le degré hygrométrique. $d = \dfrac{P_{H_2O}}{P_{sat}(T)}$ où P_{H_2O} est la pression partielle de la vapeur d'eau, et $P_{sat}(T)$ la pression de vapeur saturante. On peut considérer l'air comme un gaz parfait donc :

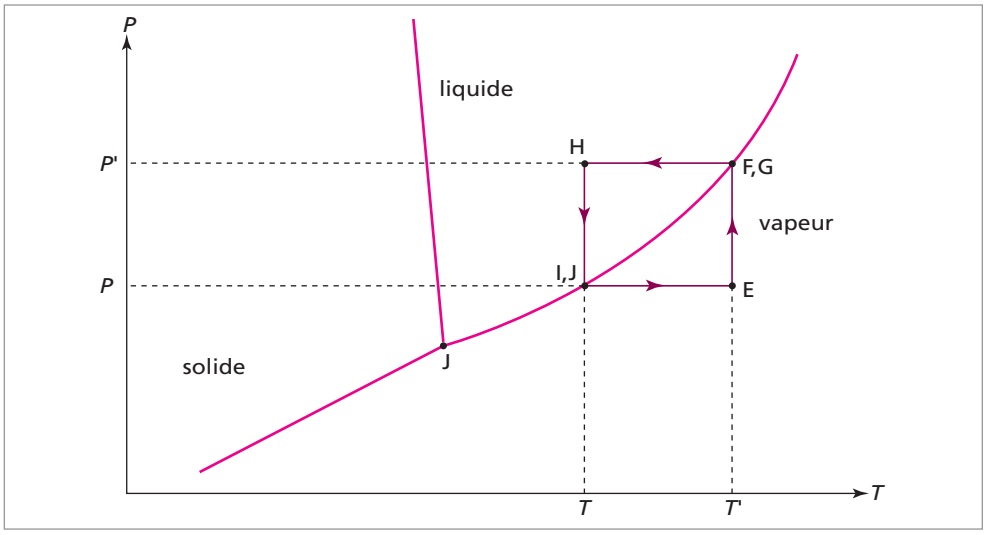
$$P_{H_2O}V = \frac{m}{M}RT$$

Il vient alors $m = \dfrac{dP_{sat}(T)\,MV}{RT}$.

A.N. $m = \dfrac{0{,}7 \times 1 \times 2\,300 \times 18}{8{,}31 \times 293} = 11{,}9\ \text{g}.$

8.a. C'est la chaleur échangée, à la température T, par une mole d'eau liquide se transformant en vapeur.

b.



c. Sur un cycle la variation totale d'énergie interne est nulle : $\Delta U = 0$. Par ailleurs, c'est également la somme de la variation d'énergie interne de chacune des transformations intermédiaires. Cette variation peut être calculée en utilisant $\Delta U = W + Q$ (somme du travail et de la chaleur échangés).
– Transformation E-F : compression isotherme d'un gaz parfait $\Delta U_{EF} = 0$
– Transformation F-G : changement de phase (vapeur → liquide) à la température T' et à la pression P'. $Q_{FG} = -L'$ et $W_{FG} = \int -P'\mathrm{d}V = -P'\Delta V = -P'\left(V'_l - V'_g\right)$, et on néglige le volume molaire du liquide par rapport à celui de la vapeur donc $W_{FG} = P'V'_g$.
– Transformation G-H : compression isobare à la pression P' du liquide pour passer de T' à T. $W = -P'\left(V_H - V_G\right) \simeq 0$ (liquide quasiment incompressible) et $Q = C_{pl}\left(T - T'\right)$.
– Transformation H-I : compression isotherme de l'eau liquide ; D'après le texte $Q_{HI} \simeq 0$ et toujours $W \simeq 0$ pour le liquide.
– Transformation I-J : changement de phase (liquide → vapeur) à la température T et à la pression P. $W = \int -P\mathrm{d}V = -P\left(V_g - V_l\right) \simeq -PV_g$ et $Q = L$.
– Transformation J-E : dilatation isobare à la pression P du gaz parfait pour passer de T à T'. $W = -P\left(V_E - V_g\right)$ et $Q = \Delta H = C_{pg}\left(T' - T\right)$ (la chaleur est donnée par la variation d'enthalpie, puisque la transformation est isobare).
Finalement :

$$0 + P'V'_g - L' + C_{pl}\left(T - T'\right) + 0 - P\cancel{V_g} + L + C_{pg}\left(T' - T\right) - P\left(V_E - \cancel{V_g}\right) = 0$$

en écrivant la loi des gaz parfaits au point E, on a $PV_E = RT'$ et au point J : $P'V'_g = RT'$.
Il vient alors $L - L' = \left(C_{pl} - C_{pg}\right)\left(T' - T\right)$.

d. Par analogie avec l'expression précédente $L = L_0 - aT$ avec $a = C_{pl} - C_{pg}$ et $L_0 = L' + \left(C_{pl} - C_{pg}\right)T'$.

3 **1.** Soit Q la chaleur échangée par l'ensemble (récipient + eau) durant le temps t. Elle s'écrit $Q = mc_r\left(T - T_0\right) + m_{eau}c\left(T - T_0\right)$, où $T = 100\ °C$. Comme on néglige toute perte thermique on a également $Q = Pt$. Il vient donc : $t = \dfrac{1}{P}\left(T - T_0\right)\left(mc_r + m_{eau}c\right)$.

A.N. $t = \dfrac{1}{2\cdot 10^3}(100 - 20)(4{,}2 \times 460 + 4\,180) = 245\ \mathrm{s} \simeq 4\ \mathrm{min}$.

2. T désigne maintenant la température du système à un instant t quelconque. Le bilan énergétique entre t et $t + \mathrm{d}t$, où la température du système varie de $\mathrm{d}T$, s'écrit : $mc_r\mathrm{d}T + m_{eau}c\mathrm{d}T + P'\mathrm{d}t = P\mathrm{d}t$, soit $(mc_r + m_{eau}c)\mathrm{d}T + K(T - T_0)\,\mathrm{d}t = P\mathrm{d}t$. En séparant les variables, et en intégrant :

$$\int_{T_0}^{T} \frac{mc_r + m_{eau}c}{P - K(T - T_0)}\mathrm{d}T = \int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow t = \frac{mc_r + m_{eau}c}{-K}\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{P - K(T - T_0)}{P}\right)$$

A.N. $t = \dfrac{4{,}2 \times 460 + 4\,180}{-4}\,\ell\mathrm{n}\left(1 - \dfrac{4 \times (100 - 20)}{2\cdot 10^3}\right) = 266\ \mathrm{s} \approx 4\ \mathrm{min}26\ \mathrm{s}$.

3. La question signifie : la chaleur échangée par l'eau pour former de la vapeur est-elle négligeable devant les autres chaleurs échangées ? Le volume dont dispose la vapeur est de $V_{\text{vap}} = h \times \pi R^2 - V_{\text{eau}}$ où $V_{\text{eau}} = 1$ litre. Numériquement $V_{\text{vap}} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ m^3. La masse de vapeur correspondante est $m_{\text{vap}} = \dfrac{V_{\text{vap}}}{V_{\text{massique}}}$, où le volume massique est donné dans le tableau. La chaleur nécessaire au changement d'état est donc $Q_{\text{vap}} = \dfrac{8{,}8 \cdot 10^{-3}}{1{,}673} \times 2\,257$ kJ $\simeq 8$ kJ. Comparons cette valeur à Pt, par exemple : $Pt = 2 \cdot 10^3 \times 266 = 532$ kJ. Il semble donc légitime de négliger la formation de vapeur d'eau dans le bilan énergétique.

4. On est à l'équilibre donc d'après le tableau $T = 115\ ^\circ$C.

5. Même raisonnement qu'à la question précédente $m_{\text{vap}} = \dfrac{V_{\text{vap}}}{V_{\text{massique}}}$ où $V_{\text{vap}} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ m^3, mais cette fois-ci, il faut considérer le volume massique à 115 °C. Cela donne $m_{\text{vap}} \simeq 8{,}5$ g.

6. On est en régime permanent, la vapeur d'eau qui s'échappe par la soupape compense donc exactement la vapeur d'eau formée dans le même temps. Donc le débit d est égal à la masse d'eau évaporée durant une seconde : $m_{1s} L_V + K(T_{115} - T_0) = Pt$ ce qui donne $d = m_{1s} = \dfrac{2 \cdot 10^3 \times 1 - 4 \times 95}{2\,215 \cdot 10^3} = 0{,}7$ g $\cdot$ s^{-1}.

7. À la sortie de l'autocuiseur la vapeur passe brusquement de 1,69 bar à 1 bar, il y a donc condensation au moins d'une partie du jet.

8. À l'intérieur de l'autocuiseur le mélange liquide/vapeur est à l'équilibre à 20 °C. D'après le tableau la pression à l'intérieur est donc de 0,0234 bar. Le couvercle semble donc collé au récipient.

9. La force à exercer est de :

$$F = (P_{\text{ext}} - P_{\text{int}})\,\pi R^2 = (1{,}013 - 0{,}0234) \cdot 10^5 \cdot \pi \left(14 \cdot 10^{-2}\right)^2 \simeq 6 \cdot 10^3 \text{ N}$$

10. Lorsque l'on ouvre la soupape on a immédiatement $P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

4

1. $PV = n\text{R}T$

2.a. $H = U + PV$

b. En différentiant la relation précédente $\text{d}H = \text{d}U + \text{d}(n\text{R}T) = \text{d}U + n\text{R}\text{d}T$. Or pour un gaz parfait l'enthalpie et l'énergie interne ne dépendent que de la température et vérifient $\text{d}H = nc_{\text{P}}\text{d}T$ et $\text{d}U = nc_{\text{V}}\text{d}T$. En simplifiant par n, $c_{\text{P}} - c_{\text{V}} = \text{R}$.

c. $\gamma = \dfrac{c_{\text{P}}}{c_{\text{V}}} \Rightarrow c_{\text{P}} = \gamma c_{\text{V}} \Rightarrow \gamma c_{\text{V}} - c_{\text{V}} = \text{R}$, et on obtient la relation bien connue $c_{\text{V}} = \dfrac{\text{R}}{\gamma - 1}$.

d. $\Delta U = nc_V \Delta T = n\dfrac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$, où T_0 et T_1 sont les températures respectives de l'état initial et de l'état final.

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1}(nRT_1 - nRT_2) = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}.$$

3.a. • L'équilibre mécanique du piston impose $P_2 = P_1 = 3P_0$.
• Pour le compartiment B la transformation est quasi-statique et adiabatique, on peut donc écrire la loi de conservation :

$$P_0V_0^\gamma = P_2V_2^\gamma = 3P_0V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0.$$

• La loi des gaz parfaits peut être écrite dans l'état initial et dans l'état final $P_0V_0 = nRT_0$ et $P_2V_2 = nRT_2$. Le rapport des deux expressions donne :

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{P_2V_2}{P_0V_0} = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = T_0 3^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

b. • Les parois sont rigides donc :

$$V_1 + V_2 = 2V_0 \Rightarrow V_1 = 2V_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = \left(2 - \frac{1}{3^{\frac{1}{\gamma}}}\right) V_0$$

• La loi des gaz parfaits donne encore :

$$\frac{P_1V_1}{P_0V_0} = \frac{T_1}{T_0} \Rightarrow T_1 = 3.\left(2 - \frac{1}{3^{\frac{1}{\gamma}}}\right).T_0.$$

4.a. Le premier principe appliqué à l'ensemble des deux compartiments s'écrit $\Delta U_{\text{total}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1$ (le travail échangé est de fait nul puisque les parois sont rigides).

b. D'après la première partie :

$$Q_1 = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{1}{\gamma - 1}(P_1V_1 - P_0V_0) + \frac{1}{\gamma - 1}(P_2V_2 - P_0V_0)$$

Et, $P_1V_1 = 3P_0\left(2 - 3^{-\frac{1}{\gamma}}\right)V_0, P_2V_2 = 3P_0.3^{-\frac{1}{\gamma}}V_0$.
D'où $Q_1 = \dfrac{P_0V_0}{\gamma - 1}\left(6 - 3^{1-\frac{1}{\gamma}} + 3^{1-\frac{1}{\gamma}} - 2\right) \Rightarrow Q_1 = 4\dfrac{P_0V_0}{\gamma - 1}$.

5. L'équilibre mécanique du piston impose pour la pression initiale $P_i = P_0$. La loi des gaz parfaits donne alors pour la température initiale $T_i = \dfrac{P_0V_A}{nR}$.

6.a. Lorsque l'orifice est percé, le gaz du compartiment A diffuse dans le compartiment B, de façon à être réparti uniformément dans l'ensemble des deux compartiments. Le nombre de moles diminue dans A et la pression aussi, le piston se déplace donc de gauche à droite, ce qui fait remonter la pression dans A. Le mouvement du piston ne s'arrête (état

final) que si l'on a retrouvé la pression P_0 dans le compartiment A. On a donc deux types de solutions : si V_B est « très grand », le déplacement du piston ne pourra pas compenser la perte de pression très forte dans A, et le piston se déplacera jusqu'à être en butée sur la paroi fixe F. Au contraire, pour V_B « très petit » le piston s'arrêtera avant d'être en butée. La situation limite, où le mouvement du piston s'arrête précisément sur F, correspond à la valeur limite $V_B = V_{B_s}$.

b. • Le piston s'arrête avant F, son équilibre impose $P_1 = P_0$.
• On applique le premier principe de la thermodynamique à l'ensemble des deux compartiments $\Delta U = W + Q$, où la chaleur échangée Q est nulle, car les parois sont adiabatiques. Le travail échangé W doit être calculé à partir de sa formulation générale $W = \int -P_{ext}\mathrm{d}V$, car il n'est pas précisé si la transformation est quasi-statique ou non. Donc $W = -P_0\Delta V = -P_0(V_1 - V_A - V_B)$. Par ailleurs, $\Delta U = \Delta U_{gaz} = \dfrac{1}{\gamma - 1}(P_1V_1 - P_0V_0)$ d'après la première partie. En égalant les deux quantités il vient, $V_1 = V_A + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}V_B$.
• La température est donnée par $P_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \dfrac{P_0}{nR}\left(V_A + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}V_B\right)$.

c. La situation limite du cas examiné précédemment (piston en butée) correspond à $V_1 = V_{B_s}$. Soit $V_A + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}V_{B_s} = V_{B_s}$, et en simplifiant : $V_{B_s} = \gamma V_A$.

d. • Tout le gaz est contenu dans B, la pression vérifie $P_2 < P_0$, et on a $V_2 = V_B$.
• On écrit comme précédemment le premier principe de la thermodynamique, $\Delta U = W + \cancel{Q} = -P_0(\cancel{V_B} - V_A - \cancel{V_B}) = P_0V_A = \dfrac{1}{\gamma - 1}(P_2V_B - P_0V_A)$, d'où $P_2 = \dfrac{\gamma P_0V_A}{V_B}$.
• Enfin, $T_2 = \dfrac{\gamma P_0V_A}{nR}$.

7.a. La différentielle de l'entropie est donnée par $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q_{rev}}{T}$, et la chaleur échangée dans une transformation élémentaire réversible peur être calculée par le premier principe $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q_{rev} = -P\mathrm{d}V + \delta Q_{rev} \Rightarrow \delta Q_{rev} = nc_V\mathrm{d}T + P\mathrm{d}V$. Donc

$$\mathrm{d}S = \frac{nR}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{P}{T}\mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}S = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P}{T} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V} = \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right)nR\frac{\mathrm{d}V}{V} + nR\frac{1}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}P}{P}$$

$$= n\frac{R}{\gamma - 1}\left(\gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{\mathrm{d}P}{P}\right).$$

En intégrant $S = \dfrac{nc_P}{\gamma}\ell n(PV^\gamma) + \text{cste}$.

b. Dans cette question on a pour l'état initial : (P_0, V_A) et pour l'état final : $\left(P_0, V_\text{A} + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} V_\text{B}\right)$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \frac{nc_\text{P}}{\gamma} \ell\text{n} \left(P_0 \left(V_\text{A} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_\text{B}\right)^\gamma\right) - \frac{nc_\text{P}}{\gamma} \ell\text{n} \left(P_0 V_\text{A}^\gamma\right) \\ &= \frac{nc_\text{P}}{\gamma} \ell\text{n} \left(\left(\frac{V_\text{A} + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} V_\text{B}}{V_\text{A}}\right)^\gamma\right) \\ &= nc_\text{P} \ell\text{n} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{V_\text{B}}{V_\text{A}}\right)\end{aligned}$$

D'après l'expression obtenue ΔS_1 est strictement positif. Rappelons que d'après le deuxième principe de la thermodynamique, pour un système quelconque, la variation d'entropie est la somme de deux contributions : $\Delta S = \displaystyle\int \frac{\delta Q}{T} + \int \delta_i S$. Le premier terme est relatif aux échanges de chaleur avec le milieu extérieur, et le deuxième est relatif à l'existence (ou non) d'irréversibilité dans l'évolution subie par le système : $\delta_i S = 0$ si l'évolution est réversible, $\delta_i S > 0$, dans le cas contraire. Ici le gaz est isolé thermiquement et subit une transformation irréversible, il est donc conforme de trouver $\Delta S_1 > 0$.

c. Dans cette question on a pour l'état initial : (P_0, V_A) et pour l'état final : $\left(P_2 = \dfrac{\gamma P_0 V_\text{A}}{V_B}, V_2 = V_B\right)$. La variation d'entropie est donc :

$$\Delta S_2 = \frac{nc_p}{\gamma} \ell\text{n} \left(\frac{\dfrac{\gamma \cancel{P_0} V_\text{A}}{V_B} V_B^\gamma}{\cancel{P_0} V_\text{A}^\gamma}\right) = \frac{nc_p}{\gamma} \ell\text{n} \left(\gamma \left(\frac{V_B}{V_\text{A}}\right)^{\gamma - 1}\right)$$

De la même manière qu'à la question précédente la conformité au second principe impose de vérifier $\Delta S_2 > 0$. A-t-on $\gamma \left(\dfrac{V_B}{V_\text{A}}\right)^{\gamma - 1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{V_B}{V_\text{A}} > \left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \Leftrightarrow V_B > \left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} V_\text{A}$?

On sait que $V_B > V_{B_s} = \gamma V_\text{A}$, il suffit donc de vérifier $\gamma > \left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} < 1$, ce qui est le cas puisque $\gamma > 1$.

5

1.a. Au niveau microscopique, une définition du gaz parfait est vue dans la correction de l'extrait du capes externe 1989 (exercice 7).
Au niveau macroscopique, un gaz est parfait s'il vérifie la loi de Boyle-Mariotte $PV = n\text{R}T$.

b. Le rapport γ est défini par $\gamma = \dfrac{c_\text{p}}{c_\text{v}}$, où c_p et c_v sont respectivement les chaleurs molaires à pression constante et à volume constant. Ces deux grandeurs peuvent dépendre de la température, donc a priori γ est une fonction de T.

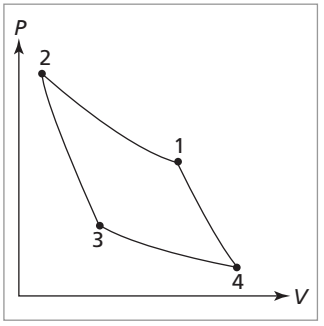
c. Un cycle est dit récepteur lorsque le travail total W échangé par le système au cours du cycle vérifie $W \geqslant 0$.

d. La réponse à cette question est donnée dans le cours paragraphe 6.3.

2.a. Pour calculer V_2, on utilise $P_1V_1 = P_2V_2 = n\mathrm{R}T_1$ puisque la transformation 1-2 est isotherme. Même méthode pour V_4. Pour calculer V_3 on utilise $P_2V_2^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma}$ puisque la transformation 2-3 est adiabatique réversible (donc quasi-statique). Le calcul des différentes températures peut être fait à l'aide de la relation $PV = n\mathrm{R}T$.

$P_1 = 10^5$ Pa	$P_2 = 1{,}600 \cdot 10^5$ Pa	$P_3 = 0{,}920 \cdot 10^5$ Pa	$P_4 = 0{,}575 \cdot 10^5$ Pa
$V_1 = 0{,}24$ L	$V_2 = 0{,}15$ L	$V_3 = 0{,}22$ L	$V_4 = 0{,}36$ L
$T_1 = 288$ K	$T_2 = 288$ K	$T_3 = 247$ K	$T_4 = 247$ K

b. Pour une isotherme P varie en $\dfrac{1}{V}$, pour une adiabatique P varie en $\dfrac{1}{V^{\gamma}}$ (avec $\gamma > 1$), l'allure du diagramme est donc la suivante :



3.a. Comme les transformations envisagées sont réversibles, donc quasi-statiques, le travail est donné pour chaque transformation par $W = -\int P\mathrm{d}V$.

• Pour l'isotherme 1-2 :

$$W_{12} = -\int_1^2 P\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{n\mathrm{R}T}{V}\mathrm{d}V$$

Durant la transformation la température est constante et vaut T_1 donc :

$$W_{12} = -n\mathrm{R}T_1\,[\ell\mathrm{n}\,V]_{V_1}^{V_2} = -n\mathrm{R}T_1\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

A.N. $W_{12} = -0{,}01 \times 8{,}32 \times 288\,\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{0{,}15}{0{,}24}\right) = 11{,}26$ J.

• Pour l'adiabatique 2-3, le premier principe impose $W_{23} = \Delta U_{23}$ (variation d'énergie interne). Soit $W_{23} = nc_{\mathrm{v}}\Delta T = n\dfrac{\mathrm{R}}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$, en utilisant la relation de Mayer.

A.N. $W_{23} = 0{,}01 \times \dfrac{8{,}32}{0{,}4}(247 - 288) = -8{,}53$ J.

• Comme précédemment pour l'isotherme 3-4 :

$$W_{34} = -n\mathrm{R}T_3\,\ell\mathrm{n}\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

A.N. $W_{34} = -0{,}01 \times 8{,}32 \times 247\,\ell\mathrm{n}\,\dfrac{0{,}36}{0{,}22} = -10{,}1$ J.

• Et enfin pour l'adiabatique 4-1 :

$$W_{41} = n\frac{\mathrm{R}}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$$

A.N. $W_{41} = -0{,}01 \times \dfrac{8{,}32}{0{,}4}(288 - 247) = 8{,}53\,\mathrm{J}$.

b. • Pour l'isotherme 1-2, $\Delta U_{12} = 0$ puisqu'il s'agit d'un gaz parfait, donc d'après le premier principe la chaleur échangée est $Q_{12} = -W_{12} = -11{,}26\,\mathrm{J}$.
• Pour l'adiabatique 2-3, on a par définition $Q_{23} = 0$.
• Pour l'isotherme 3-4, $Q_{34} = -W_{34} = 10{,}1\,\mathrm{J}$.
• Pour l'adiabatique 4-1, $Q_{41} = 0$.

c. L'ensemble énergétique est :

$$W + Q = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} + Q_{12} + \cancel{Q_{23}} + Q_{34} + \cancel{Q_{41}}.$$

A.N. $W + Q = 11{,}26 - 8{,}53 - 10{,}1 + 8{,}53 - 11{,}26 + 10{,}1 = 0\,\mathrm{J}$. Il est normal de vérifier sur le cycle $W + Q = 0$, car $W + Q = \Delta U_{\text{cycle}}$ et $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$ puisque U est une fonction d'état.

4.a. • Pour l'isotherme réversible 1-2, d'après le second principe :

$$\Delta S_{12} = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_1}\int \delta Q = \frac{Q_{12}}{T_1}$$

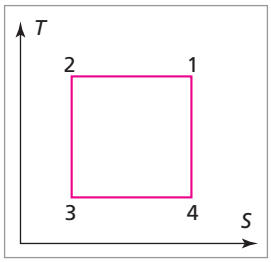
A.N. $\Delta S_{12} = \dfrac{-11{,}26}{286} = -0{,}04\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.
• Pour l'adiabatique réversible 2-3, $\Delta S_{23} = 0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.
• Pour l'isotherme réversible 3-4, comme précédemment $\Delta S_{34} = \dfrac{Q_{34}}{T_3}$.
A.N. $\Delta S_{34} = \dfrac{10{,}1}{247} = 0{,}04\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.
• Pour l'adiabatique réversible 4-1, $\Delta S_{41} = 0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

b. La variation d'entropie totale sur le cycle est :

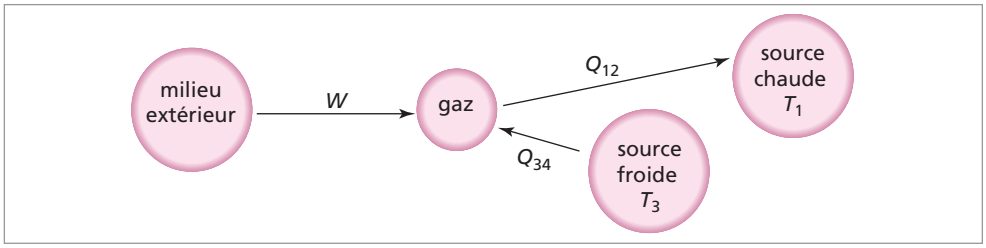
$$\Delta S_t = \Delta S_{12} + \cancel{\Delta S_{23}} + \Delta S_{34} + \cancel{\Delta S_{41}} = -0{,}04 + 0{,}04 = 0\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$$

Ce résultat est normal car l'entropie est une fonction d'état.

c. Sur les isothermes la température reste évidemment constante, sur les adiabatiques (réversibles) l'entropie reste constante. L'allure du diagramme entropique est donc la suivante :



5.a.



b. L'efficacité d'une pompe à chaleur est par définition $e = \dfrac{\text{"chaleur-prélevée"}}{\text{"énergie-dépensée"}} = \dfrac{Q_{34}}{W}$, où W représente le travail sur la totalité d'un cycle. Or, sur le cycle d'après le premier principe :

$$Q_{12} + Q_{34} + W = 0 \Rightarrow W = -Q_{12} - Q_{34} \Rightarrow e = -\frac{Q_{34}}{Q_{12} + Q_{34}} = -\frac{1}{1 + \dfrac{Q_{12}}{Q_{34}}}$$

Avec le second principe sur le cycle :

$$\Delta S = 0 \Rightarrow \frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_3} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{12}}{Q_{34}} = -\frac{T_1}{T_3}$$

Il vient donc :

$$e = \frac{T_3}{T_1 - T_3}$$

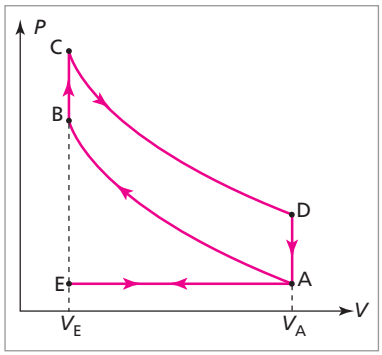
A.N. $e = 6{,}0$.

c. D'après l'expression obtenue on voit qu'il faut diminuer le plus possible l'écart de température entre les deux sources de chaleur pour améliorer l'efficacité.

d. Dans la réalité, l'efficacité est toujours plus faible que celle qui a été calculée car les transformations réelles ne sont pas réversibles. L'égalité utilisée $\Delta S = 0 \Rightarrow \dfrac{Q_{12}}{T_1} + \dfrac{Q_{34}}{T_3} = 0$, n'est donc plus vérifiée. Elle est remplacée par l'inégalité de Clausius $\dfrac{Q_{12}}{T_1} + \dfrac{Q_{34}}{T_3} < 0$, qui traduit l'existence d'irréversibilité. Ce qui implique dans la réalité $e < \dfrac{T_3}{T_1 - T_3}$.

6. L'aire du diagramme de Clapeyron représente l'opposé du travail échangé par le système puisque $W = -\int P\mathrm{d}V$. De même, l'aire du diagramme entropique représente la chaleur échangée puisque $Q = \int T\mathrm{d}S$. Cela permet parfois une détermination graphique des grandeurs énergétiques W et Q.

6 **1.** Voir figure ci-contre.



2. On connaît la cylindrée $4\,(V_A - V_E) = 1\,390\ \text{cm}^3$ et le rapport volumétrique $a = \dfrac{V_A}{V_E} = 9{,}5$. On en déduit $V_A = 388{,}4\ \text{cm}^3$ et $V_E = 40{,}9\ \text{cm}^3$.

3.a. D'après les données, en 5e vitesse, 32,049 km/h correspondent à 1 000 tr/min. Donc 90 km/h correspondent à une vitesse angulaire $\omega = 2\,808$ tr/min.

b. On sait qu'1 cycle = 2 tours = 4 temps. Donc la compression AB, qui compte pour 1 temps, correspond à $\dfrac{1}{2}$ tour. Donc la durée de la compression est de :

$$t_{AB} = \frac{0{,}5 \times 60}{2\,808{,}2} = 1{,}06 \cdot 10^{-2}\ \text{s}$$

Ce temps étant très court, l'hypothèse « adiabatique » est justifiée.

4. On a vu $t_{AB} = 1{,}06 \cdot 10^{-2}$ s. La distance à parcourir par le piston est $l_{AB} = 77$ mm. Donc la vitesse moyenne v qui vérifie $l_{AB} = vt_{AB}$ est de $v = 7{,}3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour un gaz parfait l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule est $\langle E_c \rangle = \dfrac{3}{2}\text{k}T = \dfrac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$. ($m$ est la masse d'une molécule, k la constante de Boltzmann). D'où la vitesse quadratique moyenne d'une molécule $v_q = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{3\text{k}T}{m}}$, ou encore en fonction de la masse molaire $v_q = \sqrt{\dfrac{3\text{R}T}{M}} = \sqrt{\dfrac{3.8{,}32.\,(77 + 273)}{29 \cdot 10^{-3}}} = 549\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Au vu de cet ordre de grandeur, le piston se déplace très lentement vis-à-vis des molécules et le trajet AB constitue donc une transformation quasi-statique. Par ailleurs, on néglige les frottements, l'hypothèse « réversible » est donc justifiée.

5. Le trajet AB étant adiabatique réversible, on peut écrire $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$, avec $P_A = P_E$ et $V_B = V_E$. Il vient $P_B = P_E \left(\dfrac{V_A}{V_E}\right)^\gamma = P_E a^\gamma$.

A.N. $P_B = 23{,}4 \cdot 10^5$ Pa. Par ailleurs, on peut écrire la loi des gaz parfaits dans les états A et B et on obtient $T_B = T_E a^{\gamma - 1}$.

A.N. $T_B = 861$ K.

6.a. À 90 km/h la consommation est de 5,1 L pour 100 km (ou encore pour $\dfrac{100}{90}$ h). Pour un cycle = 4 temps, la consommation est donc de $\dfrac{4 \times 1{,}06 \cdot 10^{-2} \times 90}{100 \times 60 \times 60} \times 5{,}1 = 5{,}4 \cdot 10^{-5}$ L ou encore 0,0388 g de carburant.

b. Pendant la combustion une masse de 0,0388 g de carburant est consommée soit $n = \dfrac{0{,}0388}{114} = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$ mol, pour les 4 cylindres. La combustion pour un cylindre dégage donc $Q_{BC} = \dfrac{5{,}5 \cdot 10^{6} \times 3{,}4 \cdot 10^{-4}}{4} = 467{,}5$ J.

c. BC est une transformation isochore donc :

$$Q_{BC} = n_{gaz} c_v (T_C - T_B) \Rightarrow T_C = T_B + \frac{Q_{BC}(\gamma - 1)}{n_{gaz} R}$$

Le nombre de moles de gaz se calcule à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$n_{gaz} = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{P_E V_A}{R T_E} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{5} \times 388{,}4 \cdot 10^{-6}}{8{,}31.(77 + 273)} = 1{,}34 \cdot 10^{-2} \text{ mole.}$$

D'où $T_C = 861 + \dfrac{467{,}5 \times 0{,}4}{1{,}34 \cdot 10^{-2} \times 8{,}31} = 2\,540$ K.

Et la pression $P_C = \dfrac{1{,}34 \cdot 10^{-2} \times 8{,}31 \times 2\,540}{40{,}9 \cdot 10^{-6}} = 6{,}91 \cdot 10^{6}$ Pa.

7. Le trajet CD est une adiabatique réversible donc on peut écrire « $PV^{\gamma} = \text{Cte}$ » ou encore « $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$ » : $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_C \left(\dfrac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$. **A.N.** $T_D = 1\,032$ K.

Et la loi des gaz parfaits donne $P_D = \dfrac{n R T_C}{V_A} \left(\dfrac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$. **A.N.** $P_D = 2{,}96 \cdot 10^{5}$ Pa.

8. • Étape AB adiabatique :

Q=0 ; $W = \Delta U = n_{gaz} \dfrac{R}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = \dfrac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$. **A.N.** $W = 142{,}1$ J.

• Étape BC isochore :

W=0 ; $Q_{BC} = 467{,}5$ J déjà calculé.

• Étape CD adiabatique :

Q=0 ; $W = \dfrac{P_D V_D - P_C V_C}{\gamma - 1} = \dfrac{P_D V_A - P_C V_E}{\gamma - 1}$. **A.N.** $W = -419{,}1$ J.

• Étape DA isochore :

W=0 ; $Q = \dfrac{P_A V_A - P_D V_D}{\gamma - 1} = \dfrac{P_A V_A - P_D V_A}{\gamma - 1}$ **A.N.** $Q = -190{,}3$ J.

Lorsque Q est positif la chaleur est reçue par le gaz, dans le cas contraire elle est cédée. Idem pour le travail.

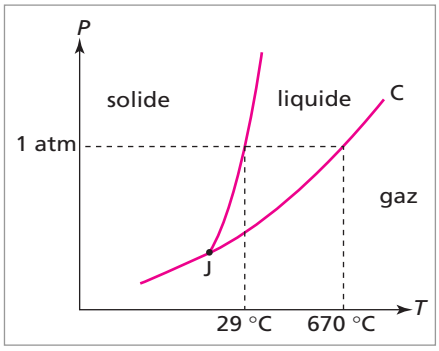
9.a. Par définition le rendement du cycle est $\eta = -\dfrac{\text{"travail-fourni-sur-le-cycle"}}{\text{"chaleur-reçue-sur-le-cycle"}}$.

Donc $\eta = -\dfrac{(W_{AB} + W_{CD})}{Q_{BC}}$.

b. À partir des résultats obtenus, on calcule $\eta = 59$ %.

c. $\eta = -\dfrac{\cancel{\frac{nc_v}{\gamma-1}}[(T_B - T_A) + (T_D - T_C)]}{\cancel{\frac{nc_v}{\gamma-1}}(T_C - T_B)} = 1 - \dfrac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$. Or $T_B = T_E a^{\gamma-1}$, $T_A = T_E$, et $T_D = T_C.\dfrac{1}{a^{\gamma-1}}$ donc $\eta = 1 - \dfrac{1}{a^{\gamma-1}}$. **A.N.** $\eta = 0{,}6$.

7 **1.a.** Il faut modifier la pression. En effet, on voit sur la figure ci-contre qu'à la pression atmosphérique à 100 °C le césium est liquide. Pour obtenir une vapeur à cette température il faut baisser la pression. Les points remarquables du diagramme (P, T) sont le point triple J, où les trois phases coexistent, et le point critique C, au-delà duquel on ne distingue plus la vapeur du liquide.



b. À 100 °C l'énergie cinétique des atomes est plus faible qu'à 670 °C.

2.a. L'expression « gaz parfait » implique que l'on peut considérer les molécules comme ponctuelles, et qu'il n'y a pas d'interaction entre ces molécules. Leur mouvement est uniquement dû à « l'agitation thermique ».

b. L'énergie cinétique d'un atome d'un gaz parfait monoatomique se réduit à une énergie cinétique de translation : $E = \dfrac{1}{2}mv^2$, où m est la masse de l'atome et v sa vitesse.

3.a. Le nombre d'atomes contenus dans V et dont la vitesse est comprise entre v et $v + \mathrm{d}v$ est $A\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}v^2\mathrm{d}vV$, où $E = \dfrac{1}{2}mv^2$.

Le nombre total dans V est donc $N = \displaystyle\int_0^\infty A\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}v^2\mathrm{d}vV$, puisque le module de la vitesse peut varier entre 0 et ∞. Soit $N = AV\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v = AV\int_0^\infty \mathrm{e}^{-av^2}v^2\mathrm{d}v$ en posant $a = \dfrac{m}{2kT}$. D'après les indications de l'énoncé $N = AV\dfrac{kT}{2m}\sqrt{\dfrac{2\pi kT}{m}}$.

b. $u = \sqrt{\langle v^2\rangle}$. Par définition $\langle v^2\rangle = \displaystyle\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v$, où $f(v)\mathrm{d}v$ est la probabilité d'avoir le module de la vitesse dans l'intervalle $[v, v + \mathrm{d}v]$, soit :

$$f(v)\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{A\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}v^2\mathrm{d}vV}{A\dfrac{kT}{2m}\sqrt{\dfrac{2\pi kT}{m}}V} = \frac{2m}{kT}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}v^2\mathrm{d}v$$

Donc :

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{2m}{\mathrm{k}T}\sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{k}T}}\mathrm{e}^{-\frac{E}{\mathrm{k}T}}v^4 \mathrm{d}v$$

On retrouve une intégrale du type $\displaystyle\int_0^\infty x^4 \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ et on peut calculer $u = \sqrt{\dfrac{3\mathrm{k}T}{m}}$.

c. $u = \sqrt{\dfrac{3\mathrm{k}T}{m}} = \sqrt{\dfrac{3\mathrm{R}T}{M}}$, où M désigne cette fois-ci la masse molaire (on obtient ce résultat en se rappelant que $k\mathrm{N}_a = \mathrm{R}$, où N_a désigne le nombre d'Avogadro).

A.N. $u = \sqrt{\dfrac{3 \times 8{,}31 \times 373}{133 \cdot 10^{-3}}} = 264 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4. Pour un gaz monoatomique parfait U est simplement la somme des énergies cinétiques des atomes contenus dans le volume V. Ramené à un atome on a donc en moyenne $U = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\frac{3\mathrm{k}T}{m} \Rightarrow U = \frac{3}{2}\mathrm{k}T$, résultat à connaître.

5. L'équation des gaz parfaits s'écrit $pV = \chi \mathrm{R}T$, où χ désigne le nombre de moles. Soit encore $p = \dfrac{1}{V}\dfrac{N}{\mathrm{N}_a}\mathrm{R}T \Rightarrow p = n\mathrm{k}T$. Avec $u^2 = \dfrac{3\mathrm{k}T}{m} \Rightarrow \mathrm{k}T = \dfrac{mu^2}{3}$ il vient $p = \dfrac{1}{3}nmu^2$.

8

1. On distingue trois différents types de processus de transfert thermique.

– La diffusion thermique. L'énergie est échangée par conduction, comme par exemple dans le cas d'une casserole chauffant au contact d'une source de chaleur. Ce processus est régit par la loi de Fourier ($\overrightarrow{j} = -\lambda \overrightarrow{\nabla} T$).

– La convection. Les échanges de chaleur sont accompagnés de déplacement de matière, comme par exemple dans le cas d'air chaud ascendant au sein d'air plus frais (formation d'un nuage).

– Le rayonnement électromagnétique. L'énergie est échangée avec le milieu extérieur sous forme de rayonnement électromagnétique. Le rayonnement solaire illustre ce type de processus de transfert thermique.

2. Lorsque $\mathrm{d}\varphi$ est positif, la chaleur est transférée du milieu (1) vers le milieu (2) (i.e. le milieu (1) cède de la chaleur et le milieu (2) en reçoit). Par ailleurs, on a $\left(\overrightarrow{j_Q}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}\right)$ positif donc $\overrightarrow{j_Q}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ sont dans « le même sens ». Il apparaît que le sens de $\overrightarrow{j_Q}$ est aussi celui dans lequel se font les échanges de chaleur effectifs.

À l'inverse lorsque $\mathrm{d}\varphi$ est négatif la chaleur est transférée du milieu (2) vers le milieu (1).

3.a. Le signe moins signifie que la chaleur diffuse des zones « les plus chaudes » vers les zones « les plus froides ». En effet, à une dimension, on a $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{e_x}$ avec λ positif. Donc si $\dfrac{\partial T}{\partial x} > 0$ (la température est une fonction croissante de l'abscisse) alors $\overrightarrow{j_Q}$ a le sens de $-\overrightarrow{e_x}$, donc la diffusion se fait bien dans le sens des températures décroissantes.

b. $d\varphi$ est une puissance thermique, elle s'exprime donc en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Donc le module de $\overrightarrow{j_Q}$ s'exprime en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$, et d'après la loi de Fourier il vient que l'unité de λ est le $\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

4. $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{e_x}$

5.a. δQ_1 est la chaleur reçue à travers Σ_1, donc $\delta Q_1 = \mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}\varphi_1$ est le flux de chaleur à travers Σ_1 dans le sens de (Ox). Soit :

$$\delta Q_1 = \overrightarrow{j_Q}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\,\overrightarrow{e_x}.S\overrightarrow{e_x}.\mathrm{d}t \Rightarrow \delta Q_1 = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\,S\mathrm{d}t$$

b. De même la chaleur cédée à travers Σ_2 est :

$$\delta Q_2 = \overrightarrow{j_Q}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)\,\overrightarrow{e_x}.S\overrightarrow{e_x}.\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \delta Q_2 = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)\,S\mathrm{d}t.$$

c. Il n'y a pas d'échange possible d'énergie thermique à travers Σ_l puisque l'on suppose que T ne dépend que de x et de t.

d. $\delta^2 Q = \delta Q_1 - \delta Q_2 = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,t)\,S\mathrm{d}t + \lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)\,S\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \delta^2 Q = \lambda S\mathrm{d}t\left[\dfrac{\partial T}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t) - \dfrac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right]$, finalement $\delta^2 Q = \lambda S\mathrm{d}t\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x$.

e. On peut appliquer le premier principe de la thermodynamique à la portion de solide $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Il n'y a pas de travail échangé donc $\delta W = 0$, et la variation d'énergie interne est donc donnée par $\mathrm{d}U = \delta^2 Q$. Par ailleurs, on a pour un solide $\mathrm{d}U = mc\mathrm{d}T$, où la masse m de la portion de solide est $m = \rho S\mathrm{d}x$. Il vient donc $\rho S\mathrm{d}x c\mathrm{d}T = \delta^2 Q$.

f. $\mathrm{d}T = \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

g. En égalant les deux expressions de $\delta^2 Q$: $\rho S\mathrm{d}x c\mathrm{d}T = \lambda S\mathrm{d}t\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x$, en simplifiant et en remplaçant $\mathrm{d}T$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \Rightarrow a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

6. Le moment le plus froid est atteint lorsque le cosinus vaut (-1). Soit $\cos(\omega t+\varphi) = -1$, et à ce moment on a choisi $t = 0$, donc $\cos\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$.

7.a. $T = T_m + \theta(z,t)$ est solution de l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t)$, et puisque T_m est une constante $\theta(z,t)$ est également solution. Par ailleurs, si l'on recherche $\underline{\theta}(z,t)$ solution de l'équation de la chaleur, qui est linéaire, on est assuré que sa partie réelle $\theta(z,t)$ l'est également.

b. $\dfrac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial z^2}(z,t)$ et $\underline{\theta}(z,t) = \underline{\theta}_A(z)\,e^{j\omega t}$. Donc $j\omega\underline{\theta}_A(z)\,e^{j\omega t} = a\dfrac{\partial^2 \underline{\theta}_A}{\partial z^2}e^{j\omega t}$, et $\underline{\theta}_A(z)$ doit satisfaire à l'équation différentielle : $\dfrac{\partial^2 \underline{\theta}_A}{\partial z^2} = k^2\underline{\theta}_A$ avec $k^2 = \dfrac{j\omega}{a}$.

c. Le nombre complexe défini par $k = \sqrt{\dfrac{\omega}{2a}} + j\sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}$ est racine de $k^2 = \dfrac{j\omega}{a}$, et l'équation à résoudre est de la forme $\dfrac{\partial^2 \underline{\theta}_A}{\partial z^2} = k^2\underline{\theta}_A$. Les solutions sont du type $\underline{\theta}_A = Ce^{kz} + C'e^{-kz}$, où C et C' sont des constantes. Donc on a :

$$\underline{\theta}(z,t) = \left[Ce^{kz} + C'e^{-kz}\right]e^{j\omega t}$$

d. Dans l'expression de $\underline{\theta}(z,t)$ ci-dessus le premier terme correspond à une onde se propageant dans le sens des z décroissants et le deuxième terme correspond à une onde se propageant dans le sens des z croissants. Le deuxième terme est donc inacceptable puisque l'onde doit se propager ici dans le sens des z décroissants (de l'air vers le sol). On en déduit $C' = 0$.

e. Il reste $\underline{\theta}(z,t) = Ce^{kz+j\omega t}$.
En $z = 0$, $\theta(0,t) = C\cos(\omega t) = T_A\cos(\omega t + \pi) = -T_A\cos(\omega t)$ ceci $\forall t$, donc $C = -T_A$. En remplaçant :

$$\underline{\theta}(z,t) = -T_A e^{kz+j\omega t} \Rightarrow \underline{\theta}(z,t) = -T_A e^{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}z} e^{j\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a}}z+\omega t\right)}$$
$$\Rightarrow T(z,t) = T_m - T_A e^{\alpha z}\cos(\alpha z + \omega t)$$

avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{\omega}{2a}}$.

8.a. L'amplitude des variations annuelles est $T_A e^{\alpha z_m}$ à la profondeur $|z_m|$. À l'extérieur l'amplitude des variations est de T_A. Il faut donc :

$$e^{\alpha z_m} = \frac{1}{10} \Rightarrow \alpha z_m = -\ell n\,10 \Rightarrow z_m = -\frac{\ell n\,10}{\alpha}$$

A.N. $z_m = -\ell n\,(10)\sqrt{\dfrac{2\times 3\cdot 10^{-7}\times 365\times 24\times 3\,600}{2.\pi}} = -4$ m.

b. $T(z,t) = T_m - T_A e^{\alpha z}\cos(\alpha z + \omega t)$. Le moment le plus froid est obtenu lorsque le cosinus vaut 1, soit $\alpha z_m + \omega t = 2\pi \Rightarrow t = \dfrac{2\pi}{\omega} - \dfrac{\alpha z_m}{\omega}$.
A.N. $t = 231$ jours $= 7{,}7$ mois, le moment le plus froid se produit donc au cours du mois de septembre (puisque $t = 0$ au 1er février).

Chapitre 9

Physique moderne

À partir des expériences historiques qui ont mis en évidence l'interaction entre le rayonnement et la matière, ce chapitre présente quelques aspects de l'avènement de la physique moderne. Une partie plus technique est consacrée aux rudiments de la relativité restreinte, qui est appliquée aux réactions nucléaires. Le noyau et la radioactivité sont traités succinctement. On trouvera des compléments dans l'exercice 4 et dans le tome de chimie.

1. Dualité onde-corpuscule

1.1. Phénomènes ou expériences classiquement inexplicables

1.2. Dualité onde-corpuscule en électromagnétisme

1.3. Généralisation de la dualité onde-corpuscule

2. Dynamique relativiste

2.1. Un peu de relativité restreinte

2.2. Cinématique des réactions du type $1(+2) \rightarrow 3 + 4 + 5 + \cdots$

3. Le noyau

3.1. Généralités

3.2. Radioactivité

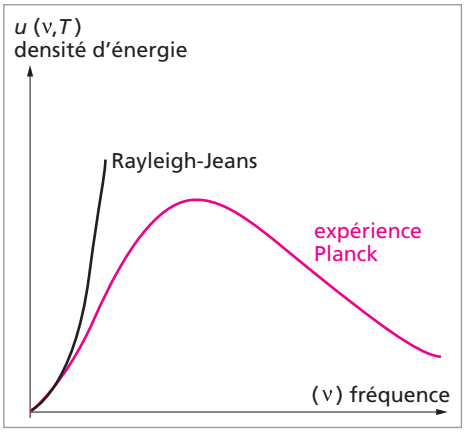
1. Dualité onde-corpuscule

À la fin du 19e siècle, la plupart des phénomènes connus trouvent leur explication grâce à deux théories : la mécanique d'Isaac Newton et l'électromagnétisme de James C. Maxwell. Ces deux théories reposent sur des hypothèses admises jusqu'alors :
1. Il existe un **espace** et un **temps absolus**. Autrement dit les coordonnées d'espace et de temps ne changent pas lorsqu'on change de référentiel.
2. Le **déterminisme** est en vigueur. Connaissant les conditions initiales et la loi qui régit l'évolution d'un système physique, on peut, à chaque instant, avoir accès à tous les paramètres pertinents de ce système.
3. Ces paramètres peuvent être mesurés, en principe, avec une **précision infiniment grande**. Les limites rencontrées sont d'ordre technique.
Dans la vie quotidienne, pour les phénomènes macroscopiques et à petite vitesse par rapport à la vitesse de la lumière, ces hypothèses sont acceptables. Mais elles ont été remises en cause au début du 20e siècle. La théorie de la relativité d'Albert Einstein (1905) a nécessité l'abandon de l'hypothèse 1, non valide à grande vitesse. La théorie quantique (Erwin Schrödinger et Werner Heisenberg, 1925) a modifié les hypothèses 2 et 3, incompatibles avec les phénomènes microscopiques observés.

1.1. Phénomènes ou expériences classiquement inexplicables

Dans cette partie nous verrons certaines expériences qui apparaissent alors difficilement explicables avec les théories classiques. Il s'agit d'expériences d'analyses microscopiques de la matière et de l'étude de l'interaction des corpuscules entre eux ou avec le rayonnement électromagnétique.

a) Rayonnement du corps noir : un corps noir est une cavité dont les parois et le volume intérieurs sont portés à une température T. Les atomes constituant la paroi sont susceptibles d'émettre et d'absorber du rayonnement électromagnétique. Lorsque l'équilibre thermodynamique est atteint, la paroi émet et absorbe la même puissance pour chacune des fréquences ν qui composent le spectre de ce rayonnement. La densité d'énergie électromagnétique $u(\nu, T)$ est donc constante et on peut la mesurer (courbe en violet sur la fig. ci-contre).



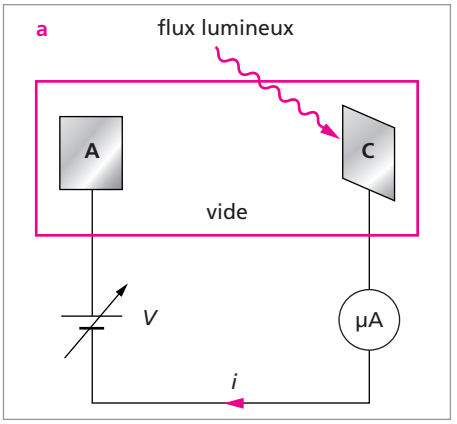
En 1900, en s'appuyant sur l'électromagnétisme et une méthode statistique, Lord John Rayleigh et Sir James Jeans réussirent à reproduire la partie basses fréquences de la courbe, mais leur résultat divergeait à haute fréquence. Peu de temps après, Max Planck obtint

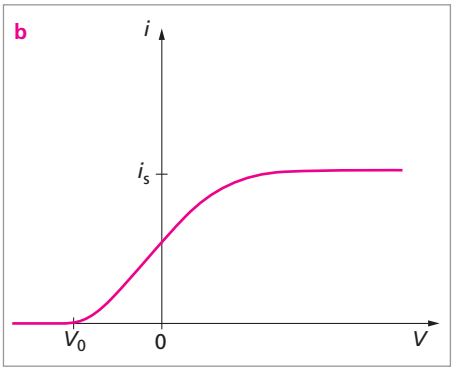
une expression théorique en accord avec l'expérience en *admettant* que les seules valeurs possibles de l'énergie échangée sont données par :

$$E = n\mathrm{h}\nu \quad \text{où } n \text{ est entier}$$

Il introduisit ainsi la constante h, dite de Planck. Ainsi Planck quantifia le rayonnement à l'émission et à l'absorption : il admit qu'à une fréquence donnée ν, les échanges d'énergie ne portent que sur des nombres entiers de quanta d'énergie valant hν. À l'époque, cette hypothèse apparut comme un artifice mathématique. Elle a pourtant marqué l'avènement de la physique moderne.

b) Effet photoélectrique : Heinrich Hertz découvrit en 1887 qu'un rayonnement électromagnétique est susceptible d'arracher des électrons à un métal. La figure **a** ci-contre schématise un dispositif expérimental simple permettant d'illustrer ce phénomène : la cellule comporte, sous vide, une cathode C qui est éclairée par le rayonnement électromagnétique et une anode. Si la fréquence du rayonnement électromagnétique est assez élevée, l'intensité du courant mesurée à l'aide du microampèremètre présente l'allure montrée en figure **b**. La caractéristique a un seuil V_0 en tension. Le courant croît et atteint une valeur limite i_s (courant de saturation). Ce courant de saturation est d'autant plus important que le flux de l'onde éclairant la cathode est intense.





Deux aspects expérimentaux sont particulièrement en contradiction avec la théorie de Maxwell :

- la présence d'un seuil en fréquence ν_0 en dessous duquel l'effet n'apparaît pas ;
- l'absence d'un seuil en flux lumineux : quand la fréquence de l'onde est supérieure au seuil ν_0 l'effet existe, même pour de très faibles valeurs de l'intensité de l'onde.

L'électron étant lié au milieu (par une énergie W_0), on comprend qu'il faille apporter cette quantité d'énergie W_0 pour l'en arracher. On sait aussi que l'énergie transportée par une onde est liée à l'intensité de cette onde, et non à un seuil en fréquence.

Albert Einstein a apporté une explication simple (qui entre autres, lui a valu le prix Nobel en 1921), en reprenant et prolongeant les idées de Newton et de Planck : il a postulé que le rayonnement électromagnétique était constitué de photons, chacun d'eux ayant une énergie $h\nu$ et une vitesse c dans le vide (c étant la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques). Dès lors, l'expérience précédemment décrite s'interprète aisément :

– un photon est absorbé par un électron, et cette interaction peut l'arracher du métal ;

– le seuil en fréquence correspond à la valeur ν_0 de la fréquence telle que :

$$h\nu_0 = W_0$$

– si $\nu > \nu_0$, il y a excédent d'énergie, de la quantité

$$h\nu - W_0 = h(\nu - \nu_0)$$

Cette énergie est récupérée sous forme cinétique T par l'électron arraché. Cependant cet électron n'arrivera pas forcément sur l'anode : le courant n'est observé qu'à partir d'une tension seuil négative V_0. Le seuil V_0 correspond à la tension qui amène les électrons à vitesse nulle sur l'anode :

$$T = -eV_0 \quad \text{où } e = 1,6\ 10^{-19}C$$

D'où

$$V_0 = -\frac{1}{e}(h\nu - W_0)$$

Si la fréquence ν augmente au-dessus de ν_0, V_0 diminue ;

– il n'y a pas de seuil en flux, car un seul photon suffit pour arracher un électron. On comprend par contre que le nombre d'électrons arrachés est proportionnel au nombre de photons incidents, donc que i_s est une fonction croissante du flux. La partie croissante de la caractéristique s'explique par le fait que, tant que la différence de potentiel anode-cathode demeure négative ou faiblement positive, les électrons ont une probabilité non nulle d'être freinés par les atomes résiduels avant d'atteindre l'anode car le vide n'est pas parfait.

L'interprétation d'Einstein confère une nature corpusculaire à la lumière. Le photon est une particule essentiellement relativiste aux caractéristiques suivantes :

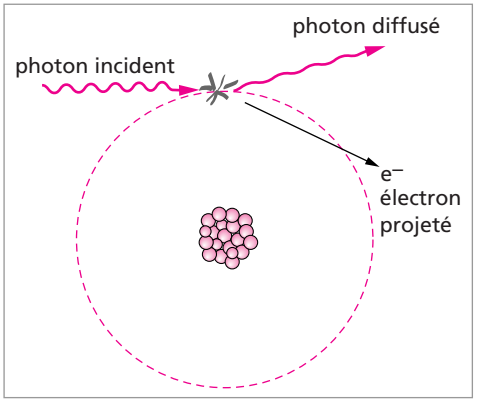
– énergie : $E = h\nu$

– énergie de masse au repos : nulle

– vitesse dans le vide : c

– impulsion : $p = \dfrac{h\nu}{c}$

c) Effet Compton : le concept de photon précédemment introduit fournit une explication simple de l'effet Compton : celui-ci consiste en une diffusion de la lumière par les électrons du milieu éclairé. En général, les électrons avec lesquels l'onde électromagnétique interagit ne sont pas libres (ils sont liés à un atome, une molécule ou un réseau plus complexe). Cependant, si l'énergie du photon associé à l'onde est très supérieure à l'énergie de liaison de l'électron, cette dernière est négligeable. Supposant cette condition réalisée, on interprète l'effet Compton comme *la diffusion élastique du photon d'énergie* $E = h\nu$ *avec un électron libre* (que nous supposerons initialement au repos). L'effet Compton est détaillé en exercice.



Après trois exemples sur l'interaction rayonnement-matière, les deux exemples suivants illustrent la structure de la matière. Les modèles atomiques existant à la fin du 19e siècle ne pouvaient expliquer des phénomènes tels que la radioactivité, l'émission de rayons X atomiques et les spectres optiques. À la suite des travaux d'Ernest Rutherford (1911) et des expériences de diffusion de particules α par divers matériaux, après que le concept de noyau atomique a vu le jour, Niels Bohr proposait un modèle d'atome dans lequel les électrons ne pouvaient avoir que des valeurs discrètes d'énergie de liaison. Ce point recevait une confirmation expérimentale directe par l'expérience de James Franck et Gustav Hertz en 1913.

d) Spectres optiques : l'expérience a montré qu'un atome ne peut émettre ou absorber que des rayonnements électromagnétiques de fréquences déterminées et **discrètes**. En terme de photons, il ne peut absorber ou émettre de photons qu'à des énergies discontinues données : le spectre est un spectre de raies.

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, il est possible de regrouper ces raies en séries, dites **séries de Balmer**, selon la formule

$$E = \mathrm{R}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

où E est l'énergie des raies, R la constante de Rydberg, (énergie d'ionisation, soit 13,6 eV), et m et n deux nombres entiers. L'interprétation la plus simple consiste à admettre que dans l'atome les états électroniques possibles ont des énergies de la forme :

$$E_n = -\frac{\mathrm{R}}{n^2}$$

L'émission ou l'absorption de photons correspond alors à une transition entre deux de ces états. Aucun des modèles atomiques en vigueur vers 1900 ne pouvait expliquer une telle structure électronique. Le modèle planétaire (existence d'un noyau autour duquel gravitent

des électrons liés par la force d'interaction électrique coulombienne) n'expliquait pas la *stabilité* de l'atome : l'électron accéléré aurait dû (conformément à l'électromagnétisme classique) rayonner de l'énergie et s'approcher ainsi progressivement du noyau.

e) Modèle de Bohr : en 1913, Bohr construit un modèle planétaire d'atome où la stabilité de l'atome est justifiée par l'introduction de conditions *ad hoc* :

- parmi les orbites possibles, Bohr admet que seules certaines d'entre elles correspondent à des états électroniques ;
- ces états sont stables ou stationnaires (pas de rayonnement comme l'exige l'électromagnétisme classique) ;
- ces états sont définis par une condition de quantification sur le moment angulaire :

$$L = n\hbar \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Avec ces conditions, dans le cas de *l'atome d'hydrogène*, pour des orbites circulaires, on peut calculer l'énergie E de l'électron et le rayon de son orbite :

Démonstration : l'électron, de charge $-q$, est uniquement soumis à une force centrale : la force électrostatique exercée par le noyau, le proton de charge q. Cette force est donc égale au produit de la masse de l'électron m_e, par l'accélération normale à la trajectoire. L'électron a une trajectoire circulaire uniforme, de rayon r.

En posant $e^2 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$, on a : $\dfrac{e^2}{r^2} = \dfrac{m_e v^2}{r}$ où v est la vitesse de l'électron. Donc $e^2 = m_e v^2 r$. Or $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge m_e \overrightarrow{v}$ d'où $L = m_e v r$. Donc $e^2 = \dfrac{L^2}{m_e r}$, d'où $r = \dfrac{L^2}{m_e e^2}$.

Donc $\boxed{r = r_n = \dfrac{n^2\hbar^2}{m_e e^2} = n^2 a_0 \approx 0{,}53\, n^2 \text{ Å}}$ où a_0 est appelé rayon de la première orbite de Bohr.

L'énergie totale $E = \dfrac{1}{2} m_e v^2 - \dfrac{e^2}{r} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^2}{r} < 0$.

Donc $\boxed{E = E_n = -\dfrac{1}{n^2}\dfrac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -\dfrac{R}{n^2}}$

La condition de quantification portée sur L entraîne la quantification du rayon de l'orbite et de l'énergie totale.

Ce modèle a beaucoup de succès dans la reproduction des résultats expérimentaux alors même qu'il repose sur la notion classique de trajectoire que la mécanique quantique réfutera quelques années plus tard.

1.2. Dualité onde-corpuscule en électromagnétisme

a) Aspect ondulatoire : la *théorie ondulatoire de Maxwell* n'est pas en contradiction avec l'optique géométrique qui en est une approximation (domaine où la longueur d'onde λ est petite devant les dimensions du système considéré, et en particulier des diaphragmes qu'il contient). La théorie de Maxwell trouve une confirmation expérimentale dans les phénomènes de propagation, d'interférence et de diffraction.
Cette théorie postule l'existence de *champs* ($\vec{E}$ et $\vec{B}$) qui sont des variables d'espace et de temps. Ces champs vérifient une *équation de propagation*.

b) Aspect corpusculaire : nous avons vu précédemment que certains phénomènes ne s'interprètent convenablement que dans le cadre d'une structure corpusculaire du rayonnement *électromagnétique*. Pour rendre compte du rayonnement du corps noir, Planck a postulé la quantification des échanges d'énergie entre rayonnement et matière. Cette hypothèse fut considérée tout d'abord comme un artifice mathématique conduisant à un résultat en accord avec l'expérience, mais sans fondement physique. Planck introduisait une condition sur les échanges d'énergie entre matière et rayonnement, mais ne formulait aucune hypothèse sur la constitution de ce rayonnement. Einstein accomplit en 1905 un grand pas dans cette direction. Pour expliquer le phénomène de l'effet photoélectrique, il postule que le rayonnement électromagnétique consiste en un jet de particules, les photons d'énergie $h\nu$ et de vitesse c.
Les relations entre les caractéristiques ondulatoires (ν ou ω, λ, $\vec{k}$) et corpusculaires (E, $\vec{p}$) du rayonnement sont :

$$E = h\nu = \hbar\,\omega$$

et, compte tenu de $E = pc$ soit

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$$

1.3. Généralisation de la dualité onde-corpuscule

Onde associée à une particule : En 1923, Louis de Broglie propose de généraliser aux corpuscules matériels la dualité onde-corpuscule que nous avons discutée pour le photon. Il associe à toute particule matérielle (dont le mouvement est caractérisé par une énergie cinétique T et une impulsion $\vec{p}$) une onde caractérisée par la pulsation ω et le vecteur d'onde $\vec{k}$. Il admet que les relations de correspondance entre grandeurs « ondulatoires » et « corpusculaires » sont les mêmes que pour les photons, à savoir :

$$E = \hbar\,\omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\,\vec{k}$$

où E est l'énergie totale.

Il en résulte que la longueur d'onde (dite de De Broglie) associée à une particule a pour valeur :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Cette conception du comportement dynamique des particules a constitué une autre importante nouveauté. Ayant l'habitude d'appréhender à l'aide de nos sens tout objet matériel, nous sommes naturellement conduits à lui attribuer une forme et des dimensions bien définies, ainsi qu'une localisation dans l'espace. Ceci nous amène à penser que les constituants les plus élémentaires (nucléons, électrons, ...) ont également une géométrie et une position bien déterminées. Cependant, il s'agit là d'une extrapolation loin de notre domaine habituel de perception. De nombreuses expériences ont révélé que cette extrapolation n'était pas correcte, et confirmé les idées de De Broglie, la plus célèbre d'entre elles étant l'expérience de diffraction d'électrons par un réseau cristallin effectuée en 1926 par Clinton Davisson et Lester Germer.

➜ **Voir exercices 1 et 2.**

2. Dynamique relativiste

2.1. Un peu de relativité restreinte

Principe de la relativité : il existe une classe de repères spatio-temporels physiquement équivalents, c'est-à-dire où les lois de la physique ont la même forme.

Transformation de Lorentz : soit un référentiel S muni du repère $Oxyz$ et un référentiel S' muni du repère $O'x'y'z'$ animé d'une vitesse v par rapport à S, parallèlement à Ox. Les horloges en O et O′ sont confondues à $t = t' = 0$. L'expression des coordonnées spatio-temporelles dans le repère $O'x'y'z'$ en fonction de celles du repère $Oxyz$ se fait selon la *transformation de Lorentz* :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta c t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \quad \text{avec } \beta = \frac{v}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

où c est la vitesse de la lumière, invariante par changement de référentiel.

Application : soit une horloge placée dans le référentiel S' en mouvement par rapport à S. Cette horloge émet des signaux à intervalles fixes $\Delta t'$. $\Delta t'$ est la période *propre* de l'horloge car elle est mesurée dans le référentiel en mouvement, là où l'horloge est immobile. Que

vaut-elle dans S ? Il s'agit de faire une transformation de Lorentz inverse :

$$x = \gamma(x' + \beta c t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

d'où $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x'\right)$. L'horloge étant immobile dans S', on a $\Delta x' = 0$, donc $\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$, il y a *dilatation du temps*.
(temps impropre) = γ (temps propre)
De même pour les longueurs L que l'on mesure dans le sens du déplacement de S', on a $L(\text{impropre}) = L'(\text{propre})\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L'$, il y a *contraction des longueurs*.

Invariant relativiste

Définition : **Un invariant relativiste est une quantité dont la valeur ne change pas lorsqu'on change de référentiel.**

Exemples :
- La masse dite au repos. Celle-ci est mesurée dans le référentiel où l'objet est immobile.
- La vitesse de la lumière : c = 299792458 m/s quel que soit le référentiel.

La combinaison de la masse m et de la vitesse de la lumière c, donne l'énergie de masse au repos mc^2.
L'énergie totale E d'une particule libre (ne subissant aucune interaction), de masse m, ayant une énergie cinétique T s'exprime ainsi :

$$\boxed{E = mc^2 + T = \gamma mc^2}$$

De même l'impulsion p lorsque la vitesse v avoisine c prend l'expression exacte

$$\boxed{p = \gamma m v}$$

$$p^2c^2 = \frac{m^2v^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2\frac{v^2}{c^2}c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^4\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$p^2c^2 = -m^2c^4 + \gamma^2m^2c^4 = -m^2c^4 + E^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$$

Dans le domaine des objets atomiques et subatomiques, l'énergie est généralement exprimée en électronvolts (eV), l'impulsion en électronvolts par c (eV/c) et la masse en électronvolts par c^2 (eV/c^2).

2.2. Cinématique des réactions du type 1(+2) → 3 + 4 + 5 + ...

Traditionnellement, la particule 1 est le projectile et la 2 la cible. La cible n'est pas nécessairement présente dans une réaction, ce qui explique la notation (+2), par exemple la désintégration β est une réaction du type 1 → 3 + 4 + 5.
L'état initial du système est caractérisé par les masses au repos des particules 1 (et 2) et leur énergie cinétique éventuelle. Les deux particules ne sont pas en interaction, elles sont libres. L'état intermédiaire est la réaction proprement dite, où les particules interagissent fortement et où il est souvent impossible de faire des mesures. L'état final est de nouveau caractérisé par les masses des particules sortantes (3, 4, 5...) et leur énergie cinétique. Les particules sont libres.
Les paramètres des états initial et final sont souvent accessibles indirectement par la mesure. Pour compléter les mesures il est nécessaire d'appliquer la loi de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion :

$$E_i = E_f \quad \text{soit} \quad E_1(+E_2) = E_3 + E_4 + E_5 + \ldots$$

$$\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{p_1}(+\overrightarrow{p_2}) = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4} + \overrightarrow{p_5} + \ldots$$

Référentiels (deux cas particuliers). Référentiel du laboratoire (*lab*) : les instruments de mesure y sont immobiles et en général la cible est immobile par rapport aux instruments de mesure.
Référentiel du centre de masse (*cm*) : par définition, c'est le référentiel où $\overrightarrow{p_i^{cm}} = \overrightarrow{0}$, or $\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f}$ dans tous les référentiels, donc on a aussi $\overrightarrow{p_f^{cm}} = \overrightarrow{0}$.

• **Application** : calcul de l'énergie seuil d'une réaction 1 + 2 → 3 + 4 + ...

Définition : Soit la réaction 1 + 2 → 3 + 4 + 5... les particules 1, 2, ... ayant les masses m_1, m_2, ... La chaleur de réaction, notée Q est :

$$Q = [m_1 + m_2 - (m_3 + m_4 + m_5 + \ldots)]c^2$$

Si $Q < 0$ la réaction est dite **endothermique** (ou **endoénergétique**). En effet, elle demande un apport d'énergie sous forme cinétique généralement. C'est le cas des réactions qui nécessitent des accélérateurs.
Si $Q > 0$ la réaction est dite **exothermique** (ou **exoénergétique**). La réaction produit plus d'énergie qu'elle n'en consomme. C'est le cas des réactions spontanées : radioactivité, fusion, fission, ...
Notons que Q est un invariant relativiste.

• **Cas des réactions endothermiques**

Définition : L'énergie seuil est l'énergie cinétique minimum de la particule 1 pour que la réaction puisse se produire. En général cette énergie cinétique est exprimée dans le référentiel du laboratoire.

Pour le calcul de l'énergie seuil (relativiste), il faut définir mathématiquement le seuil d'une réaction. Dans le référentiel du laboratoire, 2 est au repos. Soient T_1, T_3... les énergies cinétiques des particules 1, 3 ... La conservation de l'impulsion et de l'énergie totale donne :

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4} + ...$$

$$m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 = m_3c^2 + T_3 + m_4c^2 + T_4 + ...$$

d'où

$$Q + T_1 = T_3 + T_4 + ...$$

En considérant cette dernière égalité pour en tirer une condition qui fixe le seuil, la première idée qui vient à l'esprit est que T_1 doit compenser exactement Q qui est négative. La condition serait donc $T_1 = -Q$. Par conséquent $T_3 + T_4 + ... = 0$ or T_3, T_4 ... sont des quantités positives donc dans ce cas chacune est nulle. Qui dit énergie cinétique nulle, dit vitesse nulle. Ce qui implique que $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p}_4$ ... sont individuellement nulles, ainsi que leur somme et $\overrightarrow{p_1}$. On aboutit donc à une absurdité : le projectile ne part jamais, donc la réaction n'a jamais lieu.

Afin de trouver une condition plus forte, passons dans le référentiel du centre de masse. Dans ce cas, la particule 2 n'est plus au repos, projectile et cible se dirigent l'un vers l'autre avec des quantités de mouvement égales et opposées. La conservation de l'impulsion et de l'énergie totale donne :

$$\overrightarrow{p_1^{cm}} + \overrightarrow{p_2^{cm}} = \overrightarrow{p_3^{cm}} + \overrightarrow{p_4^{cm}}...$$

$$Q + T_1^{cm} + T_2^{cm} = T_3^{cm} + T_4^{cm} + ...$$

L'énergie seuil doit être telle que les particules 3, 4, ... soient produites au repos dans le référentiel du centre du masse. Donc vu dans ce référentiel, le seuil de la réaction est défini par :

$$Q + T_1^{cm} + T_2^{cm} = 0$$

Calculons l'énergie seuil T_{1S} dans le référentiel du laboratoire. Pour cela nous allons exprimer l'invariant relativiste $M^2c^4 = E^2 - \overrightarrow{P}^2c^2$ dans le référentiel du laboratoire pour l'état initial et dans le référentiel du centre de masse pour l'état final. M est la somme des masses, E celle des énergies totales et $\overrightarrow{P}$ celle des impulsions :

- dans le référentiel du laboratoire $E_i = m_1c^2 + T_{1S} + m_2c^2$ et $\overrightarrow{P}_{\text{i}} = \overrightarrow{p}_{1S}$
- dans le référentiel du centre de masse $E_f = m_3c^2 + m_4c^2 + ...$ et $\overrightarrow{P}_{\text{f}} = \overrightarrow{0}$

Soit

$$(m_3c^2 + m_4c^2 + ...)^2 = (m_1c^2 + T_{1S} + m_2c^2)^2 - (\overrightarrow{p}_{1S})^2$$

$$= (m_1c^2 + T_{1S})^2 + (m_2c^2)^2 + 2(m_1c^2 + T_{1S})m_2c^2 - [(m_1c^2 + T_{1S})^2 - (m_1c^2)^2]$$

$$(m_3c^2 + m_4c^2 + ...)^2 - (m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2 = 2(m_1c^2 + T_{1S})m_2c^2$$

$$(m_3c^2 + m_4c^2 + ...)^2 - [(m_1c^2)^2 + (m_2c^2)^2 + 2m_1c^2m_2c^2] = 2T_{1S}m_2c^2$$

d'où $T_{1S} = \dfrac{\left(m_3c^2 + m_4c^2 + \ldots\right)^2 - \left(m_1c^2 + m_2c^2\right)^2}{2m_2c^2}$

C'est-à-dire : $T_{1S} = \dfrac{\left(\sum \text{masses finales}\right)^2 c^4 - \left(\sum \text{masses initiales}\right)^2 c^4}{2(\text{masse cible})c^2}$

ou

$$T_{1S} = -Q\frac{\left(m_1c^2 + m_2c^2 + m_3c^2 + m_4c^2 + \ldots\right)^2}{2m_2c^2}$$

➜ **Voir exercice 3.**

3. Le noyau

3.1. Généralités

Ordres de grandeur des dimensions atomique et subatomiques : l'unité appropriée à l'atome est l'angström (1 Å $= 10^{-10}$ m). L'atome d'hydrogène a un diamètre d'environ 1 Å, alors que les plus gros atomes peuvent atteindre plusieurs dizaines d'angströms. La taille du noyau se mesure en dizaines de fermis (1 fm $= 10^{-15}$ m), celle de ces constituants (nucléons : protons et neutrons) en fermis, celle des électrons est inférieure au millième de fermi ($< 10^{-18}$ m) et celle des constituants des protons et neutrons (quarks) est estimée inférieure au dix-millième de fermi ($< 10^{-19}$m).
Une image rend assez bien compte de la structure lacunaire de l'atome et du noyau. Imaginons que les protons et neutrons d'un noyau aient un diamètre de 10 cm, alors les quarks et les électrons auraient une taille inférieure à 0,1 mm et l'atome dans son ensemble aurait un diamètre d'environ 10 km.

Cartes d'identité des constituants du noyau
Proton :

- Charge : $+e = +1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- Masse : $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg

Le rapport des masses du proton m_p et de l'électron m_e : $\dfrac{m_p}{m_e} \approx 1830$.

Neutron (découvert par Sir James Chadwick en 1932) :

- Charge : nulle
- Masse : $m_n = 1,675.10^{-27}$ kg

Un noyau est constitué de Z protons et N neutrons. Z est le numéro atomique ou nombre de charge. La somme $Z + N$ donne A, le nombre de masse. La donnée du couple (A, Z) détermine l'espèce chimique, ou nucléide, ${}^{A}_{Z}X$. $M({}^{A}_{Z}X)$ désigne la masse de l'atome X, $m({}^{A}_{Z}X)$ celle de son noyau.
Des **isotopes** sont des noyaux (ou des atomes) ayant même Z, des **isobares**, même A et des **isotones**, même N (peu d'intérêt).

Exemple : isotopes de l'hydrogène : ${}_1^1\mathrm{H}$, ${}_1^2\mathrm{H}$ (deutérium), ${}_1^3\mathrm{H}$ (tritium, radioactif)

Convention : depuis 1960 l'unité de masse atomique (u m a ou u) est définie comme le douzième de la masse de l'atome de carbone ${}_6^{12}\mathrm{C}$ qui est pris comme référence. La mesure de la masse de l'atome de ${}_6^{12}\mathrm{C}$ s'est affinée au cours des ans :

$$1u = 1,661 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \quad \text{ou} \quad 931,494\ \mathrm{MeV/c^2}$$

3.2. Radioactivité

Loi : Si à $t = 0$, on a N_0 noyaux radioactifs, alors en Δt, ΔN noyaux se désintègrent suivant la loi :

$$\Delta N = -\lambda N_0 \Delta t$$

où λ est la probabilité de désintégration par unité de temps.

Le signe $-$ indique qu'il y a une diminution du nombre de noyaux radioactifs. En intégrant, on trouve la **loi de désintégration radioactive** :

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

où τ est le *temps de vie moyen* (ou *vie moyenne*) d'un noyau radioactif.

Définition : La période radioactive ou demi-vie T est le temps au bout duquel la population de noyaux radioactifs est divisée par deux :

$$T = \tau \mathrm{Ln}\ 2$$

L'activité A désigne le nombre de désintégrations par seconde :

$$A(t) = \lambda N = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{A}_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Son unité officielle est le becquerel : 1 becquerel = 1 Bq = 1 désintégration par seconde.
On utilise aussi le curie : 1 curie = 1 Ci = $3,7 \cdot 10^{10}$ désintégrations par seconde.
Les filiations radioactives ainsi que les différents types de radioactivité seront vues en exercice.

➜ **Voir exercice 4.**

ÉNONCÉS

Exercice 1 Effet photoélectrique (d'après TD Paris XI)

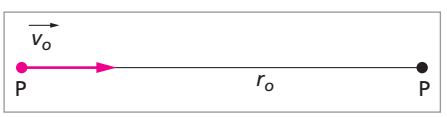
1. Le seuil photoélectrique d'une photocathode en césium est $\lambda_0 = 0,6$ µm. Quelle est l'énergie d'extraction W_0 correspondante (en J et en eV) ?
On dirige sur la photocathode un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5$ µm, de flux lumineux constant dont la puissance $P = 1$ W. Calculer :
a. l'énergie cinétique maximale T des photoélectrons émis et comparer leur vitesse v à c (vitesse de la lumière dans le vide) ;
b. la longueur d'onde λ associée à ces électrons en fonction de leur énergie de « repos » et de T.
2. À quel potentiel électrostatique faut-il soumettre ces électrons pour les amener à une énergie cinétique nulle ?
3. Quel est le rendement quantique η (pourcentage de photons qui réalisent l'extraction d'un électron) de la photocathode, si le courant photoélectrique a une intensité $I = 16,3$ mA.
4. On dirige maintenant un faisceau parallèle de rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0,1$ Å sur la photocathode. Comparer la vitesse des photoélectrons émis avec c.
A.N. Masse de l'électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
Charge de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C
Constante de Planck : $h = 6,626.10^{-34}$ J.s

Exercice 2 Effet Compton

1. Un photon d'énergie $E = h\nu$ est diffusé par effet Compton sur un électron au repos. Déterminer en fonction de E, $m_e c^2$ et θ (angle entre les directions des photons diffusé et incident) l'énergie cinétique T de l'électron diffusé. Quelle est sa valeur maximale (en MeV) ? Quelle est alors la direction de l'électron diffusé ?
2. Déterminer le décalage en longueur d'onde entre les rayonnements diffusé et incident : $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ en fonction de m_e, c et θ. Calculer la longueur d'onde de Compton de l'électron.
A.N. $E = 2$ MeV ; $m_e c^2 = 0,51$ MeV

Exercice 3 Interaction de deux protons (d'après CAPES 1990)

1. Deux protons, en interaction mutuelle dans le cadre de la mécanique non relativiste, sont à une distance r_0, lorsque le premier est immobile et le second animé d'une vitesse $\vec{v}_0$ dirigée vers le premier (fig ci-contre).



1.a. Quelles grandeurs physiques sont conservées au cours du temps ?

1.b. Expliquer pourquoi, dans le référentiel du laboratoire, on ne pourra jamais trouver simultanément les deux protons avec une vitesse instantanée nulle.
Pourquoi est-ce possible dans le référentiel du centre de masse ?

2. On considère à présent, dans le cadre de la mécanique relativiste, un proton incident dont l'énergie cinétique initiale est grande. Celle-ci est suffisamment élevée et on espère créer au cours d'un choc sur le proton immobile une paire formée d'un proton p et d'un anti-proton $\overline{p}$.
On négligera l'énergie potentielle initiale d'interaction, le proton incident étant très éloigné du proton cible.

$$p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$$

2.a. Ce choc est-il élastique ?

2.b. Quelles grandeurs physiques sont conservées ?

2.c. Dans quel référentiel peut-on, éventuellement, obtenir les quatre particules simultanément immobiles ?
En déduire :

- l'énergie cinétique initiale minimale dans ce référentiel et dans celui du laboratoire ;
- la vitesse initiale minimale du projectile dans le référentiel du laboratoire.

2.d. Comparer cette dernière vitesse à celle que devraient avoir deux protons ayant deux vitesses directement opposées dans le laboratoire.

Exercice 4 **Radioactivité** (d'après CAPES blanc,université d'Evry 2003)

Données

m : masse du noyau
M : masse de l'atome
Unité de masse atomique : $1u = 931,494\ \text{MeV/c}^2$
Masse du proton : $m_p = 1,0072765u$
Masse du neutron : $m_n = 1,0086649u$
Masse de l'électron : $m_e = 0,0005486u$
Masse des neutrino et antineutrino électroniques $= 0\ \text{MeV/c}^2$
Masses de noyaux (calculées d'après les tables de A.Wapstra & N. Gove, 1971) :

$m\left({}^{4}_{2}\text{He}\right) = 4{,}0015u$ $m\left({}^{40}_{20}\text{Ca}\right) = 39{,}9516u$ $m\left({}^{94}_{38}\text{Sr}\right) = 93{,}8946u$

$m\left({}^{137}_{54}\text{Xe}\right) = 136{,}8821u$ $m\left({}^{139}_{54}\text{Xe}\right) = 138{,}8888u$ $m\left({}^{136}_{55}\text{Cs}\right) = 135{,}87712u$

$m\left({}^{137}_{55}\text{Cs}\right) = 136{,}8769u$ $m\left({}^{137}_{56}\text{Ba}\right) = 136{,}8751u$ $m\left({}^{138}_{56}\text{Ba}\right) = 137{,}8745u$

$m\left({}^{218}_{84}\text{Po}\right) = 217{,}9629u$ $m\left({}^{222}_{86}\text{Rn}\right) = 221{,}9704u$ $m\left({}^{226}_{88}\text{Ra}\right) = 225{,}9771u$

$m\left({}^{224}_{90}\text{Th}\right) = 223{,}9721u$ $m\left({}^{230}_{90}\text{Th}\right) = 229{,}9837u$ $m\left({}^{235}_{92}\text{U}\right) = 234{,}9935u$

1. Le noyau atomique

1.1 Un noyau X, de masse m a un numéro atomique Z et un nombre de masse A. Définir son énergie de liaison E_l puis donner son expression en fonction de A, Z, m, m_n, m_p, c. Calculer en MeV l'énergie de liaison du noyau $^{40}_{20}$Ca. En déduire l'énergie moyenne E_m de liaison par nucléon pour ce noyau. La comparer à l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome d'hydrogène dans son état fondamental, et commenter ces résultats.

1.2 Quelle est la nature de l'interaction responsable de la cohésion des noyaux atomiques ? Pourquoi peut-on représenter en première approximation l'interaction d'un neutron avec le noyau auquel il est lié par un puits de potentiel de profondeur V_0, et de largeur a ? Donner les ordres de grandeur de V_0 et a. Expliquer pourquoi le résultat empirique qui donne le rayon d'un noyau de nombre de masse A en première approximation proportionnel à $A^{1/3}$ est compatible avec une densité nucléaire indépendante du noyau considéré.

2. Réactions nucléaires spontanées ; radioactivité

2.1 Radioactivité α

2.1.a. Écrire la réaction correspondant à l'émission spontanée d'une particule α par un noyau $^{A}_{Z}$X. On appelle noyau « fils » le noyau issu d'une désintégration, on le notera Y. Quelle est la nature de l'interaction qui en est responsable ? À quelle condition sur les masses des noyaux cette réaction est-elle possible ? Quels sont les noyaux concernés par la radioactivité α ?

2.1.b. Écrire la réaction de désintégration α de l'isotope 226 du radium, puis calculer en MeV l'énergie libérée. La particule α peut-elle être relativiste ? En supposant le noyau de radium initialement immobile, calculer l'énergie cinétique de la particule α ; quelle fraction de l'énergie libérée par la désintégration se retrouve sous forme d'énergie cinétique de la particule α ? Quelle est, dans ces conditions, la vitesse de la particule α dans le référentiel du laboratoire ?

2.1.c. Expliquer pourquoi la vitesse de la particule α calculée précédemment est une limite supérieure : le spectre observé est en fait un spectre comportant plusieurs raies.

2.2 Radioactivité β^-

2.2.a. Définir la radioactivité β^- et écrire la réaction nucléaire de désintégration d'un noyau « père » $^{A}_{Z}$X. Quelle est la nature de l'interaction qui en est responsable ? Pourquoi le caractère continu du spectre énergétique des particules émises a-t-il conduit Pauli à postuler en 1931 l'existence d'un antineutrino accompagnant la particule chargée ? Quels sont les noyaux concernés par la radioactivité β^- ?

2.2.b. Écrire la réaction de désintégration β^- de l'isotope 137 du césium et calculer l'énergie maximale que peut emporter l'électron émis (sans tenir compte du recul du noyau) ; peut-il être relativiste ? Calculer alors la vitesse maximale des électrons émis par cette réaction.

3. Réactions nucléaires provoquées ; fission

3.1 Aspect énergétique

Une des réactions de fission possibles de $^{235}_{92}$U s'écrit :

$$n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + kn$$

où k est un nombre entier ; combien vaut k ? La section efficace de *fission* de $^{235}_{92}$U dépend très fortement de l'énergie du neutron incident et présente des valeurs très élevées lorsque cette énergie se situe dans la gamme [0,002 eV; 0,5 eV]. Ceci est valable pour l'ensemble des réactions de fission possibles. Justifier la raison pour laquelle de tels neutrons sont appelés « neutrons thermiques ». Calculer l'énergie libérée lors de la réaction ci-dessus par noyau d'uranium. Commenter. Pourquoi les fragments primaires sont-ils radioactifs ? Quel est le type de radioactivité associée ?

L'énergie libérée par l'ensemble des fissions se répartit statistiquement de la manière suivante :

85 % : énergie cinétique des fragments primaires (ici xénon et strontium)

8 % : désintégrations radioactives et désexcitations γ

2,5 % : énergie cinétique des neutrons prompts (immédiatement émis)

4,5 % : énergie des neutrinos.

Quelle serait l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique moyenne (par neutron) des neutrons prompts émis par la réaction de fission ci-dessus ? Sont-ils relativistes ? Commenter.

3.2 L'effet Xénon (Cinétique des réactions nucléaires)

Dans un réacteur à eau pressurisée (en anglais Pressurized Water Reactor, P.W.R), le flux de neutrons thermiques ϕ a une valeur très élevée : $\phi \approx 10^{13}$ neutrons.cm^{-2}.s^{-1}.

Parmi les nombreux produits de la fission nucléaire, on s'intéresse à la chaîne impliquant les noyaux $^{135}_{52}$Te, $^{135}_{53}$I, $^{135}_{54}$Xe.

3.2.a. Il se trouve que $^{135}_{54}$Xe a une section efficace de *capture* des neutrons très élevée. Écrire la réaction nucléaire induite par la capture d'un neutron. Le nucléide obtenu est stable.

3.2.b. On donne les périodes des noyaux associés aux réactions nucléaires spontanées impliquant $^{135}_{54}$Xe :

$$\underbrace{{}^{135}_{52}\mathrm{Te}}_{19\text{ s}} \rightarrow \underbrace{{}^{135}_{53}\mathrm{I}}_{6{,}6\text{ h}} \rightarrow \underbrace{{}^{135}_{54}\mathrm{Xe}}_{9{,}1\text{ h}} \rightarrow \underbrace{{}^{135}_{55}\mathrm{Cs}}_{2.10^6\text{ ans}} \rightarrow \underbrace{{}^{135}_{56}\mathrm{Ba}}_{\text{stable}}$$

En régime permanent, $^{135}_{54}$Xe est produit par fission de l'uranium et par désintégration de l'iode 135. Il disparaît par capture neutronique et par désintégration en césium 135. Le nombre x d'atomes $^{135}_{54}$Xe par unité de volume est sensiblement constant. On notera y le nombre d'atomes $^{135}_{53}$I par unité de volume.

À $t = 0$, on arrête brusquement le réacteur en abaissant les barres de commande, et le flux neutronique s'annule.

On notera λ_I la constante radioactive de l'iode (probabilité de désintégration par unité de temps) et λ_X celle du xénon. En négligeant l'influence de $^{135}_{52}$Te, (et en considérant $^{135}_{55}$Cs

comme pratiquement stable) écrire le système d'équations différentielles couplées auquel satisfont x et y. Donner les expressions de $x(t)$ et $y(t)$, sachant que leurs valeurs à $t = 0$ sont x_0 et y_0.

3.2.c. En régime permanent, le rapport x_0/y_0 est fixe : $y_0 = a.x_0$ où $a = 4,84$. Donner l'expression numérique de $x(t)$ (en fonction de x_0 et t). Montrer que $x(t)$ présente un maximum au bout d'un temps t_m, puis calculer t_m. Expliquer pourquoi ce maximum connu sous le nom de « pic Xénon » peut empêcher une remise en route immédiate du réacteur.

SOLUTIONS

1 **1.** Le seuil photoélectrique correspond à l'énergie minimale que doit avoir un photon pour arracher un électron au matériau éclairé. Cette énergie $h\nu_0$ est égale au travail ou énergie d'extraction W_0. On a donc $W_0 = h\nu_0 = \dfrac{hc}{\lambda_0}$

A.N. $W_0 = \dfrac{6{,}626.10^{-34} \times 3.10^8}{0{,}6.10^{-6}} = 3{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}1\ \text{eV}.$

a. La longueur d'onde est inférieure à la longueur d'onde seuil donc elle correspond à une fréquence supérieure à la fréquence seuil ν_0 : ce faisceau est au-dessus du seuil photoélectrique. L'énergie du photon est convertie en énergie d'extraction et en énergie cinétique.

$$h\nu = W_0 + T \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = 6{,}63.10^{-20}\ \text{J} = 0,41\ \text{eV}$$

$T = \dfrac{1}{2} m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2T}{m_e}} = 3,82.10^5\ \text{m/s} \ll c$: le calcul non relativiste est justifié.

b. L'énergie de repos est : $E_0 = m_e c^2$

$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{hc}{\sqrt{2TE_0}} = 19$ Å (rayons X plutôt mous).

2. On écrit le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_i^2 = -eV_0 \Rightarrow V_0 = -\frac{T}{e} = -0,41\ \text{V}$$

3. Soit n_e le nombre d'électrons qui circulent par unité de temps et n_γ le nombre de photons illuminant la photocathode par unité de temps. Le rendement quantique est $\eta = \dfrac{n_e}{n_\gamma}$.

Or le courant est $I = n_e.e$ et la puissance lumineuse $P = n_\gamma.h\nu = n_\gamma \dfrac{hc}{\lambda}$

d'où $\eta = \dfrac{I}{e}\dfrac{hc}{P\lambda} = \dfrac{16{,}3.10^{-3}}{1{,}6.10^{-19}} \times \dfrac{6{,}626.10^{-34} \times 3.10^8}{1 \times 0{,}5.10^{-6}} = 4\ \%$

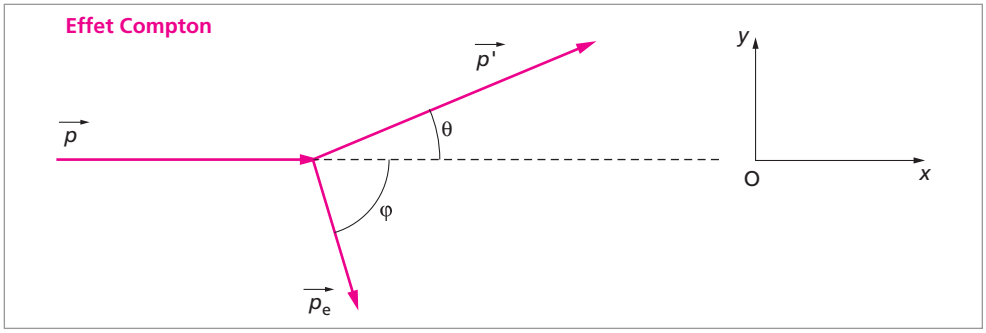
4. Pour $\lambda \ll \lambda_0 \Rightarrow T \approx \dfrac{hc}{\lambda} = 1{,}99.10^{-14}\ \text{J} = 124\ \text{keV}$

Si on fait un calcul non relativiste $v = \sqrt{\dfrac{2T}{m_e}} = 2{,}09.10^8\ \text{m/s} = 0{,}7c$! Un calcul relativiste est donc nécessaire.

$\gamma = \dfrac{T + m_e c^2}{m_e c^2}$ or $\gamma = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ donc $\dfrac{v}{c} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = \dfrac{\sqrt{T^2 + 2Tm_e c^2}}{T + m_e c^2} = 0,6c$

A.N. Soit $v = 1{,}8.10^3$ km/s.

2



1. Soit E' l'énergie du photon diffusé :

$$E' = h\nu'$$

La conservation de l'énergie totale impose :

$$E = E' + T$$

Soient $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{p}'$ et $\overrightarrow{p_e}$ les impulsions respectivement des photons incident et diffusé et de l'électron diffusé. On a :

$$E = pc \quad \text{et} \quad E' = p'c$$

La conservation de l'impulsion impose :

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}' + \overrightarrow{p_e}$$

En projetant cette égalité sur les axes Ox et Oy, il vient :

$$E = E'.\cos\theta + p_e c.\cos\varphi$$
$$0 = E'.\sin\theta - p_e c.\sin\varphi$$

On élimine φ :

$$p_e c.\cos\varphi = E - E'.\cos\theta$$
$$p_e c.\sin\varphi = E'.\sin\theta$$
$$p_e^2 c^2 = (E - E'.\cos\theta)^2 + E'^2 \sin^2\theta$$
$$p_e^2 c^2 = E^2 + E'^2 - 2.E.E'.\cos\theta \qquad (1)$$

Éliminons maintenant p_e grâce à $(T + m_e c^2)^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$
Posons $E_0 = m_e c^2$. On a alors

$$p_e^2 c^2 = T^2 + 2.E_0.T$$

or

$$T = E - E'$$

donc

$$p_e{}^2c^2 = E^2 + E'^2 - 2.E.E' + 2.E_0.(E - E') \qquad (2)$$

$$(1) - (2) \rightarrow 2.E.E'(1 - \cos\theta) = 2.E_0.E - 2.E_0E'$$

$$E' = \frac{E_0E}{E(1 - \cos\theta) + E_0}$$

d'où

$$T = \frac{E}{1 + \dfrac{m_ec^2}{E(1 - \cos\theta)}}$$

T est maximale lorsque $(1 - \cos\theta)$ est maximal, c'est-à-dire égal à $2(\theta = \pi)$.
A.N. $T_{max} = 1,8$ MeV : L'électron emporte presque toute l'énergie du photon.
$\theta = \pi \rightarrow \varphi = 0$: l'électron part dans la direction et le sens du photon incident. Le photon est rétrodiffusé.

2. Cette question est indépendante de la première et constitue une question « classique » de l'effet Compton. On reprend les notations utilisées au **1.** en les complétant avec E_e l'énergie de l'électron diffusé.

$$E_e = T + m_ec^2 = \sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4}$$

D'autre part : $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}' + \overrightarrow{p_e}$

$$\overrightarrow{p_e} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}'$$

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta$$

$$p_e^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta \qquad (3)$$

La conservation de l'énergie totale peut s'écrire :

$$h\nu + m_ec^2 = h\nu' + \sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4}$$

$$\text{d'où } p_e^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' + 2m_ec^2(h\nu - h\nu') \qquad (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \rightarrow -2h^2\nu\nu'\cos\theta = -2h^2\nu\nu' + 2m_ec^2(h\nu - h\nu')$$

$$h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) = m_ec^2(h\nu - h\nu')$$

or $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$

donc $\lambda' - \lambda = \dfrac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta)$

La longueur d'onde de Compton de l'électron : $\lambda_{Ce} = \dfrac{h}{m_ec}$

A.N. $\lambda_{Ce} = 2{,}43.10^{-12}$ m.

3 **1.a.** L'énergie totale est conservée.

$E_{tot} = 2.m_pc^2 + m_pv_0^2 + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_0} =$ constante où $e = 1,6.10^{-19}$ C

L'impulsion totale est aussi conservée.

Dans le référentiel du laboratoire : $\overrightarrow{p_{\text{tot}}} = m_p \overrightarrow{v_0} = \text{constante}$.

1.b. Les deux protons doivent se partager (équitablement ou non) l'impulsion totale. Les deux protons ne peuvent donc pas être simultanément immobiles dans le référentiel du laboratoire.
Dans le référentiel du centre de masse, l'impulsion totale est nulle, donc soit les deux protons ont des vitesses égales et opposées, soit ils sont immobiles tous les deux.

2.a. Un choc est élastique si l'énergie cinétique totale est conservée. Ce n'est pas le cas ici car il y a création de deux particules : une partie de l'énergie cinétique initiale est transformée en énergie de masse.

2.b. L'énergie totale et l'impulsion totale sont toujours conservées.

2.c. C'est en se plaçant dans le référentiel du centre de masse où l'impulsion totale est nulle qu'on pourra observer les quatre particules immobiles. Ce cas cinématique correspond au seuil de la réaction.
Soit T_i^{cm} l'énergie cinétique initiale minimale dans le référentiel du centre de masse :

$$T_i^{cm} + 2.m_p c^2 = 4.m_p c^2$$

Donc $T_i^{cm} = 2.m_p c^2$
Soit T_i^{lab} l'énergie cinétique initiale dans le référentiel du laboratoire. C'est l'énergie seuil de la réaction :

$$T_i^{lab} = \frac{\left(4m_p c^2\right)^2 - \left(2m_p c^2\right)^2}{2m_p c^2} = 6m_p c^2$$

Soit v_i^{lab} la vitesse initiale minimale dans le référentiel du laboratoire.

$$T_i^{lab} = (\gamma - 1)m_p c^2 \quad \text{où } \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\left(v_i^{lab}\right)^2}{c^2}}}$$

soit $6 = \gamma - 1$ soit $\gamma = 7$.
A. N. $v_i^{lab} = 0,9897c = 297.10^3$ km/s.

2.d. Si deux protons se dirigent l'un vers l'autre avec la même vitesse v_i dans le laboratoire, alors les référentiels du laboratoire et du centre de masse sont confondus.
On a $T_i^{cm} = 2.m_p c^2 = 2(\gamma - 1)m_p c^2$ où $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{(v_i)^2}{c^2}}}$
Soit $1 = \gamma - 1$ soit $\gamma = 2$.
A.N. $v_i = 0,8660c = 260.10^3$ km/s.
On voit que cette dernière solution est bien moins coûteuse en énergie.

4 **1.1** L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie qu'il faut apporter pour séparer tous les composants du noyau sans leur donner d'énergie cinétique. Grâce à la formule

d'Einstein, qui donne l'équivalence masse-énergie : $E = mc^2$ où E est l'énergie de masse (au repos), on définit l'énergie de liaison comme :

$$E_l = (Zm_p + (A - Z)m_n)c^2 - mc^2$$

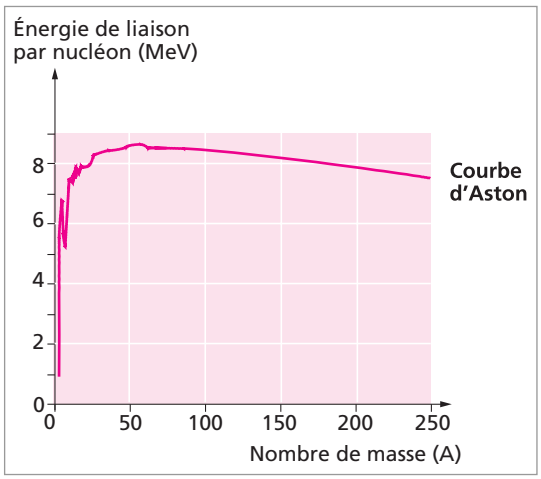
ou encore

$$E_l = (Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n)c^2 - Mc^2$$

Dans ce cas, on a négligé l'énergie de liaison des électrons devant celle des nucléons (quelques dizaines d'eV devant quelques dizaines de MeV pour les petits atomes, à quelques centaines de keV devant plusieurs centaines de MeV pour les gros atomes).
Ainsi définie E_l est positive.

$$E_l(^{40}_{20}\text{Ca}) = (20m_p + 20m_n - m(^{40}_{20}\text{Ca}))c^2 = 0{,}3672uc^2 = 342{,}07 \text{ MeV}$$
$$E_m(^{40}_{20}\text{Ca}) = E_l(^{40}_{20}\text{Ca})/40 = 8{,}5518 \text{ MeV}$$

Ce noyau se trouve dans la région des noyaux les plus liés (figure ci-dessous). Le noyau le plus lié est le $^{62}_{28}$Ni. Cet élément appartient au « groupe du fer » dont les noyaux ont une E_m de 8,8 MeV.



L'énergie de liaison de l'électron dans l'atome d'hydrogène dans son état fondamental est de $13,6$ eV $\ll 8,55$ MeV. Il y a un rapport de l'ordre de 10^6 à 10^3 entre les énergies de liaison par particule atomique et nucléaire.

1.2 L'interaction forte est responsable de la cohésion des noyaux. Elle concerne aussi bien les nucléons que leurs constituants, les quarks. Elle est à courte portée ($\leqslant$ 1 fermi = 1 fm = 10^{-15} m) : un nucléon ne la « sent » qu'à l'intérieur du noyau d'où la forme en puits du potentiel et sa largeur proche du rayon du noyau (a = quelques fermis). D'autre part le potentiel subi par le neutron est indépendant du nombre de nucléons dans le noyau ($E_m \approx$ cste $= V_0 \approx 8$ MeV comme on peut le voir sur la figure) donc le puits a même profondeur quel que soit A.
Ce sont les expériences (en particulier la diffusion d'électrons sur les noyaux) qui ont permis d'établir la formule empirique du rayon du noyau $R = r_0 A^{1/3}$ où $r_0 = 1{,}2$ fm.

Ce résultat est compatible avec l'image naïve d'un noyau vu comme une sphère homogène (système compact de nucléons). Donc le volume V est proportionnel à R^3 et donc à A, ce qui donne une densité nucléaire constante, indépendante du noyau, $A/V = 10^{38}$ nucléons/cm^3 ou bien 2.10^8 tonnes/cm^3.

2. La radioactivité a été découverte par Becquerel en 1896 qui travaillait sur des sels d'uranium. En 1897 et 1898, Pierre et Marie Curie découvraient le radium puis le polonium. Marie Curie inventa le terme « radioactivité ».
La radioactivité peut être définie comme une émission spontanée de rayonnements. C'est un phénomène aléatoire, indépendant de la température ou de toute autre condition physique ou chimique. On ne peut pas prévoir ni provoquer la désintégration d'un noyau instable : on ne peut raisonner qu'en termes de probabilités.

2.1.a. La réaction d'émission spontanée d'une particule α par un noyau ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ s'écrit :

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \quad \rightarrow \quad {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

Il faut veiller à la conservation du nombre de nucléons.
C'est l'interaction forte qui est responsable de la radioactivité α. Cette réaction spontanée est possible si sa chaleur de réaction est positive (voir 2.2).
Donc la radioactivité α est possible si $m(X) > m(Y) + m(\alpha)$. Elle concerne les noyaux lourds (A > 82). Dans le diagramme (Z, A $-$ Z) il s'agit d'un déplacement parallèle à la bissectrice.

2.1.b. ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
L'énergie libérée est égale à la chaleur de réaction $Q = 4{,}84$ MeV
Afin de respecter la conservation de la quantité de mouvement, le noyau « père » étant au repos, le noyau « fils » et la particule α partent dans des directions opposées en se répartissant l'énergie Q sous forme d'énergie cinétique. La valeur maximale limite pour l'énergie cinétique de la particule α est donc 4,84 MeV. Il faut la comparer à l'énergie de masse de la particule α($m_\alpha c^2 \approx 4\,000$ MeV) pour se convaincre qu'elle ne peut pas être relativiste. C'est toujours le cas en radioactivité α. La particule α a une énergie cinétique comprise entre 4 et 8 MeV.
La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$ \overrightarrow{p_{\mathrm{Ra}}} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{p_{\mathrm{Rn}}} + \overrightarrow{p_\alpha} \Rightarrow \left\| \overrightarrow{p_{\mathrm{Rn}}} \right\| = \left\| \overrightarrow{p_\alpha} \right\| $$

La conservation de l'énergie totale impose :

$$ \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_{\mathrm{Rn}}^2}{2m_{\mathrm{Rn}}} = Q $$

d'où l'énergie cinétique de la particule α :

$$ Ec_\alpha = \frac{Q}{1 + \dfrac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Rn}}}} = 4{,}75 \text{ MeV} $$

Plus de 98 % de l'énergie libérée se trouve sous la forme d'énergie cinétique de la particule α.
La vitesse de la particule α par rapport au référentiel du laboratoire est :

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2Ec_\alpha}{m_\alpha}} = 15\,150 \text{ km/s}$$

2.1.c. Cette vitesse est une limite supérieure car l'émission de la particule α peut laisser le noyau de radon dans un état excité. Les niveaux d'énergie du radon étant quantifiés, le radium possède un spectre discret d'émission α. Le passage du radon de son état excité à l'état fondamental se fera par désexcitation γ.

2.2.a. La radioactivité β^- c'est l'émission spontanée par un noyau d'un électron et d'un antineutrino électronique.

$$^A_Z\text{X} \rightarrow {}_{Z+1}{}^A\text{Y} + e^- + \overline{\nu_e}$$

C'est l'interaction faible qui est responsable de la radioactivité β^-. Si l'on suppose qu'il n'y a que le noyau « fils » et l'électron dans l'état final, l'énergie disponible (la chaleur de réaction $Q = (m(^A_Z\text{X}) - (m({}_{Z+1}{}^A\text{Y}) + m_e))\text{c}^2$) se répartit entre les deux produits finals. Cependant l'énergie de recul de Y est très faible, puisque sa masse est très supérieure à celle de l'électron. Le spectre attendu pour l'énergie cinétique de l'électron est donc un spectre comportant une seule raie, à une valeur très proche de Q. Au contraire, le spectre observé est continu, couvrant toutes les valeurs de 0 à Q. La seule explication possible respectant la conservation de l'énergie est l'existence d'une troisième particule émise qui se partagerait Q avec l'électron. Pauli a postulé l'existence d'une particule neutre et de masse nulle, donc quasiment indétectable. Il a fallu attendre 1956 pour enfin avoir la preuve expérimentale de l'existence du neutrino. Très récemment il a été établi que les neutrinos ont une masse, mais celle-ci est inférieure à 3 eV pour le (anti)neutrino électronique, donc nous pouvons continuer à la considérer comme nulle dans nos bilans énergétiques.
Dans le noyau subissant une radioactivité β^-, il se produit :

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$$

Les noyaux concernés par la radioactivité β^- sont ceux ayant un excès de neutrons par rapport à la vallée de stabilité. La radioactivité β^- correspond à un déplacement perpendiculaire à la bissectrice du diagramme $(Z, A - Z)$.

2.2.b La réaction de désintégration s'écrit :

$$^{137}_{55}\text{Cs} \rightarrow {}^{137}_{56}\text{Ba} + e^- + \overline{\nu}_e$$

L'énergie disponible est $Q = 1,16$ MeV. Si l'électron emporte la quasi totalité de Q sous forme cinétique, on a :

$$Q = (\gamma - 1)m_e\text{c}^2 \Rightarrow \gamma = 3,27$$

$$1 - \frac{v^2}{\text{c}^2} = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow v = 0,95\text{c}$$

C'est la vitesse maximale des électrons émis. Ils sont évidemment relativistes.

COMPLÉMENTS

La radioactivité β^+

Un noyau émetteur β^+ se désintègre suivant :

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e$$

où e^+ est un positron, antiparticule de l'électron et ν_e est un neutrino électronique. La chaleur de réaction est :

$$Q = \left(m\left(^{A}_{Z}X\right) - m\left(^{A}_{Z-1}Y\right) + m_e\right)c^2$$

électron et positron ayant même masse. Dans le noyau subissant une radioactivité β^+, il se produit :

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

Les noyaux concernés par la radioactivité β^+ sont ceux ayant un excès de protons par rapport à la vallée de stabilité. La radioactivité β^+ correspond à un déplacement perpendiculaire à la bissectrice du diagramme $(Z, A - Z)$. Les noyaux émetteurs β^+ sont produits par l'activité humaine, on dit que leur origine est artificielle.

La capture électronique

Il s'agit de la capture par le noyau d'un électron de son propre cortège électronique selon :

$$^{A}_{Z}X + e^-_{at} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_e$$

L'énergie disponible est :

$$Q = \left(m\left(^{A}_{Z}X\right) + m_e - m\left(^{A}_{Z-1}Y\right)\right)c^2$$

elle est presque entièrement emportée par le neutrino. Ce processus est concurrent de la radioactivité β^+. Il concerne également les noyaux riches en protons. Il est énergétiquement plus facilement accessible, en effet on a :

$$Q_{CE} = Q_{\beta+} + 2m_e c^2$$

La réaction élémentaire est $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Après capture d'un électron de son cortège (en général un électron de la couche K), l'atome comporte un trou électronique profond : cela correspond à un état excité de l'atome. La désexcitation se fait par un réarrangement du cortège électronique qui libère de l'énergie soit sous forme d'émission directe de rayons X soit, après absorption de l'énergie de la transition X, sous forme d'émission d'un électron d'une couche supérieure : c'est l'effet Auger. C'est par le biais de ces émissions secondaires qu'a été découverte la capture électronique.

On observe aussi l'effet Auger chez les émetteurs β^-. Il se produit lorsque le noyau « fils » est dans un état excité. L'énergie d'excitation est transférée directement à un électron du cortège. Au spectre continu des électrons émis par radioactivité β^- viennent se superposer des raies de « conversion interne ».

Les radioactivités β et la capture électronique sont des transitions isobariques car le nombre de masse reste inchangé.

En résumé, pour savoir si un noyau est radioactif vis-à-vis de telle ou telle réaction, il suffit de regarder si la chaleur de réaction de la réaction envisagée est positive. Suivant les données, on raisonnera sur les noyaux ou les atomes.
Pour la radioactivité α :

$$m\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) > m({}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}) + m({}^{4}_{2}\mathrm{He}) \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) > \mathrm{M}({}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}) + \mathrm{M}({}^{4}_{2}\mathrm{He})$$

Pour la radioactivité β^- :

$$m({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) > m\left({}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}\right) + m_e \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) > \mathrm{M}\left({}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}\right)$$

Pour la radioactivité β^+ :

$$m({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) > m\left({}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}\right) + m_e \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) > \mathrm{M}\left({}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}\right) + 2m_e$$

Pour la capture électronique :

$$m({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) + m_e > m\left({}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}\right) \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) > \mathrm{M}\left({}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}\right)$$

en négligeant l'énergie de liaison de l'électron capturé.

Remarque :

- M désigne la masse de l'atome neutre, or l'atome qui a subi une désintégration α ou β est ionisé : un bilan soigneux des masses des électrons est nécessaire.
- Dans l'énoncé de ce problème, on donne les masses nucléaires. Cependant ce qu'on trouve dans les tables ce sont les masses atomiques M et les excès (alias défauts) de masse Δ.
  L'excès de masse est défini ainsi :

$$\Delta\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) = \mathrm{M}\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) - \mathrm{A}.u$$

Désexcitation γ
Un noyau excité rejoint un état d'excitation moindre ou son état fondamental en émettant un photon γ, c'est-à-dire d'énergie supérieure à quelque 100 keV :

$$\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)^{*} \rightarrow \left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)^{(*)} + \gamma$$

Chaque transition γ correspond à une raie.

3.1 Conservation du nombre de neutrons :

$$1 + (235 - 92) = (139 - 54) + (94 - 38) + k \Rightarrow k = 3$$

Les neutrons thermiques tirent leur nom du fait que leur énergie cinétique (< 1 eV) est comparable à celle qu'ont les particules par la seule agitation thermique. Une énergie cinétique comprise entre $0,002$ eV et $0,5$ eV correspond, via $Ec = \dfrac{3}{2}k_B T$, à des températures allant de 13 à 3850 K.
L'énergie libérée est $Q = \left(m\left({}^{235}_{92}\mathrm{U}\right) - \left(m\left({}^{139}_{54}\mathrm{Xe}\right) + m\left({}^{94}_{38}\mathrm{Sr}\right) + 2m_n\right)\right)\mathrm{c}^2 = 179,56\,\mathrm{MeV}$

En négligeant l'énergie cinétique du neutron incident toute cette énergie se retrouve dans le canal de sortie. C'est une énergie colossale par noyau fissile. Les noyaux issus de la fission sont radioactifs car excédentaires en neutrons, ils sont donc émetteurs β^-.
Les trois neutrons émis emporteraient 2,5 % de 179, 56 MeV soit 4, 49 MeV sous forme d'énergie cinétique, soit environ 1, 5 MeV par neutron. Ils ne sont pas relativistes. Un neutron commence à être relativiste à partir de 5 MeV (les neutrons dit rapides ont une énergie cinétique moyenne de 2 MeV).
Les trois neutrons issus de la fission seraient inefficaces pour entretenir la réaction en chaîne : il faut donc les thermaliser. C'est le rôle du modérateur. Dans les réacteurs PWR, c'est l'eau légère qui sert de modérateur et de fluide caloporteur. La fission provoque une élévation de température dans le cœur du réacteur qui la communique à l'eau circulant sous pression, qui échange sa chaleur avec un circuit secondaire dont la vapeur fait tourner les turbines qui produisent à leur tour de l'électricité.

3.2.a. La réaction de capture s'écrit :

$$^{135}_{54}\mathrm{Xe} + n \rightarrow ^{136}_{54}\mathrm{Xe}$$

3.2.b. Les barres de commande (ou de contrôle) sont constituées de tubes de bore ou de cadmium introduits verticalement au sein du réacteur afin de régler, par absorption de neutrons, la puissance fournie. Ici elles sont totalement abaissées pour arrêter brusquement le réacteur si bien qu'à $t = 0$, $\phi = 0$, les processus de fission et de capture neutronique s'arrêtent. $^{135}_{54}\mathrm{Xe}$ est produit par décroissance de $^{135}_{53}\mathrm{I}$ et détruit par décroissance en $^{135}_{55}\mathrm{Cs}$:

$$^{135}_{53}\mathrm{I} \xrightarrow{\beta^-} {}^{135}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{135}_{55}\mathrm{Cs}$$

Étant donné que la période de $^{135}_{52}\mathrm{Te}$ est très courte, on admet que l'iode cesse d'être produit. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda_I y \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_I y - \lambda_X x \end{cases}$$

La première équation a pour solution :

$$y = y_0 \mathrm{e}^{-\lambda_I t}$$

La seconde s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \lambda_X x = \lambda_I y_0 \mathrm{e}^{-\lambda_I t}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$x_{SG} = A\mathrm{e}^{-\lambda_X t}$$

Une solution particulière de l'équation complète est $x_{SP} = B\mathrm{e}^{-\lambda_I t}$. En l'injectant dans l'équation, on obtient :

$$-\lambda_I B\mathrm{e}^{-\lambda_I t} + \lambda_X B\mathrm{e}^{-\lambda_I t} = \lambda_I y_0 \mathrm{e}^{-\lambda_I t} \Rightarrow B = \frac{\lambda_I}{\lambda_X - \lambda_I} y_0$$

La solution de l'équation complète étant la somme de x_{SG} et de x_{SP}, on a

$$x = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda_X t} + \frac{\lambda_I y_0}{\lambda_X - \lambda_I}\mathrm{e}^{-\lambda_I t}$$

or $x(0) = x_0$ d'où $\mathrm{A} = \dfrac{\lambda_X x_0 - \lambda_I(x_0 + y_0)}{\lambda_X - \lambda_I}$ et donc

$$x(t) = \frac{\lambda_X x_0 - \lambda_I(x_0 + y_0)}{\lambda_X - \lambda_I}\mathrm{e}^{-\lambda_X t} + \frac{\lambda_I y_0}{\lambda_X - \lambda_I}\mathrm{e}^{-\lambda_I t}$$

3.2.c. $x(t) = x_0\left[\dfrac{\lambda_X - \lambda_I(1+a)}{\lambda_X - \lambda_I}\mathrm{e}^{-\lambda_X t} + \dfrac{\lambda_I a}{\lambda_X - \lambda_I}\mathrm{e}^{-\lambda_I t}\right]$

$$x(t) = x_0\left[\left(1 - \frac{a\lambda_I}{\lambda_X - \lambda_I}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_X t} + \frac{a\lambda_I}{\lambda_X - \lambda_I}\mathrm{e}^{-\lambda_I t}\right]$$

$$x(t) = x_0\left(18{,}8.\mathrm{e}^{-2{,}09.10^{-5}t} - 17{,}8.\mathrm{e}^{-2{,}87.10^{-5}t}\right)$$

La dérivée de $x(t)$ s'annule à $t_m = 9$ h 20 min. C'est à ce moment que la densité de xénon est la plus importante et que la capture neutronique par cet élément peut empêcher un redémarrage immédiat du réacteur. Il faut attendre quelques jours que le xénon ait suffisamment décru.

Chapitre 10

Astronomie

L'objectif de ce chapitre n'est pas de faire un cours d'astronomie, mais plutôt de montrer que l'Univers est un vaste laboratoire au même titre que la Terre : on y rencontre des phénomènes mécaniques (les mouvements dus à la gravitation), électromagnétiques (la lumière, messagère des astres), thermodynamiques et nucléaires (l'éclat des étoiles). Cependant, les conditions physiques qui règnent dans l'Univers sont impossibles à réaliser dans nos laboratoires : températures de plusieurs millions de degrés, distances et masses considérables, vide quasi parfait... De plus, on ne peut pas expérimenter avec les astres : on compense cela en réalisant de très nombreuses observations et mesures.
Le cours regroupe un certain nombre de phénomènes, qui concernent divers chapitres de la physique et qui ont trait directement aux astres et à l'Univers. Il présente également quelques informations historiques très utiles pour l'épreuve orale sur dossier.

1. L'astronomie
1.1. Repères historiques
1.2. Domaines d'étude

2. Mouvements apparents. Les observations
2.1. Le mouvement diurne
2.2. Mouvements apparents du Soleil et de la Lune
2.3. Les phases de la Lune
2.4. Les éclipses de Soleil et de Lune
2.5. Mouvements apparents des planètes

3. Temps et calendrier
3.1. Origine astronomique des unités de temps
3.2. Valeur des unités
3.3. Le jour
3.4. Remarques importantes sur le vocabulaire

4. Les échelles dans l'Univers
4.1. Unités de distance
4.2. Exemples de distances
4.3. Parallaxe stellaire
4.4. Le Système solaire à l'échelle

5. Détermination des distances de la Lune et du Soleil
5.1. La distance Terre-Lune
5.2. La distance Terre-Soleil

6. Mesure de la Terre par Ératosthène

7. Copernic et le modèle héliocentrique
7.1. Les périodes sidérales
7.2. Les distances au Soleil
7.3. Modèle géocentrique et modèle héliocentrique

8. La gravitation universelle
8.1. Aspect historique de la découverte
8.2. Newton et la force centrale
8.3. Newton, la pomme et la Lune
8.4. Masse d'inertie et masse gravitationnelle
8.5. Masse de la Terre

9. Les marées
9.1. Attraction différentielle
9.2. Le marnage
9.3. Rythme des marées
9.4. Influence du Soleil
9.5. Ralentissement de la rotation de la Terre
9.6. Période de rotation de la Lune

10. Lunettes et télescopes
10.1. Évolution historique
10.2. Clarté d'un instrument (lunette ou télescope)
10.3. Pouvoir séparateur
10.4. Radiotélescopes

11. Analyse spectrale
11.1. Découvertes de Newton (1670)
11.2. Principes de l'analyse spectrale (1859)
11.3. Effet Doppler-Fizeau (1848)

12. Nucléosynthèse stellaire et vie des étoiles
12.1. Les réactions nucléaires
12.2. Évolution d'une étoile
12.3. Abondance des éléments dans l'Univers
12.4. Quelques lois du rayonnement

1. L'astronomie

1.1. Repères historiques

Historiquement, Aristote, au 4e siècle avant notre ère, avait arbitrairement partagé l'Univers en deux mondes bien distincts : le monde terrestre et le monde céleste, avec chacun ses matériaux constitutifs (les 4 éléments pour la Terre : la terre, l'eau, l'air et le feu ; le 5e élément, la quintessence : l'éther pour le monde céleste). Chacun de ces « mondes » possédait sa « physique » (sa description, ses phénomènes).
Il faudra attendre la fin du 16e siècle, 2000 ans plus tard, pour que Newton *unifie* la physique terrestre et la physique céleste, donnant naissance à la science moderne. Que ce soit au laboratoire du lycée ou dans l'Univers, la physique envisage les mêmes phénomènes de la nature : seuls des facteurs d'échelle (les distances, les masses, les durées, les températures...) distinguent ces deux domaines d'études.
L'histoire de l'astronomie décrit (entre autres) les modèles successifs que les hommes ont mis au point pour tenter de comprendre les mouvements observés.
Voici quelques repères : ARISTOTE (4e av.), ERATOSTHÈNE (3e av.), PTOLÉMÉE (+120), COPERNIC (1543), TYCHO-BRAHÉ, KEPLER et GALILÉE (vers 1600), NEWTON et HALLEY (vers 1700), LAGRANGE, LAPLACE, HERSCHEL... (au 18e siècle), LE VERRIER (1846), HUBBLE, LEMAÎTRE, EINSTEIN... au 20e.

1.2. Domaines d'étude

Étudier l'Univers se fait de trois façons différentes, selon les centres d'intérêt :
On observe et étudie les mouvements apparents des astres dans le ciel : c'est l'objet de l'**astronomie fondamentale**, regroupant deux volets complémentaires :
- l'**astrométrie**, science d'observations qui a pour objet la mesure précise de la position des astres et la détermination du temps (horloges, calendriers) ;
- la **mécanique céleste** qui cherche à expliquer les mouvements observés des astres, à partir des lois fondamentales de la dynamique (relativiste ou non). L'étude des trajectoires astronautiques (satellites artificiels ou sondes planétaires) est également de son ressort.

On étudie la nature physique des astres, et leur évolution dans la durée, par l'observation et l'analyse des rayonnements émis (visible, IR, radio, UV, X ou γ) : c'est l'**astrophysique**, qui mobilise toutes les lois de la physique.
On étudie l'évolution de l'Univers dans son ensemble (en assimilant les galaxies à des molécules d'un gaz par exemple) : c'est la **cosmologie**, qui utilise principalement les lois de la physique nucléaire et de la relativité générale.

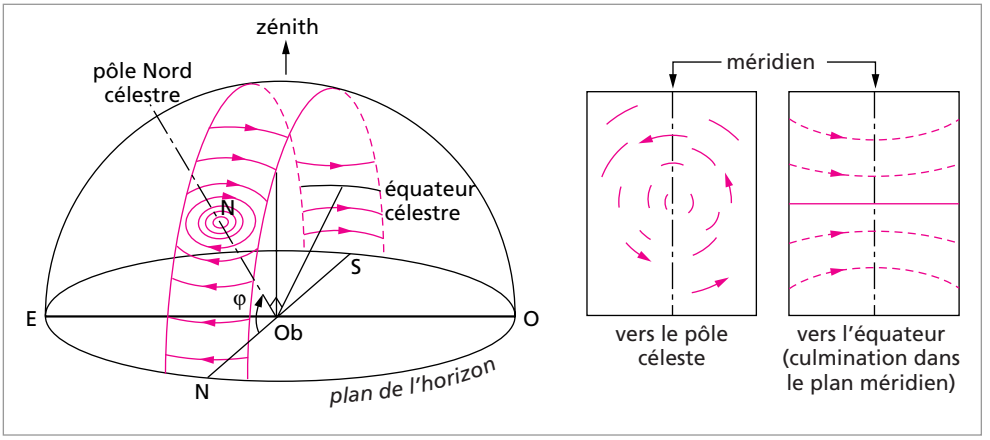
2. Mouvements apparents. Les observations

On observe les astres depuis la Terre, mais elle se déplace aussi dans l'espace (on le soupçonne depuis COPERNIC, en 1543). Les mouvements observés de ces astres résultent

donc de la *combinaison* de plusieurs mouvements : ceux de la Terre d'une part, et leurs mouvements propres d'autre part, tous ces mouvements étant rapportés à des systèmes de référence.

2.1. Le mouvement diurne

C'est le plus familier de tous les mouvements célestes : tous les astres (Soleil, Lune, planètes ou étoiles) se lèvent **vers** l'Est et se couchent **vers** l'Ouest (du moins sous nos latitudes). Cette simple observation est à la base des modèles du monde les plus anciens : la Terre est fixe au centre de l'Univers, et tous les astres évoluent autour d'elle.
En regardant les astres dans le ciel, on les voit répartis dans toutes les directions, sur une sphère centrée sur l'observateur (la **sphère céleste** a un rayon arbitraire car seule intervient ici la direction des astres). La rotation apparente de la sphère céleste s'appelle le **mouvement diurne**, et s'effectue d'Est en Ouest en un peu moins de 24 heures autour de l'axe polaire. Copernic a compris que ce mouvement apparent était dû à la rotation réelle de la Terre sur elle-même, d'Ouest en Est.
En regardant vers le Nord, (toujours sous nos latitudes), certaines étoiles semblent décrire des cercles fermés, au-dessus de l'horizon, autour d'un point fixe commun appelé Pôle céleste Nord. Ce point est la trace de l'axe polaire sur la sphère céleste (sphère imaginaire centrée sur l'observateur). Une étoile assez brillante, appelée pour cette raison l'**étoile Polaire**, en est proche. Les étoiles voisines du pôle forment les constellations circumpolaires et ne se couchent jamais. Elles sont visibles toute l'année et c'est pour cela que ce sont les plus connues : la Petite Ourse, la Grande Ourse, Cassiopée, Céphée, le Dragon...
En regardant à 90° de l'étoile Polaire, les étoiles semblent décrire une ligne « droite » qui est en réalité, un grand cercle de la sphère céleste. Ce grand cercle, prolongement dans l'espace de l'équateur terrestre, est l'équateur céleste, que les Égyptiens connaissaient déjà il y a 4000 ans. Au Sud de l'équateur céleste, les étoiles décrivent des arcs de cercles de plus en plus courts, centrés sur le Pôle céleste Sud.

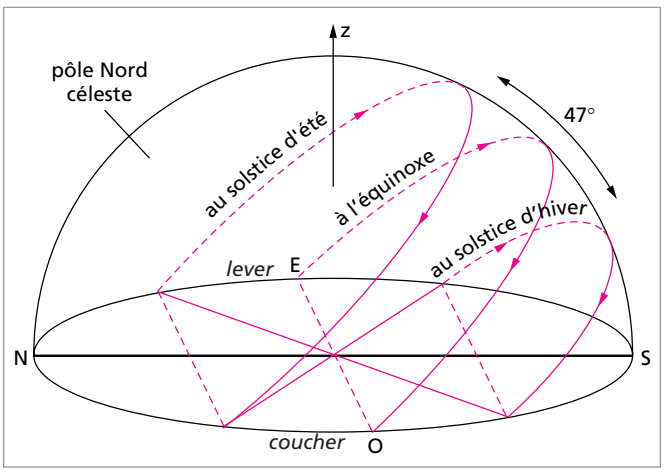


On ne peut voir jamais qu'une moitié du ciel, l'autre nous est cachée par la Terre elle-même. La forme sphérique de la Terre était connue des Grecs, par l'observation de la forme de l'ombre qui « mange » la Lune lors d'une éclipse de Lune. D'ailleurs, près de 300 ans avant notre ère, Ératosthène avait déjà déterminé le diamètre de la Terre avec une bonne approximation.
Le mouvement diurne n'affecte pas les formes des constellations. C'est pour cela que les Anciens appelaient « Sphère des fixes » ce qu'on désigne aujourd'hui par voûte céleste : les étoiles sont fixes les unes par rapport aux autres (à l'échelle de la vie humaine).

2.2. Mouvements apparents du Soleil et de la Lune

En plus du mouvement diurne, le Soleil et la Lune ont des mouvements apparents bien visibles :

- leurs levers et couchers ne se produisent pas chaque jour au même endroit de l'horizon ;
- le Soleil culmine plus ou moins haut dans le ciel, à midi, tout au long de l'année (été, hiver), un écart de 47° sépare les positions extrêmes ; c'est vrai en tout point de la Terre ;
- la Pleine Lune d'hiver est haute dans le ciel, celle d'été est basse ;
- les nuits ont une durée variable en un même lieu de la Terre.

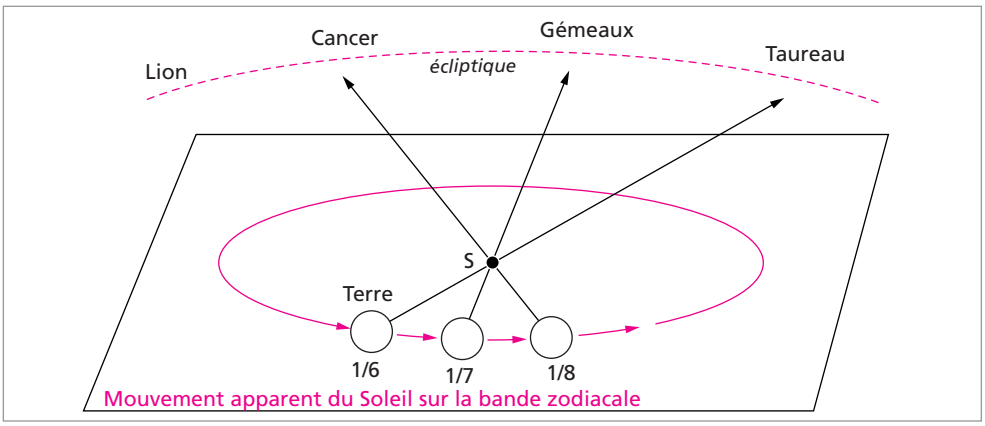


Une observation simple pendant quelques heures montre que la Lune, en plus du mouvement diurne qui la fait évoluer d'Est en Ouest, se déplace lentement en sens contraire d'Ouest en Est (le sens OE est pourtant appelé sens *direct*), d'environ son diamètre apparent (0,5°) en 1 heure. Ce mouvement est aisément repérable grâce aux étoiles brillantes du voisinage, puisque certaines peuvent même disparaître derrière le disque lunaire (lors d'une **occultation**) pour reparaître une heure après. La Lune met environ 27 jours pour revenir « dans » une constellation après avoir effectué un tour complet de la sphère céleste à raison de 13° par jour en moyenne.
Des observations plus longues montrent que, tout comme la Lune, le Soleil suit un chemin de sens direct, en parcourant les mêmes constellations qu'elle, appelées **constellations zodiacales** (du grec *zôdion*, diminutif de *zôon*, animal). Pour cela, il suffit de regarder

l'horizon Nord vers minuit et d'y chercher les constellations situées près du Soleil (lequel bien sûr est sous l'horizon) :

- en septembre, la Grande Ourse reste très basse sur l'horizon,
- en décembre, c'est la Tête du Dragon,
- en avril s'étale le W de Cassiopée, et la Grande Ourse est haute,
- en juin, l'étoile brillante *Capella* (du Cocher) est au ras de l'horizon.

On peut également observer tout au long de l'année quelles constellations se lèvent vers l'Est à minuit : le grand rectangle d'Orion en septembre, le Lion (avec *Régulus*) en décembre, l'Aigle (avec *Altaïr*) en mai, le Taureau (avec *Aldébaran*) en août...
En se reportant à une carte du ciel, on voit que le Soleil fait le tour du ciel (sphère céleste) en 1 an, dans le sens direct. Le déplacement quotidien est d'environ 2 fois le diamètre apparent du Soleil soit presque 1°. Cette constatation est d'ailleurs à l'origine du choix de l'unité d'angle, le degré, à raison de 360 par tour. Ce mouvement est donc environ 12 fois plus lent que celui de la Lune qui a (par hasard) le même diamètre apparent que le Soleil. Les Anciens ont appelé **écliptique** la ligne imaginaire suivie par le Soleil tout au long de l'année, car c'est sur cette ligne que se produisent les **éclipses** de Lune et de Soleil, phénomènes assez spectaculaires.

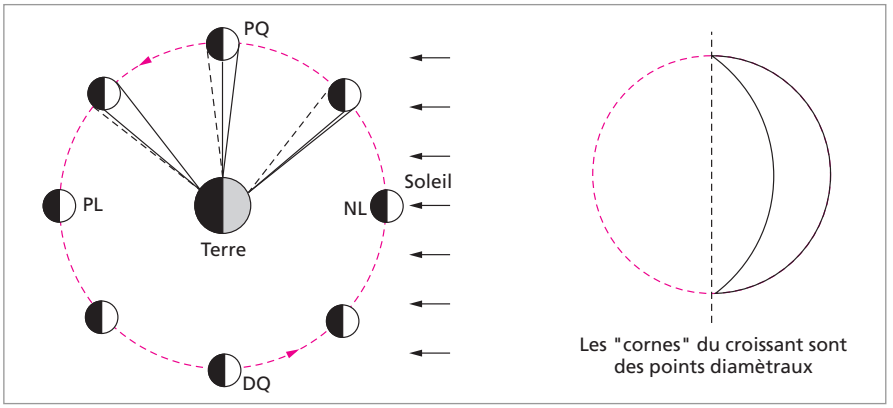


La combinaison des mouvements du Soleil et de la Lune, vus depuis la Terre, est la cause des **phases** de la Lune de périodicité 29,5 jours (lunaison). C'est là l'origine des calendriers luni-solaires : le retour d'une phase donnée définit le mois et le retour des saisons définit l'année.

2.3. Les phases de la Lune

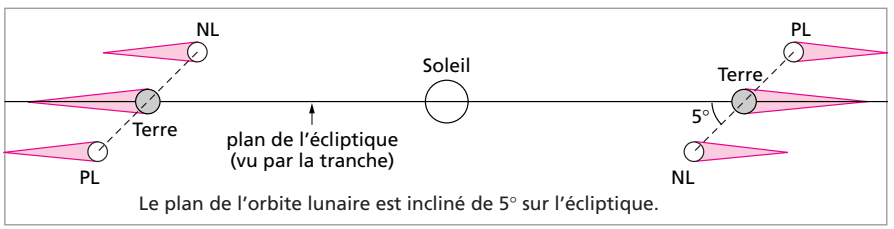
Quand on observe le ciel plusieurs soirs de suite à la même heure, on constate aisément que la Lune est située de plus en plus vers l'Est. Certains soirs, elle est même invisible, car elle est encore sous l'horizon (non levée) quand on la cherche.

Son apparence se modifie de jour en jour : bien ronde comme un disque, c'est la Pleine Lune, elle est opposée à la direction du Soleil, se levant vers l'Est au moment où le Soleil se couche vers l'Ouest. Une semaine plus tard, elle a la forme d'un demi-disque (vers la gauche, comme dans la lettre *d*) : c'est le Dernier Quartier. Le croissant devient alors de plus en plus mince jusqu'à devenir invisible car la Lune est dans la direction du Soleil : c'est la Nouvelle Lune. Puis elle réapparaît en fin d'après-midi vers l'Ouest, en croissant tourné vers le Soleil. Le croissant grossit peu à peu pour devenir un demi-cercle (vers la droite comme dans la lettre *p*) : c'est le Premier Quartier. D'une Pleine Lune à la suivante, il s'écoule en moyenne 29,5 jours (une lunaison). Ces changements d'aspect sont dus au mouvement réel de la Lune : de la Terre, on ne voit que la partie de la Lune éclairée par le Soleil.



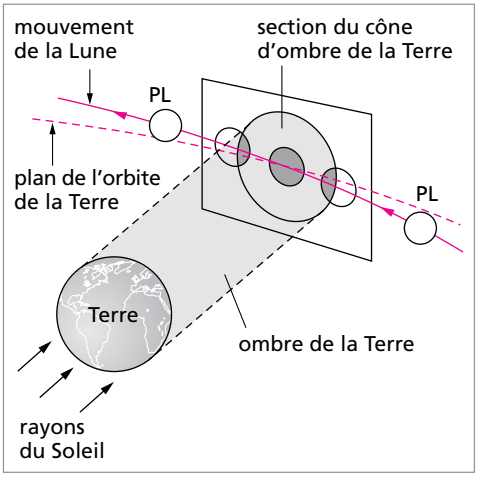
2.4. Les éclipses de Soleil et de Lune

Les **éclipses de Soleil** ne se produisent qu'au moment de la Nouvelle Lune, quand, vue de la Terre, la Lune vient masquer le Soleil. L'ombre de la Lune touche alors la Terre. C'est une éclipse totale : il fait brusquement nuit pendant quelques minutes (entre 0 et 7 min). On peut alors apercevoir la *couronne* solaire (atmosphère externe du Soleil, très ténue mais très chaude). De la région de la Terre touchée par le cône de pénombre, on ne voit qu'une éclipse partielle : le Soleil n'est pas entièrement masqué et il ne fait pas nuit.
Il ne se produit pas une éclipse de Soleil à chaque Nouvelle Lune (mais seulement deux par an en moyenne) car le plan de l'orbite lunaire est incliné de 5° sur l'écliptique. Les éclipses de Soleil ne sont visibles que depuis une petite région du globe ; c'est pour cela qu'on a l'impression (à tort) que c'est un phénomène très rare.



Une **éclipse de Lune** est en réalité une disparition de la Pleine Lune pendant près de deux heures, quand elle vient traverser le cône d'ombre de la Terre, n'étant plus éclairée par le Soleil (c'est donc un phénomène très différent des phases lunaires). C'est d'ailleurs la forme toujours circulaire de l'ombre sur la Lune lors de ses éclipses qui a permis d'envisager que la Terre avait une forme sphérique, dès le IV^e siècle avant notre ère.

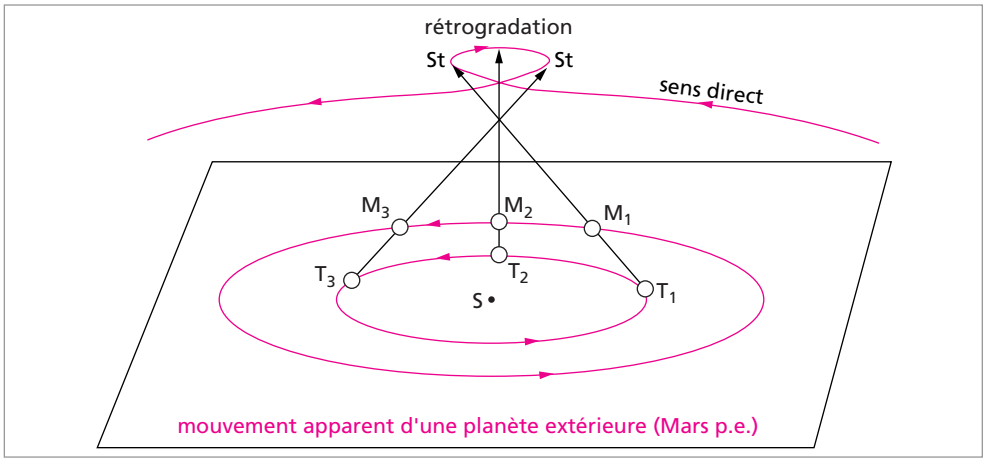
Il se produit en moyenne 2 éclipses de Lune par an, visibles par la moitié de la Terre plongée dans la nuit. Il arrive que la Lune ne pénètre pas entièrement dans le cône d'ombre terrestre : il s'agit alors d'une éclipse partielle.



2.5. Mouvements apparents des planètes

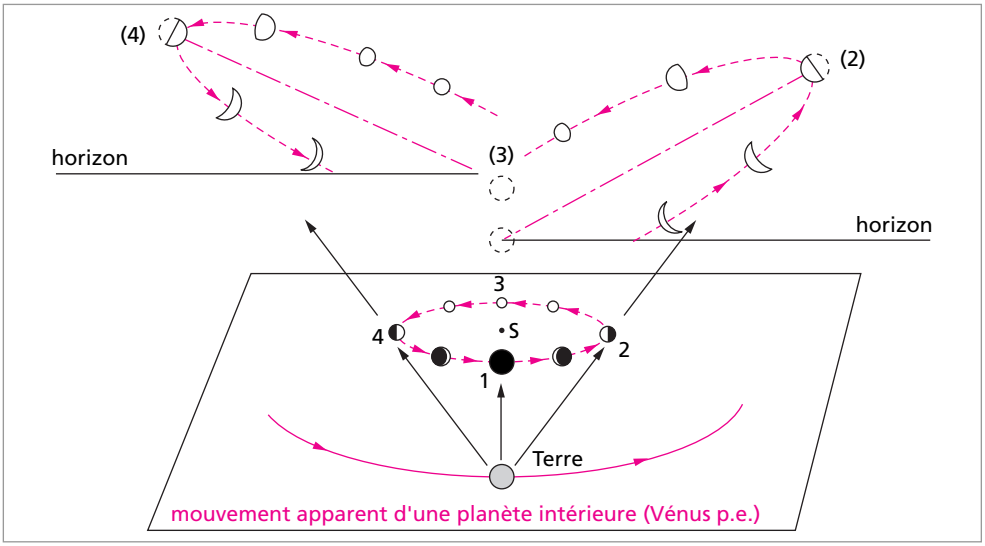
En plus du Soleil et de la Lune, les Anciens avaient remarqué 5 astres brillants qui se distinguent des étoiles par leur lent déplacement irrégulier au sein des constellations : les planètes (du grec *planetes*, errant). Leurs noms actuels sont dus à l'influence de la religion romaine : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.

Après l'invention du télescope, on en découvrira trois autres : Uranus (1781, HERSCHEL), Neptune (1846, LE VERRIER) et Pluton (1930, TOMBAUGH). En 1801, PIAZZI a découvert le premier astéroïde (Cérès).



En plus du mouvement diurne (qui n'est régulier qu'en première approximation), toutes les planètes ont des mouvements apparents irréguliers. Parfois, elles ont un mouvement de sens direct (Ouest-Est) et parfois au contraire un **mouvement rétrograde** (Est-Ouest) ; entre les deux, elles semblent immobiles pendant plusieurs jours sur le fond du ciel : c'est la **station**.

Mercure et Vénus restent toujours au voisinage du Soleil, se levant (ou se couchant) au plus 2 h et 3 h environ avant (ou après) le Soleil. Mars, Jupiter et Saturne en revanche semblent se déplacer indépendamment du Soleil sur toute la sphère céleste et peuvent donc être (parfois) observées en pleine nuit.



Tout comme le Soleil et la Lune, les planètes parcourent les constellations zodiacales et s'écartent peu de l'écliptique. Les Anciens avaient également observé l'éclat variable de Vénus et de Mars mais n'avaient pu l'expliquer correctement ; en 1610, GALILÉE découvrira les phases de Vénus avec sa lunette.

3. Temps et calendrier

La Nature offre à l'homme deux unités de durée : le jour et l'année. Les phases de la Lune ont défini le mois et la semaine. Ces durées quasiment invariables sont liées aux mouvements apparents du Soleil et de la Lune. Elles ont servi à établir des calendriers. Avant l'invention des horloges mécaniques fiables (au milieu du 18^{e} siècle), une partie du travail des astronomes consistait à comparer l'indication des horloges à la marche du Soleil, et chaque jour, à midi vrai, lors du passage du Soleil au méridien local, ils remettaient les pendules à l'heure.

3.1. Origine astronomique des unités de temps

- Le *jour* résulte de la *rotation* de la Terre sur elle-même, devant le Soleil.
- L'*année* est liée au mouvement de *translation* de la Terre autour du Soleil (il ne s'agit pas ici d'une rotation car l'axe de la Terre ne pivote pas). L'année se manifeste par le retour périodique des *saisons*, ou de certaines étoiles brillantes dans le ciel. Il se produit environ 365 alternances clair/nuit par année. Ce nombre 365 était connu des Égyptiens 4000 ans avant notre ère.
- Le *mois* vient du mouvement de la Lune autour de la Terre (le retour périodique des phases lunaires). Il se produit en moyenne 29 à 30 alternances clair/nuit par lunaison.
- La *semaine*, pour compter plus facilement les jours, provient du nombre d'alternances clair/nuit séparant des phases principales de la Lune (en nombre entier).
- L'*heure* est une subdivision conventionnelle de l'unité naturelle (le jour). Les Egyptiens ont choisi de diviser la durée de l'éclairement solaire en 12 parties égales, et de même pour la nuit. La durée de l'heure de nuit était donc différente de celle de l'heure de jour ; mais ces durées variant dans l'année, ce n'était guère pratique (elles ne sont égales que lors des équinoxes).
- La *minute* et la *seconde* sont des subdivisions sexagésimales (60) successives de l'heure. Le choix des diviseurs 12 et 60 est conventionnel (13^{e} siècle).

On a donc deux séries d'unités de temps :

- Les unités *naturelles* : année, jour, mois lunaire (liées à un phénomène naturel) ;
- Les unités *conventionnelles* : mois calendaire, semaine, heure, minute, seconde.

3.2. Valeur des unités

- Le **jour** est la durée moyenne (sur une année) entre deux passages successifs du Soleil au méridien (ou entre deux levers ou entre deux couchers successifs du Soleil). Sa durée est fixée à 24 heures *égales* (jour solaire moyen). Dans le langage courant, le mot jour désigne aussi la durée d'éclairement du Soleil, par opposition à la nuit.
- L'année exacte (**année tropique**) dure 365,24220... jours de 24 heures. Les difficultés à établir un calendrier proviennent des décimales 0,24220...
- Le **mois** lunaire dure 29,5306... jours. En raison des décimales encore, la date de la Nouvelle Lune recule dans notre calendrier solaire. L'année comporte ainsi 12 lunaisons plus 10,875 jours : il ne peut donc pas y avoir de concordance entre les calendriers lunaires et solaires.
- La **seconde** est l'unité légale de mesure du temps, définie à partir de l'atome de césium 133. On compte 86400 s par jour solaire moyen.

3.3. Le jour

Dans la vie courante, le mot « jour » possède plusieurs significations : on dit « il fait jour » par opposition à la nuit ; et « le jour » dure 24 heures, ce qui est différent de la « journée ». Concernant la rotation de la Terre, on dira alternance « clair/nuit » de préférence à « jour/nuit ».

Le **jour solaire vrai** est la durée séparant deux passages du Soleil au méridien, cet instant étant appelé *midi vrai* (ou « midi au Soleil »). Mais d'un jour à l'autre, à cause du mouvement keplérien de la Terre (loi des aires), cette durée fluctue dans un intervalle de ±16 minutes autour de la durée moyenne de 24 heures, appelée **jour solaire moyen**. L'écart est appelé *équation du temps* (le mot « équation » est ici à prendre au sens d'écart).

La durée séparant deux passages successifs d'une même étoile au méridien définit le **jour sidéral** : c'est la durée de la rotation physique de la Terre. Mais, en tournant sur elle-même, la Terre se déplace autour du Soleil. Lors d'une année tropique, la Terre effectue 365,24220 rotations mais elle en fait *une de plus* par rapport aux étoiles, puisqu'elle fait aussi le tour du Soleil. L'année tropique comporte donc 366,24220 jours sidéraux, un de plus que de jours moyens. L'écart avec le jour moyen étant de 1/365,24220 jour soit **3 min 56 s** en moins, un jour sidéral dure **23 h 56 min 4 s**.

Ces deux durées (23 h 56 min et 24 h) sont très voisines mais ont des significations différentes et ne doivent pas être confondues (ne pas « arrondir » 23 h 56 min à 24 h) : l'une a une réalité physique (jour sidéral), l'autre est due au mouvement relatif du Soleil.

Le *jour civil* (de 24 h) est le jour solaire moyen, car la vie sur Terre est régie aussi par le Soleil !

Le **Temps Universel** (UT) est l'heure civile du méridien de Greenwich, c'est-à-dire l'heure moyenne locale augmentée de 12 heures. En effet, l'instant *midi* correspond au passage au méridien, lorsque l'angle entre le Soleil et ce méridien (appelé angle horaire) est nul (il vaut alors 0 h). On ajoute 12 h à l'heure solaire en faisant débuter le jour lors du passage du Soleil moyen au méridien Nord (à minuit, sous l'horizon). Le Temps Universel *Coordonné* (UTC) est le temps universel corrigé afin de tenir compte du ralentissement irrégulier de la rotation terrestre (marées).

Un peu d'histoire

Le calendrier julien

Sous Jules César (en 46 avant notre ère), afin de mettre de l'ordre dans le calendrier lunaire romain primitif, l'astronome Sosigène proposa de se référer à un calendrier solaire :

– l'année, partagée en 12 mois inégaux, dure en moyenne 365,25 jours ;
– pour établir un comptage en nombres entiers de jours (365), le 1/4 de jour restant est cumulé sur 4 ans : on ajoute un jour supplémentaire à la 4^{e} année qui comporte alors 366 j. Ce jour « double » (dans le sens de « recommence »)

le 24e jour de février, qui était aussi le 6e jour avant les calendes de mars (le 1er mars) c'est-à-dire le début de l'année à cette époque. D'où le nom *bis sextus ante calendas martias* de ce jour supplémentaire, ce qui donnera notre terme *bissextile* ;

– l'année commence le 1er janvier (proche du solstice d'hiver), au lieu du 1er mars. On gardera cependant les noms de septembre, octobre, novembre et décembre, bien que ces mois ne soient plus les 7e, 8e, 9e et 10e de l'année. En France, l'année ne commencera le 1er janvier que sous Charles IX en 1567.

Le calendrier grégorien

L'écart entre l'année tropique (365,24220 j) et l'année julienne (365,25 j) est de 0,0078 j par an (= 11 min 14 s). L'écart cumulé en 400 ans est de 3,12 jours en trop. Or en l'an 325 de notre ère, le Concile de Nicée avait fixé la date de Pâques par une règle simple : *le dimanche qui suit la première pleine Lune du printemps*. Avec une année trop « longue », cette fête se produisait de plus en plus tôt dans le calendrier julien : l'écart atteignait 10 jours à la fin du 16e siècle.

En 1582, l'astronome allemand Clavius proposa au pape Grégoire XIII deux modifications au calendrier julien :

– enlever 10 jours à l'année 1582 ;

– modifier la règle de Sosigène pour les années bissextiles afin d'ôter 3 jours en 4 siècles (soit 0,0075 j/an).

Les conséquences de cette réforme grégorienne sont :

– le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 est le vendredi 15 octobre 1582 ;

– seront bissextiles les années dont le millésime est divisible par 4 (comme dans le calendrier julien) mais les années séculaires (divisibles par 100, et terminant les siècles) ne seront bissextiles que si elles sont divisibles par 400. Ainsi 1600, 2000, 2400 ont bien 366 j mais 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300 ne sont pas bissextiles et ont seulement 365 j.

La réforme est appliquée aussitôt à Rome, mais seulement en décembre 1582 en France (on passe du 9 au 20), en 1752 en Angleterre (2-14 septembre), et en 1918 en URSS (1-14 février). Ce calendrier est aujourd'hui en vigueur dans tous les pays. Il subsiste un écart de 0,0003 j/an (= 26 s/an) en trop, compensé en partie par le très lent ralentissement de la rotation de la Terre.

3.4. Remarques importantes sur le vocabulaire

Longueur et *temps* sont deux des sept grandeurs fondamentales du Système International d'unités. Longueur et *distance* sont souvent synonymes dans le langage courant, de même que *temps* et *durée*. Il est souhaitable de bien les distinguer.

Le mot *longueur* est relatif aux dimensions d'un objet matériel. Le mot *distance* désigne l'*éloignement* d'un objet inaccessible directement (distance d'un immeuble, distance de la Lune) mais désigne aussi la longueur du *déplacement* d'un objet (matériel ou non) : le mètre est « *la longueur du trajet parcouru dans le vide pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde* » (octobre 1983). On parle habituellement de « distance parcourue par une voiture » ou de « longueur du trajet parcouru ».
Le mot *temps* désigne, en physique, le temps *qui passe* (et non le temps *qu'il fait*). Le définir n'est pas évident : au 4e siècle, Saint Augustin écrivait « *Si on ne me le demande pas, je crois savoir ce qu'est le temps ; mais si on me le demande et que je veuille l'expliquer, je ne le sais plus* » (*les Confessions,* XIV).
Le temps pourrait être une *succession d'instants*... La *durée* est plus simple à définir : c'est l'intervalle mesurable entre deux instants.
Dans la vie courante, temps et durée sont fréquemment confondus. On veillera à bien dire « repérage *du temps* » et « mesure *d'une durée* » (et non pas « mesure du *temps* »).
L'abréviation légale de minute est **min** (et non « mn », sans le i), celle de la seconde est *s* (et non « sec » comme chez les Américains). On n'écrira pas non plus 3′ 10″ (car ce n'est plus une durée : il s'agit ici de la minute d'*angle*, fraction 1/60 du degré, et de la seconde de degré, fraction 1/60 de la minute).

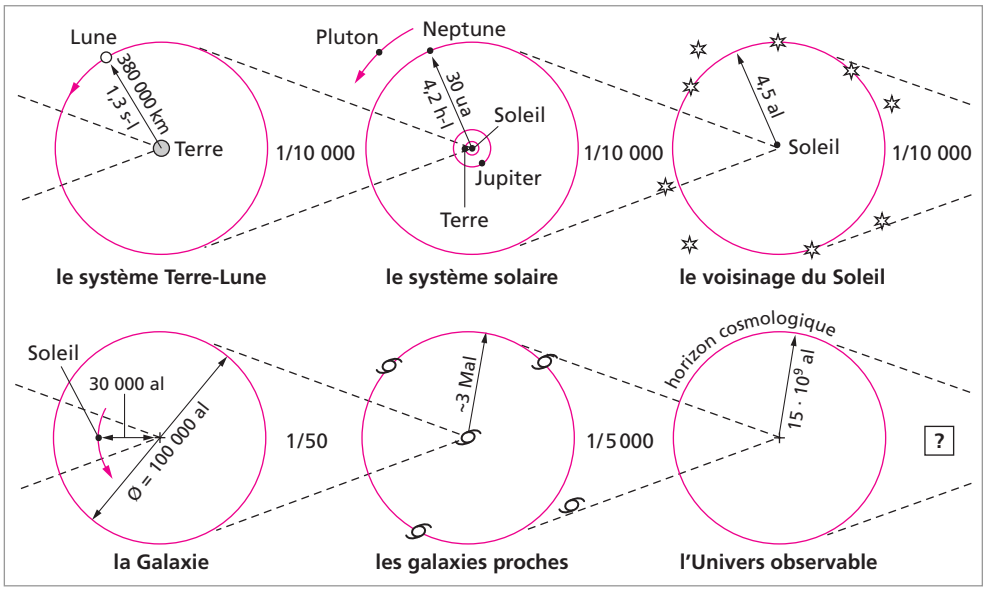
4. Les échelles dans l'Univers

4.1. Unités de distance

Les distances dans l'Univers sont souvent exprimées en durées de parcours de la lumière comme seconde de lumière, heure de lumière ou année de lumière.
L'*année de lumière* est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant un an. À raison d'environ 365,25 jours de 24 heures de 3600 s chacune, une année comporte environ 32 millions de secondes (un milliard de secondes en près de 32 ans). À la vitesse de 299 792| 458 m/s, la lumière parcourt dans le vide environ 10^{13} km en un an (soit 10 millions de millions de kilomètres) : c'est la longueur de l'année *de* lumière (abréviation al).

4.2. Exemples de distances

On compare ici différents domaines célestes, du point de vue des distances. On passe de l'un à l'autre par un effet de zoom, d'un rapport de 1 à 10 000.
• **Le système Terre-Lune**
Notre satellite naturel se situe à près de 380 000 km de la Terre, c'est-à-dire à un peu plus d'une seconde de lumière (1,3).



• Le Système solaire

Le Soleil est quasiment au barycentre des masses (à moins de 2,2 rayons solaires), la Terre se situe à environ 150 millions de km du Soleil, soit une **unité astronomique** (1 ua). La lumière du Soleil met donc 500 s à nous parvenir (≈ 8 min). La Terre parcourt son orbite à la vitesse de 30 km/s. Avec le rapport de zoom de 1/ 10000, le rayon de ce système est d'environ 13 000 secondes de lumière, soit près de 4 heures. C'est la durée que mettent les signaux radioélectriques pour nous parvenir des sondes qui survolent les planètes lointaines du Soleil (Neptune étant à 4 h de lumière du Soleil, il a fallu attendre cette durée pour recevoir la photographie de la planète lors de son survol historique en 1989).

• Les étoiles proches

Un recul de zoom de rapport 1/10 000 nous projette à 40 000 heures de lumière de distance, soit à plus de 4 années de lumière (4,5 al) pour atteindre les étoiles les plus proches du Soleil, la banlieue stellaire. Entre ces étoiles, il n'y a quasiment rien d'autre que quelques rares poussières et des atomes isolés ; cet excellent vide est bien meilleur que celui de nos laboratoires.

• La Galaxie

En reculant 10 000 fois plus loin, on atteint la distance de 50 000 al, qui est le rayon caractéristique de la Galaxie, un vaste système d'étoiles emportées dans une très grande rotation. De la Terre, on en voit la trace dans le ciel nocturne : la Voie lactée. Le Soleil est situé vers la périphérie de ce système dynamique, à près de 30 000 al du « centre » galactique, en nous entraînant dans ce tourbillon, à raison de un tour en 250 millions d'années, à près de 220 km/s. Le Soleil est une étoile banale parmi les 100 milliards (10^{11}) que contient notre Galaxie ; il n'y a pas de corps central attracteur.

• **Les galaxies voisines**

Un recul seulement 50 fois plus loin nous fait atteindre les galaxies les plus proches de la nôtre, semblables à notre Galaxie (avec une majuscule). On est à 2,5 millions d'al : la lumière qui nous en parvient a été émise à l'époque des premiers hommes sur la Terre.

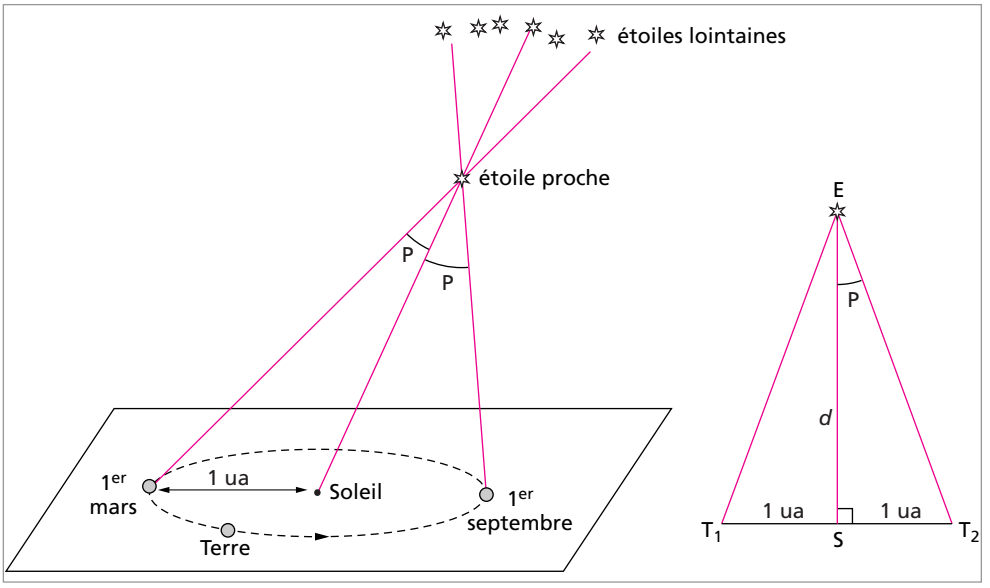
• **« Tout » l'Univers**

En reculant encore d'un rapport de 1 à 5000, on dénombre de plus en plus de galaxies (10^{10} à 10^{12}) généralement groupées en amas de quelques centaines de membres, et on atteint les limites de l'Univers *observable* : l'horizon cosmologique est situé à 15 milliards d'années de lumière, la lumière qui nous en parvient a été émise lors de la « création » de l'Univers, lors du **big-bang**. Il faudra attendre un milliard d'années pour que cet horizon soit à 16 milliards d'al.

Revenons au premier système, le couple Terre-Lune, et un coup de zoom de rapport 10000/1 nous met à 38 km du « centre » : c'est la banlieue d'une grande capitale comme Paris. Encore un coup de zoom de 10000/1 et on atteint un espace de près de 4 m de rayon caractéristique : la salle de classe. L'étape suivante nous amène à 0,4 mm seulement. L'échelle moléculaire nécessite encore une étape supplémentaire.

4.3. Parallaxe stellaire

La distance des étoiles les plus proches est déterminée par *parallaxe* : la base T_1T_2 correspond au diamètre de l'orbite terrestre (2 unités astronomiques, 2 ua) pour deux visées faites à 6 mois d'intervalle (on parle alors de parallaxe annuelle). L'angle $P = \widehat{T_1ES} = \widehat{T_2ES}$ vaut souvent moins de $0,1''$ (au plus $0,76''$ pour l'étoile la plus proche, *Proxima*, dans la constellation du Centaure, à 4,2 années de lumière de distance).



L'unité de distance *parsec* (ou « *par*allaxe de 1 *sec*onde », symbole pc) correspond à la distance d'un astre dont l'angle de parallaxe annuelle serait $P = 1''$. L'angle P étant très petit, la distance D (en pc) vaut $1/P$ (où P est en seconde de degré).

Exemple : Établir que 1 pc = 3,26 al.

Recherche & Développement

Le système GPS

Les récepteurs *GPS* (*Global Positioning System* = Système de Positionnement sur le Globe) utilisent un procédé très différent de la télémétrie par écho radar. À partir d'au moins 3 satellites en orbite circulaire à 20 183 km d'altitude, dont la position est connue très précisément ($\approx$ 1 m), le récepteur calcule sa position sur la Terre correspondant aux décalages horaires entre les 3 signaux reçus (chaque satellite possède une horloge atomique embarquée, synchronisée à moins de 1 ns près à partir d'une horloge au sol). En se déplaçant sur Terre (ou en altitude), le récepteur *calcule* sa position géographique à chaque instant. La distance parcourue s'obtient donc par un calcul de trigonométrie et non par une mesure directe. La précision est souvent inférieure à 100 m.

4.4. Le Système solaire à l'échelle

Cet exercice peut être proposé à des élèves de niveau collège. On veut réaliser avec les élèves un *plan* du Système solaire, l'échelle choisie étant telle que le Soleil y soit représenté par *une orange* de 7 cm de diamètre. Chaque planète sera alors placée sur une trajectoire (ou portion de trajectoire) circulaire centrée sur le Soleil.
Le tableau ci-après donne les distances au Soleil des planètes visibles à l'œil nu. Ces valeurs sont exprimées en unités astronomiques (ua).
a) Reprendre ce tableau en donnant des valeurs approchées (ou arrondies) traduisant des ordres de grandeur de ces distances. Quel est l'intérêt de présenter aux élèves ces nouvelles valeurs, plutôt que celles proposées ici ?
b) Indiquer la valeur numérique de l'échelle utilisée si le Soleil est représenté par l'orange. Que penser d'un autre choix d'échelle pour lequel le Soleil serait représenté par un ballon de basket de 28 cm de diamètre ?
c) Donner un tableau des rayons des orbites planétaires dans le plan que vous réaliserez, par exemple celui pour lequel le Soleil est représenté par une orange.
d) Avec la même échelle (celle de l'orange ou celle du ballon), donner la grosseur de la bille représentant la Terre, ainsi que celle qui représente la plus grosse des planètes.
e) Parmi les objectifs suivants, lequel vous paraît le plus important pour ce travail :
– savoir effectuer des calculs numériques ;
– acquérir la notion d'échelle ;
– prendre conscience du vide dans le Système solaire.

Dimensions et distances dans le Système solaire

Planètes	*Distance au Soleil* (ua)	*Rayon* (km)
Mercure	0,387 098	2440
Vénus	0,723 330	6050
Terre	1,000 00	6378
Mars	1,523 68	3400
Jupiter	5,202 60	71400
Saturne	9,554 91	60000

Distance de la Terre au Soleil :	150 000 000 km
Diamètre du Soleil :	1 400 000 km

• Éléments de réponses

a) Pour beaucoup d'élèves, fournir des résultats numériques avec beaucoup de chiffres significatifs semble être une nécessité de rigueur scientifique ; il n'en est rien, il est préférable de ne garder que quelques chiffres (valeur approchée) donnant une précision moyenne mais permettant à l'élève d'avoir en tête un bon ordre de grandeur.

b) L'échelle est telle qu'on représente 1 400 000 km (le diamètre réel du Soleil) par 7 cm (le diamètre de l'orange). L'échelle est donc de 7 (cm) pour 140 000 000 000 (cm) soit 1 pour 20 milliards. L'échelle de la maquette est donc de 1/20 000 000 000^{e} (un vingt-milliardième). Avec le ballon de basket de 28 cm de diamètre, l'échelle est 4 fois plus grande (1/5 000 000 000).

c) On réduit les distances réelles dans le rapport d'échelle pour obtenir les distances dans la maquette. On calcule d'abord la distance de la bille (Terre) à l'orange (Soleil) : c'est la longueur de 150 millions de km divisée par 20 milliards, soit 7,5 m. Ainsi, l'unité astronomique correspond à 7,5 m dans la maquette. Les valeurs sont ici arrondies afin de mieux figurer l'ordre de grandeur des résultats. L'étoile la plus proche (à 4 al) sera une autre orange éloignée de... 2000 km !

d) Les tailles des planètes sont réduites dans le même rapport d'échelle. Seules les « géantes » Jupiter et Saturne ont la dimension d'une bille (de jeu), les autres sont 10 à 20 fois plus petites. Remarquer que la Terre est près de 100 fois plus petite que le Soleil et 10 fois plus petite que Jupiter. Ce sont ces *rapports* de dimensions qu'il faut retenir.

e) L'intérêt de cet exercice est surtout de faire visualiser l'immense vide qui existe dans le Système solaire : à 3 m de l'orange se situe une minuscule tête d'épingle (Mercure), puis à 5 m, on en trouve une autre à peine plus grosse (Vénus), la suivante est à 7,5 m (la Terre), puis Mars à 11 m ; on trouve une bille (Jupiter) à 40 m de l'orange et une autre à plus de 70 m de distance. L'orange la plus proche est à 2000 km ! En dehors de ces « minuscules » planètes très éparses, il n'y a rien...

Bien sûr, les élèves doivent maîtriser la notion d'échelle et les techniques de calcul (les puissances de 10) pour mener à bien ce travail. C'est une compétence et non un objectif. L'échelle des distances dans l'Univers s'étend sur *plus de 40 puissances de* 10 : de 10^{-15} m (noyau atomique) à 10^{26} m (l'Univers observable à 10 ou 15 milliards d'al).

Dimensions et distances dans le Système solaire et dans la maquette (orange)

Planètes	*Distance au Soleil* (ua)	*Distance de l'orange* (m)	*Diamètre* (km)	*Diamètre des billes* (mm)
Mercure	0,4	3,0	4 800	0,2
Vénus	0,7	5,0	12 000	0,6
Terre	1,0	7,5	13 000	0,6
Mars	1,5	11	6 800	0,3
Jupiter	5,2	40	140 000	7
Saturne	9,6	72	120 000	6

5. Détermination des distances de la Lune et du Soleil

Cette partie décrit la méthode utilisée par ARISTARQUE DE SAMOS (310-230 av. notre ère). Aristarque a déterminé la distance de la Lune et celle du Soleil (en prenant comme unité le rayon terrestre), en utilisant judicieusement quelques observations simples et un peu de géométrie. Il en a déduit que le Soleil ne devait pas tourner autour de la Terre (modèle géocentrique) mais que c'était plutôt l'inverse. Cependant, la méconnaissance du principe d'inertie a empêché d'accepter ce mouvement de la Terre, et le modèle héliocentrique a été rejeté pour 18 siècles !

5.1. La distance Terre-Lune

• Observations

– La *lunaison* (durée moyenne entre deux phases identiques) dure 30 jours (environ).
– La Lune « avance » dans le ciel de son diamètre apparent en 1 heure (en moyenne).
– Les *éclipses* de Lune les plus longues durent 2 heures (environ).

• Exploitation

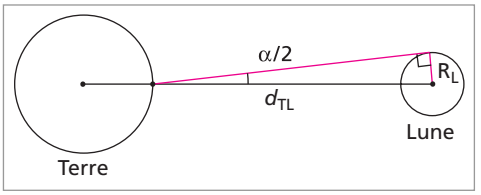
– Calculer le diamètre apparent α de la Lune.
– Calculer la distance Terre-Lune d_{TL} en fonction de α et du diamètre linéaire de la Lune.
– Calculer le rapport d_{TL}/R_T (où R_T est le rayon terrestre).
– Comparer avec la valeur moderne $d_{TL}/R_T \approx 60$.

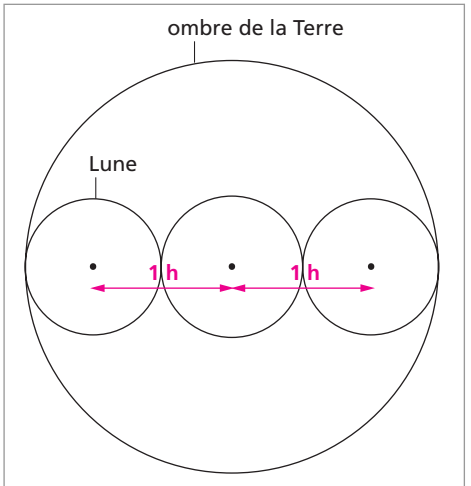
• Résultats

– Le diamètre apparent de la Lune correspond à son déplacement visuel en 1 h à raison de 1 tour (360°) en 30 jours ; cela donne 12° par jour soit 0,5° par heure et $\alpha = 0,5°$.

– La distance d_{TL} est telle que le rayon lunaire est vu sous l'angle $\alpha/2$ (on peut confondre l'angle et le sinus) : $R_L/d_{TL} = \sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ d'où $d_{TL} = 2R_L/\alpha$.

– Le diamètre de la Terre est 3 fois plus grand que celui de la Lune (en non pas 2 fois car, au début et à la fin de l'éclipse totale, les cercles doivent être tangents intérieurement). On en déduit $d_{TL} = 2R_L/3\alpha$ avec $\alpha = 0,5° = 0,0087$ rad d'où $d_{TL}/R_L \approx 76$. C'est un peu plus que la valeur moderne (60) car les éclipses les plus longues durent en réalité un peu moins de 2 h, et $R_L/R_T \approx 0,27$ (et non pas 0,33 comme ici). On mesure aujourd'hui la distance Terre-Lune par tir laser (en *IR*) sur un rétroréflecteur déposé sur la Lune : on mesure la durée de l'écho à moins de 1 ns près (la distance est connue à moins de 15 cm près).





Les éclipses totales de Lune les plus longues durent environ 2 heures.

5.2. La distance Terre-Soleil

• Hypothèse

Le Soleil *n'est pas* situé à l'infini. Conséquences : les deux positions L′ de *quadrature* de la Lune ($\widehat{STL'} = 90°$) ne sont pas confondues avec celles de la *phase* de premier quartier (L_3) ou de dernier quartier (L_2) : $\widehat{TL_3S} = 90°$.

• Observations

– Aristarque évalue la durée $L_3\,L'$ à 6 heures (1/4 de jour) ;

– le diamètre apparent du Soleil est *égal* à celui de la Lune (ce qui explique les éclipses de Soleil).

• Exploitations

– Calculer l'angle x (angle $\widehat{\mathrm{TSL}_3}$ ou $\widehat{\mathrm{TSL}_2}$).

– Calculer le rapport d_{TS}/d_{TL} (valeur moderne ≈ 400).

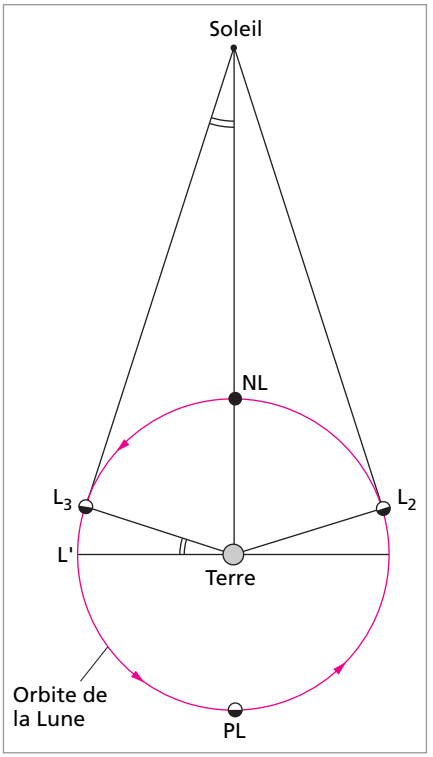
– Calculer le rapport du diamètre du Soleil à celui de la Terre.

• Résultats

– L'angle $\widehat{\mathrm{L}_3\mathrm{TL}'}$ vaut donc 3° (la Lune se déplace de 12° par jour) et $\widehat{\mathrm{TSL}_3} = 3°$ d'où $d_{TS}/d_{TL} = 1/\sin(3°) \approx 19$ (c'est près de 20 fois moins que la valeur moderne).

– Le Soleil et la Lune ayant même diamètre apparent, le rapport des diamètres linéaires est égal à celui des distances : le Soleil est donc 19 fois plus loin et 19 fois plus gros que la Lune. Comme la Lune est environ 3 fois plus petite que la Terre, Aristarque en déduit que le Soleil est 6 à 7 fois plus gros que la Terre.

Pour Aristarque, s'il est vrai que la « petite » Lune tourne autour de la Terre, ce ne peut pas être le cas du « gros » Soleil ; il lui semble plus naturel que la Terre tourne autour du Soleil, entraînant la Lune avec elle ; mais ignorant le principe d'inertie, un tel mouvement de la Terre n'était pas envisageable à cette époque. Le modèle héliocentrique devra attendre 18 siècles...



En réalité, il n'est pas possible de déterminer à l'œil nu l'écart entre les positions L_3 et L' (l'angle vaut environ 9') la durée $L_3\,L'$ correspond à 18 min et non pas à 6 heures. On en déduit alors $1/\sin(9') \approx 400$.

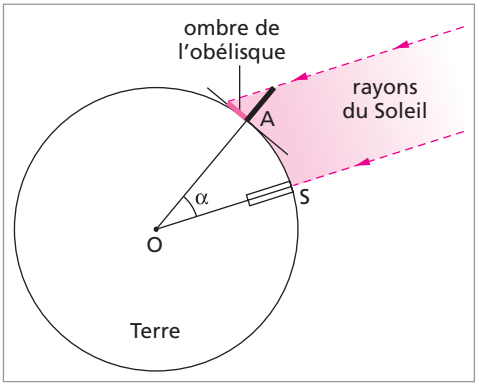
6. Mesure de la Terre par Ératosthène

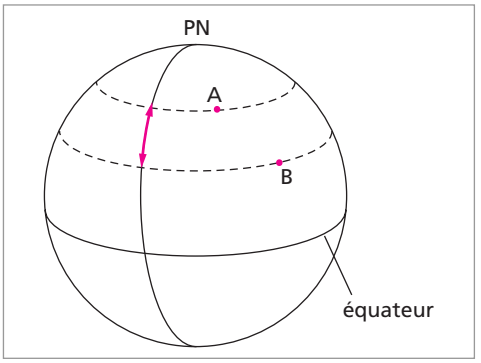
Vers l'an – 220, le savant grec Ératosthène (284-192 av. notre ère) rapproche deux faits d'observation en Égypte :

– à Syène (aujourd'hui Assouan, sur le tropique Nord), le Soleil est visible au fond d'un puits le jour du solstice d'été (il est donc situé au zénith, exactement à la verticale du puits) ;

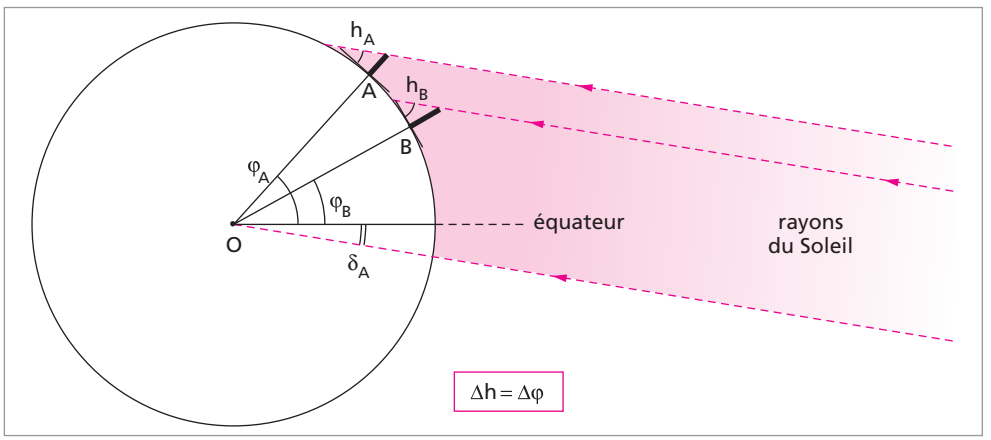
– à Alexandrie, au bord de la Méditerranée, l'obélisque fait toujours une ombre à midi.

Depuis ARISTOTE (au IV^{e} siècle avant notre ère), on sait que la Terre est sphérique (par l'observation de la forme toujours circulaire de l'ombre de la Terre sur la Lune lors des éclipses de Lune). Ératosthène interprète ces observations en disant que les verticales de Syène et d'Alexandrie font un angle α au centre de la Terre. Les rayons du Soleil sont donc inclinés de l'angle α sur la verticale d'Alexandrie. Il évalue cet angle à la fraction 1/50 du tour de cercle (la trigonométrie n'est pas encore connue). La distance entre les deux villes est évaluée en proportion des durées des voyages des caravanes le long du Nil, entre Alexandrie et Syène : il trouve une distance correspondant à 800 de nos kilomètres actuels ; cela conduit à une circonférence de $800 \times 50 \approx 40\,000$ km.





En réalité, Syène et Alexandrie ne sont pas situées sur le même méridien. Mais le principe de la méthode d'Ératosthène est tout à fait correct : la différence des hauteurs du Soleil lors du passage au méridien de chacune des villes est égale à la différence de leurs latitudes géographiques : $h_1 - h_2 = \varphi_1 - \varphi_2$. La distance à utiliser est alors celle entre les parallèles géographiques, comptée le long d'un méridien.



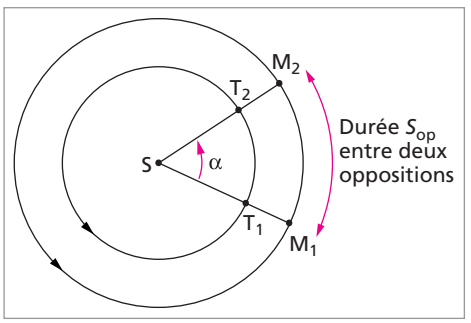
Aujourd'hui, on détermine le rayon équatorial de la Terre : 6 378,140 km ce qui donne un périmètre équatorial de 40 075,036 km. Par suite de l'aplatissement polaire de la Terre (1/300), le méridien est un peu plus court et mesure 40 008 km, le long de l'ellipsoïde de révolution. La sphère de même volume que la Terre a un rayon de 6 371 km.

7. Copernic et le modèle héliocentrique

Le modèle de Copernic (1543) permit de calculer (pour la première fois dans l'histoire) les périodes des révolutions sidérales (autour du Soleil) et les rayons des orbites des planètes : Copernic apporta ainsi une échelle des distances dans le Système solaire.
On se place ici dans le cas simplifié où les orbites sont circulaires, coplanaires et concentriques.

7.1. Les périodes sidérales

Pour déterminer la période sidérale d'une planète, on utilise deux oppositions successives de la planète (Mars par exemple) : vus depuis la Terre, Mars est à l'opposé du Soleil, passant à « minuit solaire » au méridien. On note la date du calendrier pour la position T_1 de la Terre.
Après plusieurs mois (26 dans le cas de Mars), on observe une nouvelle opposition : la Terre est en T_2 et Mars en M_2. Soit α l'angle au centre dont a tourné la planète pendant cette durée (S_{op}) entre ces 2 oppositions (durée de la révolution *synodique*). Les mouvements étant circulaires uniformes, les durées sont proportionnelles aux angles au centre.



En S_{op} jours, Mars a tourné de l'angle α autour du Soleil et la Terre a tourné de $360° + \alpha$ (soit un tour de plus). Si T est la période *sidérale*, on a :

$$\frac{360° + \alpha}{S_{op}} = \frac{360°}{365{,}25} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{S_{op}} = \frac{360°}{T} \quad \text{d'où on tire} \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{365{,}25} - \frac{1}{S_{op}}$$

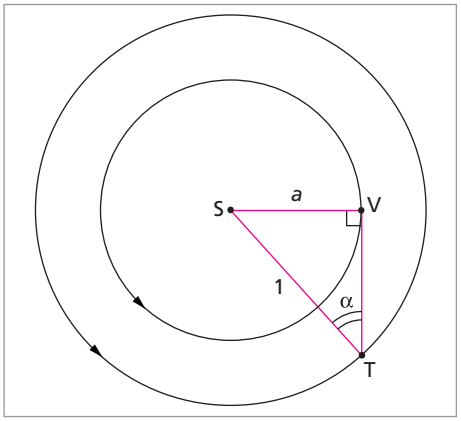
Dans le cas de Mercure et de Vénus, planètes intérieures à l'orbite de la Terre, on intervertit les termes T et 365,25 ce qui donne $\frac{1}{T} = \frac{1}{365{,}25} + \frac{1}{S_{op}}$.
Les valeurs observées pour S_{op} et celles calculées pour T sont données ici :

	Mercure	*Vénus*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*
S_{op} (observée)	116 j	584 j	780 j	399 j	378 j
T (calculée)	88 j	225 j	687 j	11,8 ans	29,6 ans

7.2. Les distances au Soleil

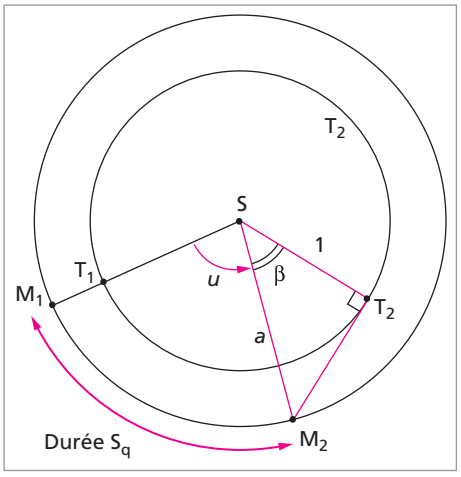
Copernic utilise encore des positions particulières des planètes et de la Terre : l'élongation maximale pour Mercure et Vénus, ou la quadrature pour les planètes extérieures.

L'élongation est l'angle entre la planète et le Soleil. Cet angle est maximal quand la ligne TV est tangente à l'orbite.



Si la distance TS est prise pour unité (unité astronomique), on obtient la relation $\sin(\alpha) = a$. Pour Mercure, $\alpha < 23°$ (en moyenne) d'où $a = 0,39$ ua. Pour Vénus, ces valeurs sont 46° et 0,72 ua.

La quadrature est la position de la planète sur son orbite pour laquelle la planète et le Soleil sont vus dans deux directions perpendiculaires. Pour calculer le rayon orbital, on part d'une opposition (M_1T_1S). La quadrature se produit environ 3 mois plus tard, quand M_2T_2 est tangente au cercle de l'orbite terrestre.



Soit S_q la durée écoulée entre ces 2 positions. Mars a tourné de l'angle u autour du Soleil tandis que la Terre a tourné de $u + \beta$. Alors $\dfrac{u+\beta}{S_q} = \dfrac{360°}{365,25}$ pour la Terre, et $\dfrac{u}{S_q} = \dfrac{360°}{T}$ pour la planète où T est la période sidérale déjà calculée. On en déduit $\beta = 360°.\dfrac{S_q}{S_{op}}$ puis, dans le triangle SM_2T_2 : $a = 1/\cos\beta$.

Les valeurs observées de S_q et les rayons calculés des orbites sont :

	S_q	S_{op}	β	a
Mars	106 j	780 j	48,9°	1,5 ua
Jupiter	87,5 j	399 j	78,9°	5,2 ua
Saturne	88,2 j	378 j	84,0°	9,5 ua

Examinons le tableau des valeurs obtenues par Copernic (complété par les valeurs des rapports T/a, T/a^2 et leur produit) :

planète	T	T (ans)	a (ua)	T/a	T/a^2	T^2/a^3
Mercure	88 j	0,24	0,39	0,62	1,58	0,98
Vénus	225 j	0,62	0,72	0,86	1,20	1,03
Terre	365,25 j	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Mars	687 j	1,88	1,5	1,2	0,84	1,01
Jupiter	11,8 ans	11,8	5,2	2,3	0,43	0,99
Saturne	29,6 ans	29,6	9,5	3,1	0,33	1,02

On constate que, de Mercure à Saturne, T et a sont croissants, le rapport T/a croît mais T/a^2 décroît. Copernic aurait pu calculer que le produit de ces deux rapports reste quasiment constant : il aurait ainsi obtenu la 3^{e} loi de Kepler 75 ans avant ce dernier.

7.3. Modèle géocentrique et modèle héliocentrique

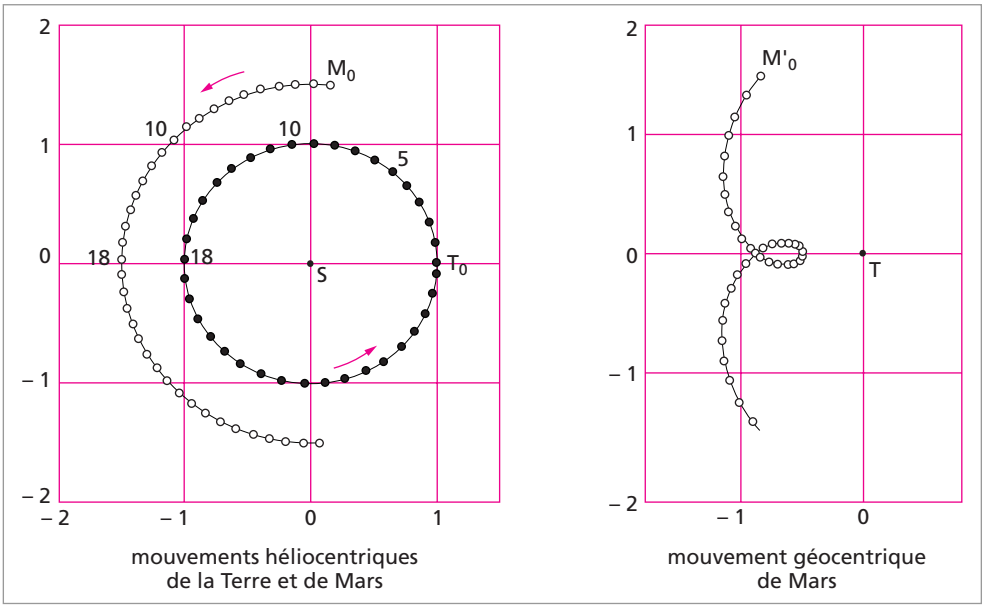
Il est possible de représenter la trajectoire d'une planète (Mars par exemple) dans deux référentiels :
- héliocentrique, où la planète décrit une trajectoire circulaire (supposée uniforme ici) ;
- géocentrique, où le Soleil décrit également une trajectoire circulaire autour de la Terre.

Référentiel héliocentrique

Sur deux cercles de centre S et de rayons 6 et 9 cm (dans le rapport 1 à 1,5) représentant les orbites de la Terre et de Mars, on place les positions des planètes à intervalles réguliers de temps, par exemple tous les 10 jours. À raison de 360° en une année pour la Terre et en 687 j pour Mars, cela correspond à des angles de 10° et 5° environ (9,8° et 5,2°). On peut alors numéroter les positions de 0 à 36 (de T_0 à T_{36} et M_0 à M_{36}) (on choisit une position quelconque de départ, par exemple 0° pour la Terre et $\phi = 84°$ pour Mars).

Référentiel géocentrique

À partir de cette première représentation, on peut obtenir la trajectoire de Mars dans un référentiel géocentrique. Il est souhaitable de travailler avec du papier calque ou avec un transparent où on marque le centre T du repère géocentrique. En superposant les positions successives T_0, T_1, T_2, T_3 ... en T (tout en conservant les mêmes directions d'axe), on reporte les positions correspondantes M_0, M_1, M_2 ... On voit se dessiner la trajectoire géocentrique de Mars, avec notamment une rétrogradation entre M_{15} et M_{22} (si on a choisi $\phi = 84°$). La planète est proche de la Terre en M_{18}, à l'opposé du Soleil (c'est l'opposition) donc très brillante dans le ciel nocturne.
Copernic a fait la démarche inverse : représenter la trajectoire géocentrique (la seule observable) dans un référentiel héliocentrique.



8. La gravitation universelle

8.1. Aspect historique de la découverte

Dès 1605, Kepler découvre que la planète Mars ne décrit pas une orbite circulaire autour du Soleil comme le suggérait Copernic en 1543, mais une *ellipse* dont le Soleil occupe un des foyers. Le mouvement n'est pas uniforme : la vitesse est d'autant plus faible que la planète est plus lointaine du Soleil (c'est la *loi des aires*). Ce sont deux **lois géométriques** qui **décrivent** le mouvement de la planète, bien mieux que le modèle géocentrique de Ptolémée ou celui héliocentrique de Copernic. Mais Kepler ne connaît pas la cause de ce mouvement.

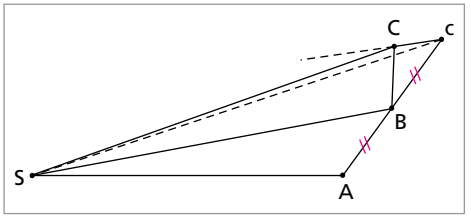
En 1618, Kepler constate que les planètes obéissent à une **loi numérique** $T^2/a^3 =$ cste. Ces planètes ayant en commun de tourner autour du Soleil, Kepler envisage l'existence d'une cause résidant *dans* le Soleil. La seule action à distance connue à son époque étant la force magnétique, Kepler suppose que le Soleil agit comme un gigantesque aimant sur toutes les planètes.

Un demi-siècle plus tard, Newton a déjà formulé le **principe d'inertie** : « si un corps n'est pas soumis à une force, il reste au repos ou bien poursuit son mouvement rectiligne uniforme » (c'est la 1re loi de Newton). Il constate que la Lune tourne autour de la Terre et en déduit que la Lune est soumise à une force de la part de la Terre. Quelle est la nature de cette force ?

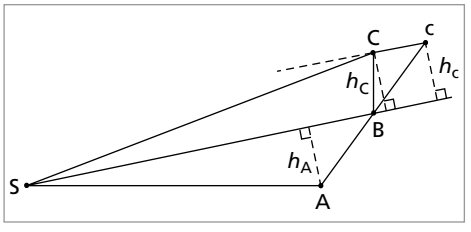
C'est là que se situe l'anecdote de la pomme (épisode raconté par Newton lui-même à la fin de sa vie et cité par VOLTAIRE en 1738 dans *Éléments de la Philosophie de Newton*, livre très important pour la diffusion des idées de Newton en France). La pomme tombe au sol car elle est attirée par la Terre (la gravitation de la physique terrestre). Newton « voit » que la Lune « tombe » également : elle est soumise à une force *de même nature* que le poids de la pomme. Par ce rapprochement d'idées, Newton vient d'unifier la physique terrestre et la physique céleste, séparées pendant 20 siècles depuis Aristote ! L'idée de Newton est très novatrice car, en 1687, la seule façon de modifier un mouvement est d'exercer un choc ou un contact (traction ou poussée) et non pas une *action à distance*.
Newton qualifie d'**universelle** la gravitation quand il constate que les satellites de Jupiter, ceux de Saturne, et les comètes obéissent à la même loi dans le Système solaire. La gravitation, de portée infinie, est responsable de l'organisation des structures de l'Univers (les galaxies, les étoiles, les planètes) et de leur évolution dans l'espace et dans le temps. Les modèles de Copernic (trajectoires circulaires) et celui de Kepler (ellipses) sont des descriptions géométriques du Système solaire. Newton y apporte une description physique : Kepler décrit comment les planètes se déplacent autour du Soleil, Newton explique pourquoi elles se déplacent. Tout en étant unifiée, la physique devient causale. C'est un progrès fondamental.

8.2. Newton et la force centrale

(*cf. Principia*, Livre 1, proposition 2, théorème 1 (1687) ou *cf. De motu*, théorème 1, 1684)
Une planète se déplace de A vers B pendant l'intervalle de temps dt. Si la planète ne subissait pas de force en B de la part du Soleil, elle irait en ligne droite à vitesse constante (principe d'inertie) et serait en c à la fin de la même durée dt, telle que AB = Bc (Newton utilise les mêmes notations C et c).



En réalité, la planète subit en B une force dirigée vers le Soleil (force centrale). La combinaison des deux effets (vitesse en B et force centrale) produit une déviation vers C. La trajectoire est courbe car Newton la présente comme une succession de petits segments.



Or les triangles SAB, SBc et SBC ont tous les trois la même aire, égale à SB · $h/2$ où h est la hauteur de chacun de ces triangles, perpendiculaire à SB :

$$\text{AB} = \text{Bc} \Rightarrow h_\text{A} = h_\text{C} = h_\text{c}$$

C'est donc par un raisonnement purement géométrique que Newton prouve qu'**une force centrale crée un mouvement qui obéit à la loi des aires**. Dès 1605, Kepler avait déterminé cette même loi des aires en étudiant le mouvement de la planète Mars observé par Tycho Brahé vers 1590-1595. Newton trouve ainsi une cause à ce mouvement (il n'est pas nécessaire que la force soit en $1/r^2$ pour que la loi des aires soit vérifiée).

8.3. Newton, la pomme et la Lune

Voir exercice 4

8.4. Masse d'inertie et masse gravitationnelle

Newton formule la loi d'attraction en $1/r^2$ entre les masses. Dans l'expression $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$, le coefficient m correspond à la **masse d'inertie** (m_i), traduisant la plus ou moins grande facilité à modifier le mouvement de ce corps. Dans l'expression $F = G.Mm/r^2$, le coefficient m correspond à la **masse gravitationnelle** (m_g), traduisant l'attraction.
Les deux phénomènes étant différents, s'agit-il de la même masse ? Newton fait l'hypothèse $m_i = m_g$. En 1905, Einstein postule l'identité de ces masses.

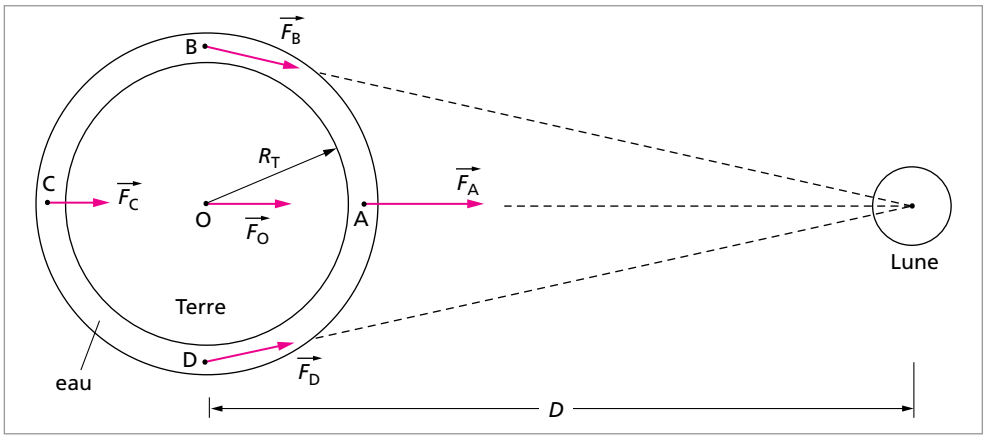
8.5. Masse de la Terre

Les relations $m_i.a = G.M_T.m_g/R^2$ et $m_i = m_g$ conduisent à : $a = G.M_T/R^2 = g$
(g est l'accélération de la pesanteur, égale à 9,81 m/s^2) d'où $G.M_T = g.R^2$, ce qui donne la valeur du produit $G.M_T$. Mais Newton ne peut connaître la masse de la Terre car la valeur de la constante G n'est pas connue.
C'est Henry CAVENDISH qui en 1798, améliorant une expérience de John MICHELL, détermine la valeur numérique de G, un siècle après la loi de Newton. Connaissant G et le produit $G.M_T$, Cavendish en déduit la masse de la Terre et sa densité moyenne. La valeur obtenue (5,5) étant supérieure à la densité moyenne du sol de la croûte terrestre (2 à 3), Cavendish en déduit que la Terre contient un noyau d'un matériau très dense (du fer, compte tenu de l'existence du géomagnétisme). Cette hypothèse s'est révélée très féconde.

9. LES MARÉES

9.1. Attraction différentielle

Les marées océaniques résultent de l'interaction gravitationnelle de la Lune (et du Soleil) sur le milieu déformable de la masse des océans. Considérons la Terre sphérique, de rayon R, de centre O, sans continent, recouverte uniformément d'une certaine épaisseur d'eau.



En 4 points A, B, C, D, la Lune de masse M_L (à la distance D du centre de la Terre) exerce une attraction sur une masse m d'eau. Les forces ont pour expression :

$$F_A = G \cdot M_L \cdot \frac{m}{(D-R)^2}, \qquad F_B = G \cdot M_L \cdot \frac{m}{D^2+R^2},$$

$$F_C = G \cdot M_L \cdot \frac{m}{(D+R)^2}, \qquad F_D = F_B, \qquad \text{et} \qquad F_O = G \cdot M_L \cdot \frac{m}{D^2}$$

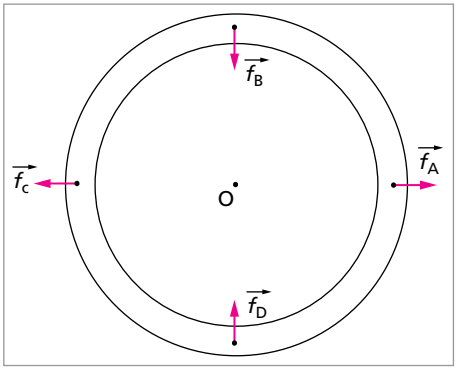
où F_O est la force d'attraction exercée par la Lune sur la Terre en son centre O.
On s'intéresse au déplacement de l'eau sur la Terre : on doit donc calculer *l'attraction différentielle*, c'est-à-dire la différence des attractions en A, B, C, D et celle en O.

$$f_A = F_A - F_O = G \cdot M_L . m \cdot \left[\frac{1}{(D-R)^2} - \frac{1}{D^2}\right] \approx G \cdot M_L \cdot m . \frac{2R}{D^3} \text{ car } R \ll D.$$

De même, $f_C = F_C - F_O \approx G \cdot M_L \cdot m . \dfrac{-2R}{D^3}$ et $f_B = F_B - F_O \approx G \cdot M_L \cdot m \cdot \dfrac{-R}{D^3}$.
Les forces $\overrightarrow{f_A}$ et $\overrightarrow{f_C}$ ont même module. L'accélération $\Gamma = G \cdot M_L \cdot \dfrac{R}{D^3}$ vaut $5{,}6 \cdot 10^{-7}$ N/kg, très faible devant $g = 9{,}81$ m/s^2.

Par rapport à O, on a donc 4 forces qui agissent sur l'eau :

- deux forces *centrifuges* ($\overrightarrow{f_A}$ et $\overrightarrow{f_C}$) : elles éloignent l'eau de la Terre en la soulevant (marée haute)
- deux forces *centripètes* ($\overrightarrow{f_B}$ et $\overrightarrow{f_D}$) : elles abaissent le niveau de l'eau vers la Terre (marée basse).



Il est important de noter que $\overrightarrow{f_C}$ est dirigée à l'opposé de la Lune, bien qu'il s'agisse d'une force d'attraction : en réalité, c'est une attraction différentielle, l'attraction F_C (dirigée

vers la Lune) est plus petite que celle F_O car C est plus loin de la Lune que O ; la différence $F_C - F_O$ est donc négative, dirigée à l'opposé de la Lune.

9.2. Le marnage

Le marnage est la différence des hauteurs de l'eau en un même lieu. Dans le cas du modèle de la Terre lisse envisagé ici, il vaut $2.h_0 \approx 54$ cm avec $2.h_0 = \frac{3}{2}.\frac{G \cdot M_L \cdot R_T^2}{gD^3}$ où R_T est le rayon de la Terre. En pleine mer, loin des côtes, le niveau de l'océan évolue périodiquement entre $+27$ cm et -27 cm par rapport à un niveau moyen. Le relief des côtes crée un marnage généralement plus important : il atteint 15 m au Mont-Saint-Michel (écart entre les marées les plus hautes et les marées les plus basses). En mer fermée, comme en Méditerranée, le marnage est très faible (≈ 10 cm) car la mer ne peut se « vider » rapidement dans l'Atlantique par le détroit de Gibraltar avant de se « remplir » 6 heures plus tard.

9.3. Rythme des marées

La période est de 12 h 25 min, qui représente la moitié de la durée séparant deux passages de la Lune au même méridien : $\frac{1}{2\tau} = \frac{1}{23\text{ h }56\text{ m}} - \frac{1}{27{,}32\text{ (j)} \times 24\text{ (h)}}$ où 27,32 jours est la période sidérale de la révolution de la Lune d'où $2 \cdot \tau = 24{,}841\text{ h} = 24\text{ h }50\text{ min}$.

9.4. Influence du Soleil

On a vu que l'accélération due à l'attraction lunaire, en M_L/D_L^3 s'écrit : $\Gamma_L = G.M_L.\frac{R}{D_L^3}$ où D_L est la distance de la Lune. Le Soleil exerce une action semblable, en M_S/D_S^3. Les données numériques $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $M_L = M_T/81$, $M_S = 3 \cdot 10^{30}$ kg $\approx 330\,000 M_T$, puis $D_L = 384\,000$ km et $D_S = 150 \cdot 10^6$ km conduisent à :

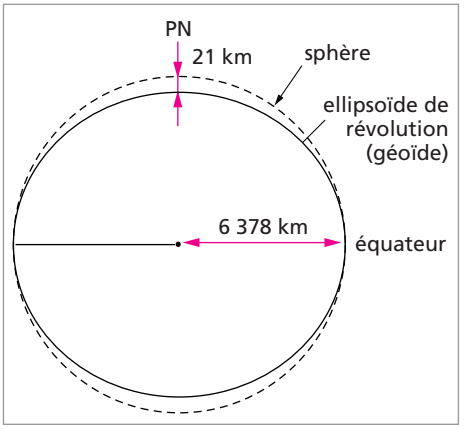
- pour la Lune : $M_L/D_L^3 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg/m^3
- pour le Soleil : $M_S/D_S^3 = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg/m^3.

Ainsi, l'action du Soleil correspond à *la moitié* de celle de la Lune. Cela explique les variations des hauteurs des marées selon les phases de la Lune :

- renforcement de la marée (haute ou basse) lors des phases de NL et PL ;
- atténuation de la marée lors des quartiers (PQ et DQ).

Les marées d'équinoxes sont renforcées car le Soleil se trouve alors dans le plan de l'équateur terrestre (à peu près comme la Lune).
Il existe également des marées atmosphériques et des marées terrestres : le sol de la croûte terrestre se soulève et s'abaisse au rythme des marées océaniques (mais le milieu n'est pas aussi déformable que l'eau des océans).

9.5. Ralentissement de la rotation de la Terre



Une des conséquences des marées est le ralentissement de la rotation terrestre, par suite des déformations de la croûte et des mouvements de va-et-vient de l'eau toutes les 12,5 heures. Cette énergie se dissipe en chaleur, créant une diminution de l'énergie cinétique et du moment cinétique de rotation de la Terre.

La durée du jour (24 h) décroît ainsi très lentement de 45 ns/jour. L'étude de coraux fossiles vieux de 350 millions d'années a montré qu'il y avait alors près de 400 alternances clair-nuit par an, ce qui correspond à une durée de 22 heures par jour (la durée de l'année sidérale est constante). La distance Terre-Lune augmente de 3 cm par an (ce qui ne fait que 30 km en un million d'années !)

Remarque : par suite de sa rotation sur elle-même, la Terre n'a pas une forme sphérique : elle est aplatie aux pôles (cela n'a rien à voir avec les marées). L'aplatissement est très faible (1/300) : le rayon polaire mesure 21 km de moins que le rayon équatorial.

Approfondissement

Calcul du ralentissement de la rotation de la Terre (Intérêt des éclipses anciennes)

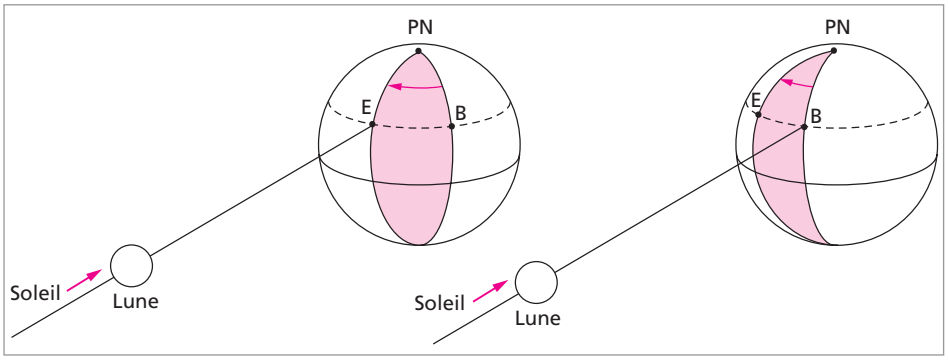
Certaines éclipses de Soleil très anciennes permettent de déterminer le ralentissement séculaire de la Terre, c'est le cas notamment de celle survenue le 15 avril – 135. Lors de la 175^{e} année de l'ère séleucide, les astronomes de Babylone l'ont notée sur des tablettes d'argile conservées aujourd'hui au British Museum à Londres : « l'éclipse débuta 24 *us* après le lever du Soleil et fut totale 18 *us* après son début » (1 *us* est la fraction 1/360 du jour c'est-à-dire 4 min, durée pendant laquelle la Terre pivote de 1°). Cela signifie que le premier contact eut lieu 1 heure et demie environ après le lever du Soleil, l'éclipse totale se produisant 72 min après ce contact. L'intérêt de ces informations précisément notées réside dans les durées déterminées depuis l'instant du lever du Soleil.

En calculant cette éclipse aujourd'hui avec une échelle de temps uniforme, on trouve que la zone de totalité est décalée de près de 50° *vers l'ouest* de Babylone : l'éclipse ne serait alors que très partielle à Babylone, ce qui ne correspond évidemment pas à l'observation notée sur les tablettes d'argile. En remontant ainsi dans le temps, on constate qu'avec la vitesse angulaire de rotation actuelle, la Terre n'a « pas assez » tourné sur elle-même : il faut encore pivoter le globe terrestre de 50° vers l'Ouest pour réaliser l'éclipse totale à Babylone.

En réalité, cette vitesse diminue par suite des frottements internes résultant des marées luni-solaires, et en 2 000 ans, le retard cumulé atteint environ trois heures. L'éclipse ci-dessus, bien décrite quant aux instants, permet de chiffrer le retard quotidien à 45 nanosecondes, c'est-à-dire qu'à cause de ce ralentissement séculaire, chaque jour qui passe dure 45 ns de plus que le précédent.

Calculons ce retard. Sur un intervalle de n jours, chacun de durée $a = 86\,400$ s (ou 24 heures), la durée mesurée avec une rotation uniforme est $D = n \cdot a$. Par suite du ralentissement séculaire, on cumule les termes d'une progression arithmétique de raison $r = 45$ ns et la durée mesurée en n jours devient alors $D' = a + (a + r) + (a + 2r) + \ldots + [a + (n-1).r]$ soit $D' = n.[a + (n-1).r\,/2]$. L'écart $D' - D$ vaut ainsi $\Delta D \approx n^2.r/2$. Cet écart cumulé, proportionnel au **carré du temps** écoulé (n^2), est bien dû à une décélération de la rotation de la Terre.

En 20 siècles, il s'écoule $n \approx 730\,000$ jours ; l'écart ΔD de 3,3 heures (environ 12 000 s) pendant lesquelles la Terre a pivoté de 50° permet de calculer le retard quotidien $r = 45$ ns. On voit là l'intérêt d'étudier les éclipses très anciennes.



9.6. Période de rotation de la Lune

La Lune a subi par le passé une forte diminution de sa vitesse de rotation à cause des marées dues à la Terre. De ce fait, il y a égalité entre sa période de rotation et sa période de révolution sidérale (27 jours 8 heures). Ces durées ne varient plus par suite d'une résonance mécanique entre ces deux phénomènes périodiques. C'est la raison pour laquelle la Lune nous présente toujours la même face. Il en est de même pour *tous* les satellites naturels vis-à-vis de leur planète. La face cachée de la Lune a été observée pour la première fois en 1959, lors du survol par la sonde *Luna 3*. Elle présente des *cratères* météoritiques, semblables à ceux de face visible, mais en nombre plus important.

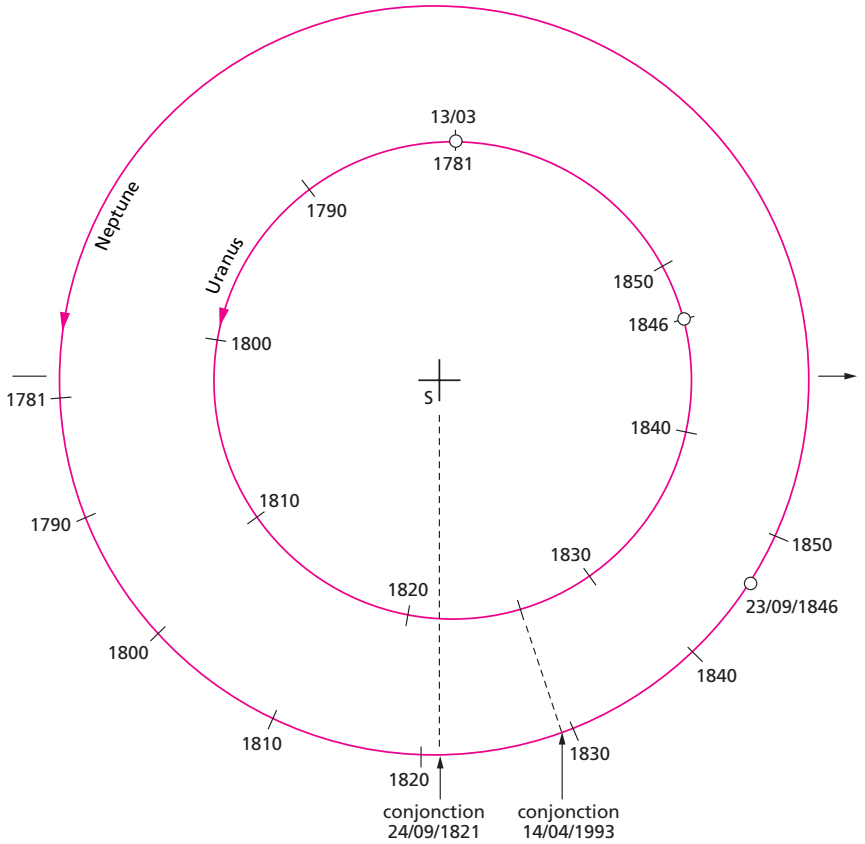
La *lunaison* (29 j 12 h) résulte de la combinaison du mouvement de révolution de la Lune autour de la Terre et du mouvement de la Terre autour du Soleil : $1/29{,}5 = 1/27{,}32 - 1/365{,}2422$. La lunaison est la durée moyenne entre deux phases successives identiques de la Lune.

Un peu d'histoire

Les perturbations planétaires

Newton avait établi en 1687 la loi de la gravitation entre les corps, décrivant la cause des mouvements planétaires qui s'effectuent, en première approximation, selon les lois de Kepler (problème des 2 corps) sur des orbites fermées. Or ces planètes, en

attractions mutuelles, modifient légèrement l'influence prépondérante du Soleil et perturbent le mouvement képlérien.



Découverte en 1781 par HERSCHEL, la planète Uranus ne semblait pas obéir rigoureusement aux lois de Kepler : elle était en avance sur les prévisions jusque vers 1822 puis en retard ensuite. L'astronome français LE VERRIER (1811-1877) soupçonne alors l'existence d'une planète encore inconnue, située au-delà de l'orbite d'Uranus et qui exerce une attraction sur elle suffisante pour perturber son mouvement. La perturbation dépend de la masse de la planète « troublante » et de sa distance à la planète « troublée ». La 3e loi de Kepler permet bien de déterminer la masse d'une planète possédant un satellite, mais ce n'est pas le cas d'Uranus (à cette époque). En 1846, Le Verrier résout ce problème très difficile : trouver la position et la masse de cette planète inconnue. Ce fut la découverte de Neptune « *au bout de sa plume* » dira Arago, à moins de 1° de la position annoncée, un triomphe de la mécanique céleste.

À la même époque, l'Anglais ADAMS avait fait le même calcul que Le Verrier, de façon indépendante, mais il ne publia pas ses résultats...

10. Lunettes et télescopes

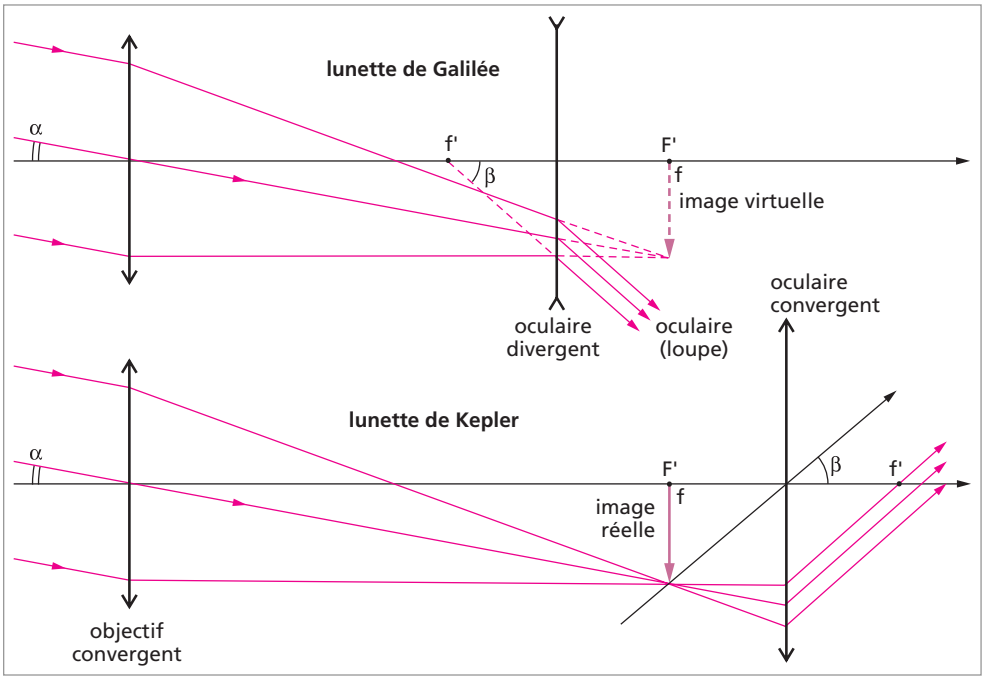
10.1. Évolution historique

Jusqu'au début du 17e siècle, on a observé le ciel à l'œil nu. Le Danois Tycho Brahé a pu obtenir une excellente précision sur les positions des astres (à 1' près), à la limite du pouvoir séparateur de l'œil (1 à 1,5').

En 1609, Galilée améliore une modeste lunette terrestre, curiosité nouvelle venue de Hollande. La technique vient de permettre un développement considérable de l'astronomie : la science en sera bouleversée. Galilée découvre alors le relief de la Lune, les étoiles la Voie lactée, et surtout, en janvier 1610, les **satellites de Jupiter**, prouvant ainsi qu'il n'y a pas qu'un seul centre des mouvements (la Terre) dans l'Univers. Cette découverte apporte un fort crédit aux hypothèses coperniciennes. Toutefois, ses détracteurs disaient que c'est la lunette qui est la cause de l'existence de ces satellites puisqu'on ne les voit pas à l'œil nu !

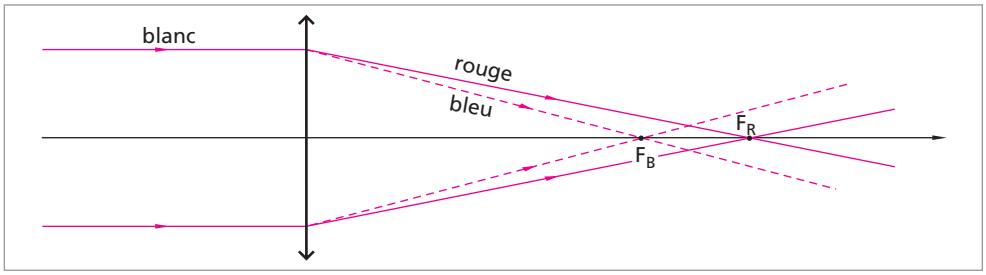
Peu après, Galilée découvre les phases de la planète Vénus et ce qu'il observe est en contradiction avec le modèle géocentrique grec : il est convaincu que Copernic a raison...

La lunette de Galilée comporte un objectif convergent et un oculaire divergent. L'image finale est droite (non inversée), mais l'image intermédiaire est *virtuelle*.

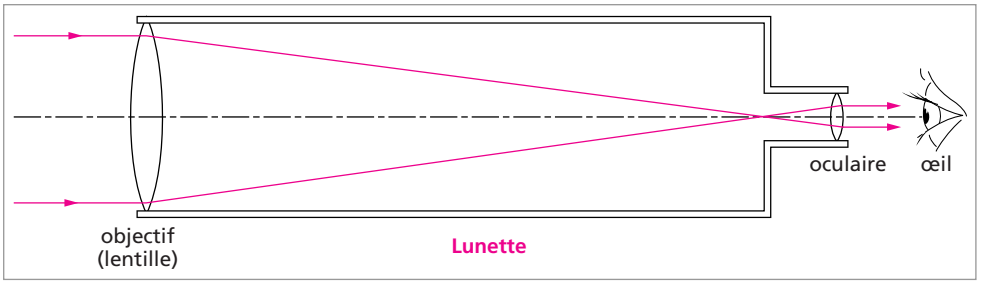


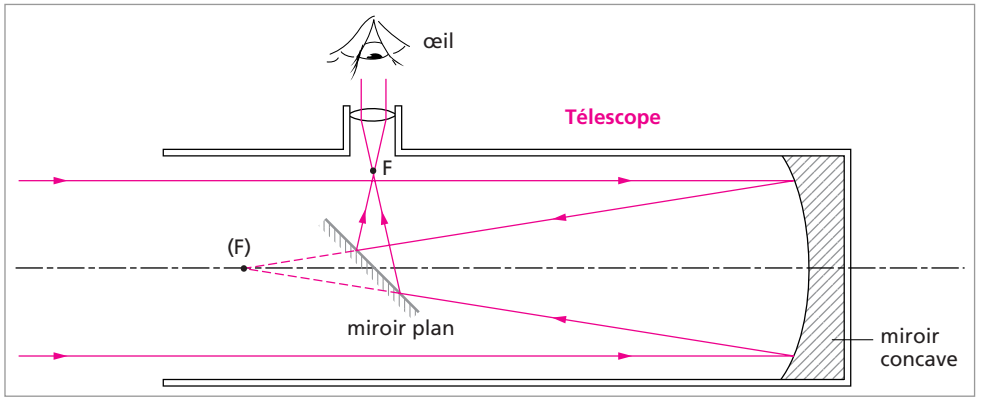
Dès 1611, Kepler modifie (et améliore) cette lunette en utilisant un oculaire convergent. L'image finale est inversée (ce n'est pas gênant quand on regarde le ciel, sans bas ni haut) mais l'image intermédiaire est *réelle*. Cela sera mis à profit en 1659 par Huygens pour placer un *micromètre* dans le plan focal de l'objectif ; ce dispositif de mesure sera amélioré par Auzout et Picard en 1666 (micromètre à fils).

Cependant, le verre des lentilles est un matériau *dispersif* et les images présentent le défaut d'être irisées : c'est le phénomène d'**aberrations chromatiques**. Les rayons bleus convergent plus que les rayons rouges, créant une zone focale le long de l'axe optique (les foyers F_B et F_R ne sont pas confondus).



Au cours de ses recherches sur les couleurs, vers 1670, Newton pense qu'il est impossible de réduire les aberrations chromatiques d'une lentille. La réflexion sur un miroir ne présentant pas ce défaut, Newton fabrique un miroir parabolique donnant une image réelle tout comme une lentille. Il vient d'inventer le **télescope à miroir** (1668).





instrument	*phénomène mis en jeu*	*objectif*	*oculaire*
lunette	réfraction	lentille convergente	lentille convergente
télescope	réflexion	miroir parabolique	lentille convergente

En 1747, EULER montre qu'on peut réduire les aberrations chromatiques d'une lentille convergente en lui accolant une lentille divergente d'indice différent. Quand on saura fabriquer le verre *flint* (à base de plomb), ce problème sera résolu (1759) ; le verre *crown* (ordinaire) et le verre flint (cristal) ont des indices respectivement égaux à 1,5 et 1,6.
Les plus grandes lunettes mesurent jusqu'à 20 m de long pour un diamètre de 1 m. Mais la difficulté d'obtenir des grandes lentilles de verre sans bulles va peu à peu faire cesser la construction de ces grands instruments. Au contraire, les télescopes à miroir voient leur taille augmenter : aujourd'hui, les plus grands miroirs mesurent 8 m de diamètre en un seul morceau, et des télescopes à mosaïque atteignent 10 m de diamètre. Ces gigantesques « entonnoirs » de lumière recueillent donc 4 millions de fois plus de photons que la pupille de l'œil nu (5 mm de diamètre).

10.2. Clarté d'un instrument (lunette ou télescope)

Soit G le grossissement de l'instrument, rapport des longueurs focales F' et f' de l'objectif et de l'oculaire. Si l'astre a un diamètre apparent sensible (planète), la clarté est proportionnelle à $1/G^2$. Au contraire, dans le cas des étoiles, la clarté est proportionnelle à G^2. Cela augmente fortement le *contraste* des étoiles sur le fond noir du ciel et explique pourquoi on peut observer à la lunette des étoiles invisibles à l'œil nu.

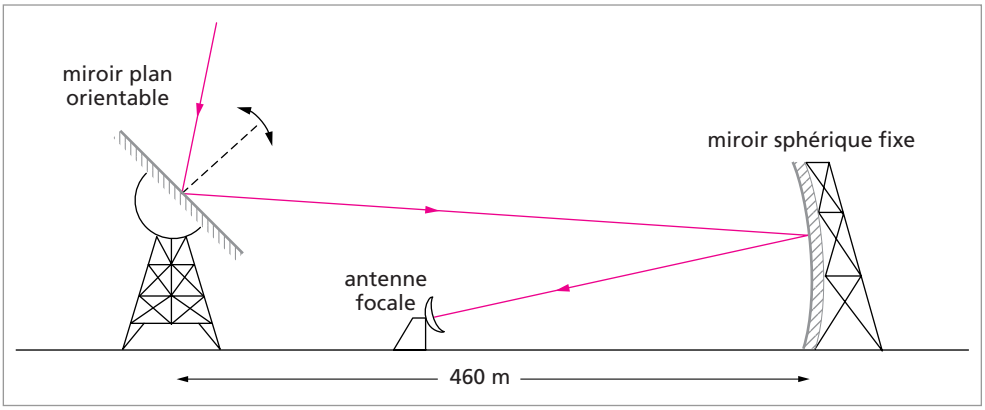
10.3. Pouvoir séparateur

La diffraction limite le stigmatisme des instruments : l'image d'un point n'est pas un point mais une petite tache (appelée tache d'AIRY) dont le diamètre angulaire vaut $\beta = 1{,}2.\lambda/D$ où D est le diamètre de l'ouverture circulaire de l'objectif.
Ainsi, en lumière visible, $\lambda \approx 0{,}6$ µm, avec une lunette de 7 cm d'ouverture, β vaut 10^{-5} rad soit environ $2''$. On ne peut donc pas séparer deux étoiles voisines situées angulairement à moins de $2''$ l'une de l'autre : on les voit confondues en un seul point.
Dans la queue de la Grande Ourse, les étoiles *Alcor* et *Mizar* sont séparées de 12', formant un couple optique aisément visible à l'œil nu (ces étoiles ne sont proches qu'en raison de la perspective, leurs distances respectives étant 81 et 78 al). Avec sa modeste lunette, Galilée a observé le premier en 1611 que l'étoile *Mizar* est une véritable étoile double, les composantes étant séparées de $14''$.
En fait, la résolution théorique des instruments est limitée par l'agitation atmosphérique. C'est pour cela qu'on installe les observatoires au sommet des montagnes ou dans l'espace.

10.4. Radiotélescopes

Le rayonnement radio de la Galaxie a été découvert fortuitement en 1932 par l'Américain JANSKY, créant ainsi la radioastronomie. L'atmosphère terrestre est transparente aux ondes de longueur comprises entre 1 cm et 50 m (fenêtre radio) correspondant à des fréquences de 6 à 30 000 MHz, soit une étendue de plus de 12 octaves (car $2^{12} = 4\,096$) alors que la fenêtre optique n'en couvre qu'une seule (de 0,4 à 0,8 µm). Avec une petite fenêtre dans

le proche IR, ce sont les seuls domaines du spectre des ondes électromagnétiques pour lesquels l'atmosphère est transparente ; elle est opaque pour d'autres fréquences. C'est la raison pour laquelle on utilise des télescopes satellisés hors de l'atmosphère terrestre.
Un radiotélescope est constitué d'une ou de plusieurs antennes, associées à des miroirs, et d'un récepteur. Le plus grand miroir parabolique orientable mesure 100 m de diamètre (Bonn). Le radiotélescope de Nançay (en Sologne) comporte 2 miroirs : un plan, mobile autour d'un axe horizontal oriente les ondes radio vers le 2e miroir fixe, sphérique de 300 m de long. Ces miroirs sont constitués de grillages métalliques dont la maille est de l'ordre de 5 cm.



En associant deux ou plusieurs radiotélescopes, on crée un *radio-interféromètre*, semblable aux dispositifs optiques.

11. Analyse spectrale

11.1. Découvertes de Newton (1670)

En observant le spectre de la décomposition de la lumière par un prisme, Newton réalise deux expériences fondamentales :
- une lumière monochromatique n'est pas décomposable par un prisme ;
- en superposant toutes ces lumières monochromatiques, on peut recréer de la lumière blanche (c'est la découverte de la recomposition de la lumière).

Cherchant à interpréter la nature de la lumière, il la suppose analogue aux sons : pour lui, les couleurs sont équivalentes aux 7 notes de la gamme occidentale (do, ré, mi, fa, sol, la, si), c'est la raison pour laquelle il place une 7e couleur, l'indigo, entre le violet et le bleu du spectre. En fait, il n'y a pas 7 couleurs dans l'arc-en-ciel mais une infinité. Cette erreur est tenace : tout au plus peut-on distinguer 6 (six) teintes différentes (violet, bleu, vert, jaune, orange, rouge).

11.2. Principes de l'analyse spectrale (1859)

En 1802, l'Anglais WOLLASTON découvre quelques raies noires dans le spectre du Soleil, mais ne sait pas les interpréter. En 1814, le Bavarois FRAUNHOFER en observe plus de 500, qu'il nomme selon l'alphabet A, B, C, D, ..., a, b, ... Il constate, sans l'expliquer, que la raie D est la même que celle du sodium.
En 1843, l'Américain DRAPPER obtient la première photographie d'un spectre.
En 1859, les Allemands KIRCHHOFF et BUNSEN formulent les lois de l'analyse spectrale :
- chaque corps chimique émet un spectre caractéristique ;
- tout corps peut absorber les raies qu'il est capable d'émettre.

On observe généralement 3 types de spectres, selon la nature de la source de lumière :
- quand la source est une lampe à incandescence, le spectre est **continu**, sans raies : on passe graduellement d'une couleur à l'autre ;
- quand la source est un gaz excité (lampe à vapeur de mercure), le spectre est formé uniquement de raies fines : c'est un **spectre d'émission** ;
- quand cette source est entourée d'un gaz moins chaud, on observe un spectre continu coupé par des raies sombres : certaines couleurs sont absentes, absorbées ; c'est un **spectre d'absorption**.

L'intérêt de l'analyse spectrale est considérable : en observant le spectre de la lumière d'un astre, on peut déterminer la nature chimique des atomes (ou des ions) qui émettent cette lumière.
Le spectre du Soleil comporte plusieurs milliers de raies caractéristiques de plus de 70 éléments chimiques différents, souvent plusieurs fois ionisés (compte tenu de la température, une étoile est constituée de gaz ionisés, appelé **plasma**). L'atmosphère solaire est ainsi constituée de 90 % d'hydrogène, de 10 % d'hélium et de traces de nombreux éléments (dont carbone et oxygène pour 0,05 %). L'élément hélium a été détecté dans le spectre solaire en 1868 avant qu'on ne le découvre dans l'atmosphère terrestre en 1895.
Dans le domaine radio, on a pu déceler de nombreuses nébulosités obscures constituées de grands nuages de gaz neutre (non ionisé) à basse température, renfermant des molécules et radicaux (CH, HCN, OH, NH_3,...). La densité volumique du **milieu interstellaire** est de l'ordre de 10^{-21} kg/m^3 correspondant à un « vide » refermant seulement 1 million d'atomes par m^3 (un m^3 d'air ambiant contient $\approx 10^{24}$ molécules).

11.3. Effet Doppler-Fizeau (1848)

Si la source est en mouvement par rapport à l'observateur, on observe que les raies du spectre sont décalées par rapport à leur position quand la source est au repos. Le décalage relatif des raies $(\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$ ne dépend que de la vitesse radiale V_r de la source (vitesse réelle projetée sur la direction d'observation). C'est l'effet Doppler-Fizeau (découvert par l'Autrichien DOPPLER en 1842 et généralisé par le Français FIZEAU en 1848) : $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{V_r}{c}$
où λ_0 est la longueur d'onde mesurée au repos.

– Si la source s'éloigne, $V_r > 0$ et la raie est décalée vers le rouge ($\lambda' > \lambda_0$) ;
– si la source s'approche, $V_r < 0$ et la raie est décalée vers le bleu ($\lambda' < \lambda_0$).
Une vitesse radiale de l'ordre de 30 km/s (vitesse de la Terre autour du Soleil) crée un décalage détectable de l'ordre de 0,5 Å en lumière jaune.

12. Nucléosynthèse stellaire et vie des étoiles

12.1. Les réactions nucléaires

Une étoile naît, vit et meurt. De grandes masses de poussières et de gaz interstellaire se contractent par gravitation, créant des **proto-étoiles** (la pression interne ne fait plus équilibre à la gravitation) ce qui échauffe le gaz. Quand la température atteint quelques *millions* de kelvins, les réactions thermonucléaires se déclenchent, libérant de grandes quantités d'énergie qui permettent à l'étoile de briller.
Le bilan est $4\,H \rightarrow He + \gamma$ où 4 noyaux d'hydrogène *fusionnent* pour former un noyau d'hélium. Chaque seconde, le Soleil transforme ainsi $644 \cdot 10^6$ t d'H en $640 \cdot 10^6$ t d'He et $4 \cdot 10^6$ t d'énergie. Plusieurs processus permettent de transformer H en He, tout dépend de la température interne de l'étoile : le cycle proton-proton entre 1 et $10 \cdot 10^6$ K, le cycle CNO entre 10 et $100 \cdot 10^6$K.

– **Cycle proton-proton** (E. Schatzman) par l'intermédiaire du deutérium D et de l'hélium3 :

$$\begin{aligned} H + H &\rightarrow {}^2D + e^+ + \nu \\ {}^2D + H &\rightarrow {}^3He + \gamma \\ {}^3He + {}^3He &\rightarrow {}^4He + 2H + \gamma \end{aligned}$$

– **Cycle CNO** du carbone (H. Bethe, 1938) dans les étoiles chaudes et massives (le carbone sert de catalyseur) :

$$\begin{aligned} {}^{12}C + H &\rightarrow {}^{13}N + \gamma \\ {}^{13}N &\rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu \\ {}^{13}C + H &\rightarrow {}^{14}N + \gamma \\ {}^{14}N + H &\rightarrow {}^{15}O + \gamma \\ {}^{15}O &\rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu \\ {}^{15}N + H &\rightarrow {}^{12}C + {}^4He \end{aligned}$$

Remarques : il existe de nombreuses variantes à ces cycles de fusion ; certaines réactions sont plus lentes que d'autres.

À son tour, l'hélium fusionne pour former d'autres éléments qui sont ainsi synthétisés à partir des protons par fusion thermonucléaire au sein des étoiles : c'est la **nucléosynthèse stellaire**. L'élément fer (Fe = 56) étant celui pour lequel l'énergie de liaison par nucléon est maximale, les éléments plus lourds que le fer ne peuvent provenir de ce processus : ils sont synthétisés par capture de neutrons.

12.2. Évolution d'une étoile

Par suite de l'élévation de température, l'étoile se dilate et grossit mais la température des couches externes diminue : l'étoile devient une **géante rouge** (d'après la loi de WIEN $\lambda_m.T$ = cste). Ce sera le cas du Soleil dans 5 milliards d'années. En ensuite ? Tout dépend de la masse de l'étoile :

- si elle est très massive, elle explose (**nova** ou **supernova**), la matière se répand dans l'Univers et se dissémine peu à peu. Le centre de l'étoile s'effondre sur lui-même par gravitation et devient une **étoile à neutrons** de quelques km de diamètre seulement (densité $\sim 10^{17}$ kg/m^3). Elle tourne très vite sur elle-même (conservation du moment cinétique) en émettant un rayonnement à la manière d'un phare de mer, c'est un **pulsar**. Certains pulsars font plus de 1 000 tours par seconde ;
- si sa masse est faible (cas du Soleil), elle s'effondre par épuisement du matériau nucléaire et devient très petite et très dense ($\sim 10^9$ kg/m^3). C'est une **naine blanche** qui, se refroidissant lentement, deviendra **naine brune** invisible.

12.3. Abondance des éléments dans l'Univers

L'élément H est le plus abondant dans l'Univers (c'est le plus simple) : 75 %, puis vient l'hélium (23 %). Tous les autres éléments réunis ne représentent que 2 % (dont O, N et Ne : 1 %). Dans les étoiles, H est toujours le plus abondant mais la répartition des « petits » est souvent très différente. Il en est de même pour les planètes.

12.4. Quelques lois du rayonnement

Loi de STEFAN (1879) : la puissance rayonnée par 1 m^2 de surface de la source (dans toutes les directions et toutes les longueurs d'onde) est proportionnelle à la puissance 4^e de sa température absolue :

$$P = \sigma.T^4 \text{ avec } \sigma = 5{,}67.10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4\text{)}, \quad \text{constante de Stefan}$$

Loi de WIEN (1893) : la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum d'intensité du rayonnement d'un corps noir est inversement proportionnelle à sa température absolue :

$$\lambda_m \cdot T = \text{cste} = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Dans le cas du Soleil, $\lambda_m \approx 0{,}5$ µm (jaune vert) d'où la température des couches externes T $\approx$ 6 000 K. À cette température, la puissance surfacique rayonnée vaut donc $73 \cdot 10^6$ W/m^2. Avec un diamètre de $1{,}4 \cdot 10^6$ km, on atteint la puissance totale rayonnée par le Soleil de $4 \cdot 10^{26}$ W.

En réalité, une étoile n'est pas un « bon » corps noir ; ces relations permettent seulement d'estimer l'ordre de grandeur de la température des couches externes.

ÉNONCÉS

Échelles dans l'Univers

Exercice 1 Distances en astronomie

a. La durée de parcours de la lumière dans le vide permet de déterminer le mètre, étalon de longueur, par la donnée de sa célérité : 299 792 458 m/s. Quelle est la distance franchie pendant une nanoseconde ? Calculer la longueur de l'*année de lumière* (al) en km.

b. La *parallaxe* d'une étoile est l'angle sous lequel, de cette étoile, on verrait le rayon de l'orbite terrestre de longueur 1 ua $= 150 \cdot 10^6$ km. On définit une unité, le *parsec* (pc), distance pour laquelle la parallaxe vaut 1 seconde d'angle. Calculer cette distance en km. Donner la relation entre la distance d (en pc) et la parallaxe p (en $''$) puis entre 1 al et 1 pc.

c. La première parallaxe stellaire a été déterminée en 1838 par F. BESSEL : $0,31''$ pour une des étoiles les plus proches (une faible étoile de la constellation du Cygne). Combien de temps met la lumière à nous parvenir de cette étoile ? Et du Soleil ?

d. Montrer que la *milliseconde d'angle* (mas) correspond à l'angle sous lequel on pourrait voir une balle de ping-pong à New York depuis Paris ou un homme allongé sur la Lune.

Exercice 2 Diamètres apparents

En supposant des orbites circulaires, coplanaires et concentriques autour du Soleil (ou autour de la Terre dans la cas de la Lune), calculer les *diamètres angulaires* extrêmes sous lesquels on voit les planètes depuis la Terre. On donne les valeurs suivantes, où d est le rayon de l'orbite en unité astronomique (1 ua $= 150 \cdot 10^6$ km), R est le rayon de l'astre en rayon terrestre (1 $R_T = 6\,378$ km) :

	Mercure	*Vénus*	*Terre*	*Mars*	*Jupiter*
d (ua)	0,39	0,72	1	1,52	5,2
R (R_T)	0,40	0,95	1	0,53	11,2

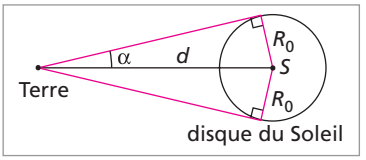
	Saturne	*Uranus*	*Neptune*	*Pluton*	*Soleil*	*Lune*
d (ua)	9,5	19	30	39		0,00253
R (R_T)	9,4	4	3,8	0,2	109	0,27

Calculer le *diamètre apparent* du Soleil et celui de la Lune (angle sous lequel on les voit depuis la Terre) connaissant : la distance Terre-Soleil (1 ua), le diamètre linéaire du Soleil (1 400 000 km), la distance Terre-Lune (380 000 km), le diamètre équatorial de la Terre (12 756 km) et le rapport des rayons de la Lune et de la Terre (0,273).

Exercice 3 Diamètre du Soleil

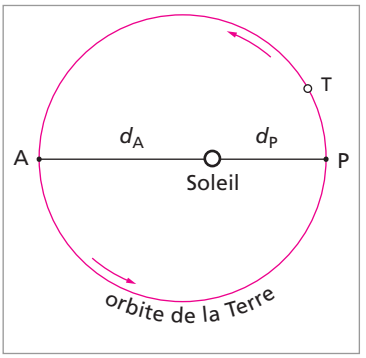
La Terre décrit une orbite elliptique quasi-circulaire autour du Soleil. On constate que le diamètre apparent du Soleil varie de $2R_P = 1\,951,8''$ début janvier, lors du passage de la

Terre au périhélie (point le plus proche du Soleil) à $2R_A = 1\,887{,}8''$ début juillet, lors du passage à l'aphélie (le plus loin du Soleil). Le diamètre linéaire du Soleil ($2R_0$) est *voisin* de $1{,}4 \cdot 10^6$ km et la distance moyenne de la Terre au Soleil vaut $d_1 = 1$ ua $= 150 \cdot 10^6$ km.



a. Soit R_1 le rayon apparent du Soleil quand la Terre est à la distance d_1 (du Soleil). Donner une *estimation* de R_1.

b. Quand la distance ST vaut d, calculer, en fonction de R_1 et de d_1, l'angle α sous lequel on voit le demi-diamètre du Soleil. On donnera d'abord l'expression exacte, puis une expression approchée, compte tenu des valeurs numériques.



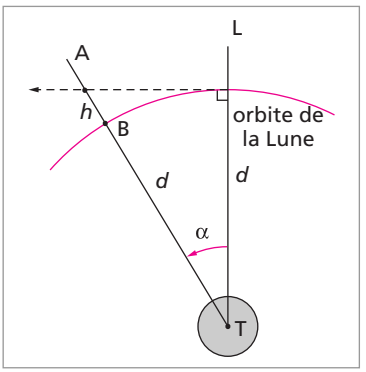
c. L'excentricité orbitale étant e, les distances du périhélie (d_P) et de l'aphélie (d_A) au Soleil se calculent en fonction de e et de d_1 par les relations $d_P = d_1 \cdot (1 - e)$ et $d_A = d_1 \cdot (1 + e)$. En déduire les expressions de R_A et de R_P en fonction de R_1 et de e et montrer que R_1 se calcule par la moyenne harmonique de R_A et de R_P. En déduire les valeurs numériques de R_1 et de e.

d. L'énergie solaire arrivant sur Terre étant proportionnelle à l'inverse du carré de la distance au Soleil, montrer que la Terre reçoit en janvier près de 7 % d'énergie de plus qu'en juillet. Que peut-on en conclure ?

Gravitation

Exercice 4 Newton, la pomme et la Lune

Pour vérifier la loi de gravitation en $1/r^2$, où r est la distance entre les masses mises en jeu, NEWTON a fait le raisonnement suivant dès 1666 (publié dans les *Principia*, 1687, Livre III, proposition IV) : « pendant la première seconde de chute, une pomme tombe d'une hauteur H, alors que la Lune, située à 60 rayons terrestres du centre de la Terre, « tombe » de la distance h = AB ».



Une révolution lunaire s'effectue en 27 j 8 h (période sidérale). Une lunaison dure en moyenne 29 j 13 h (période synodique). Newton ne disposera d'une « bonne » valeur du rayon terrestre R_T que vers 1682 (mesures de Jean PICARD en 1670). En prenant ici la valeur $R_T = 6\,400$ km, calculer numériquement H et h puis le rapport H/h. Conclure.

Exercice 5 Calcul de g sur la Lune

1. La constante de gravitation universelle vaut $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (SI). Exprimer l'unité de G en fonction des unités SI (m, kg, s).

2. Sur une planète de masse M et de rayon R, calculer l'accélération g de la pesanteur au sol (la gravité).
AN. Pour la Terre, $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg et $R \approx 6400$ km. Pour la Lune, sa masse est 81 fois plus faible que celle de la Terre et leurs rayons sont dans un rapport 1 à 3,7. Calculer g sur Terre puis sur la Lune.

Exercice 6 Rotation de la Terre

1. La Terre tourne uniformément autour de son axe en 1 jour sidéral de 86164 s. Pourquoi cette durée est-elle un peu plus petite que 24 h ? Calculer la vitesse angulaire de rotation.

2. Calculer en fonction de la latitude φ la vitesse et l'accélération d'un point de la surface de la Terre, de rayon $R_T = 6\,378$ km.
A.N. Pour Paris : $\varphi = 48{,}8°$. Comparer avec l'accélération de la pesanteur.

Exercice 7 Analyse dimensionnelle : 3e loi de Kepler

Sous l'action de la force d'attraction gravitationnelle exercée par une masse M, un objet de masse $m \ll M$ décrit une trajectoire circulaire de rayon r centrée sur M.
Montrer que l'analyse dimensionnelle permet de prévoir que le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon orbital.
A.N. Si $r = r_0$, la période vaut 1 heure. Calculer la période si $r = 4r_0$.

Exercice 8 Masse du Soleil

La Terre étant située à 1 unité astronomique (150 millions de km) du Soleil, en déduire la masse de « notre » étoile. Son diamètre vaut 1 400 000 km, calculer sa densité moyenne.

Exercice 9 La Galaxie

1. L'année de lumière (al) est la distance parcourue par la lumière en un an. Calculer cette longueur.

2. Le Soleil se situe à 30 000 al du centre de la Galaxie. Des mesures ont montré qu'il effectue un tour de cet ensemble d'étoiles en 250 millions d'années. Évaluer le nombre d'étoiles que contient notre Galaxie (on prendra la masse de l'étoile « moyenne » Soleil comme masse stellaire unitaire dans la Galaxie). La masse du Soleil vaut $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Calculer la vitesse de déplacement du Soleil.

Exercice 10 Point de Lagrange

On suppose que la Terre T décrit une orbite circulaire de rayon a autour du barycentre O du système Soleil-Terre. Un autre corps P, de masse m, tourne également autour de O, de façon que les points O, P, T restent alignés, dans cet ordre (P et T ont donc la même période orbitale). Si P et T sont distants de x, la distance OP vaut $a - x$. La constante de gravitation est $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI.

1. Avec les valeurs numériques suivantes $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_T = 6.10^{24}\ kg$, $m = 100\ kg$ et $a = 150 \cdot 10^6$ km, montrer qu'il est légitime de confondre les points O et S (centre du Soleil).

2. En remarquant que, dans le mouvement circulaire de P à la vitesse v, la force centripète agissant sur P équilibre les forces gravitationnelles dues à S et T, écrire l'équation régissant le mouvement de P en fonction de v, a, x, M_S et M_T.

3. Retrouver la 3e loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme. En déduire la vitesse orbitale v de P.

4. Compte tenu des valeurs relatives des masses, montrer que le rapport x/a est voisin de 0,01. En déduire la distance $x = PT$ (en km).

5. Calculer la distance $y = QT$ du point Q où les forces gravitationnelles du Soleil et de la Terre ont la même valeur. Comparer x et y.

6. En 1772, Joseph LAGRANGE (1736-1813) a montré qu'un objet placé en ce point P (lequel est appelé 1er point de Lagrange ou L_1) à vitesse relative nulle reste en équilibre (instable), aligné avec S et T dans le mouvement annuel de la Terre. C'est le cas du satellite d'observation solaire SOHO lancé en décembre 1995 qui pointe en permanence son télescope vers le Soleil. Quel peut être l'intérêt de placer un tel satellite à cet endroit, plutôt qu'en orbite autour de la Terre (ce qui serait beaucoup moins onéreux) ?

Exercice 11 Système d'étoiles doubles

1. On considère deux corps A et B de masse M et m, distants de a, en rotation autour de leur barycentre O sous l'action de la gravitation. On supposera les mouvements circulaires uniformes.

a. Exprimer les distances r_1 et r_2 de m et M à O en fonction de a, m et M.

b. Calculer les vitesses orbitales V_1 et V_2 (par rapport à O) en fonction de a, m, M et G (constante de gravitation).

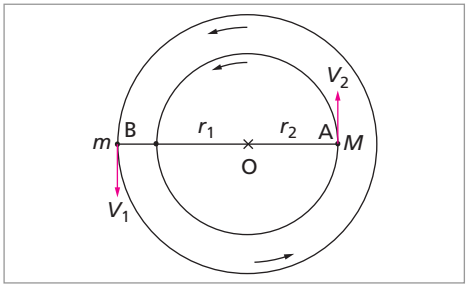
c. En déduire l'expression de la 3e loi de Kepler : $T^2/a^3 = 4\pi^2/[G \cdot (M + m)]$.

2. Le Système solaire n'est pas un système double, il est « multiple ».

a. Définir succinctement les mots étoile, planète, satellite, Lune, lune.

b. Pour quelle(s) raison(s) peut-on étudier le mouvement de chacune des planètes sous la seule action gravitationnelle du Soleil en négligeant au 1er ordre celles des autres planètes ?

3. L'étoile la plus brillante du ciel, *Sirius*, est en réalité une étoile double, située à 8,6 al de la Terre. L'étoile principale A, très brillante (celle que l'on voit facilement), est couplée à un compagnon invisible à l'œil nu, *Sirius B*. L'écart angulaire entre les deux étoiles est 7,5″. Une longue étude astrométrique a montré que leur période orbitale vaut 50 ans et que le rapport des distances au centre de masse est $r_1/r_2 = 2{,}44$. Calculer la masse de chacune des 2 étoiles. On donne la masse du Soleil $M_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg et $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI.



Exercice 12 Satellite artificiel

Le satellite d'astrométrie *Hipparcos* (acronyme de « HIgh Precision PARallax COllecting Satellite »), lancé en 1989 pour mesurer avec une très grande précision les positions des étoiles en utilisant une technique de parallaxe, est transféré en utilisant une orbite de transfert elliptique d'une orbite basse à 560 km d'altitude (périgée) vers l'orbite géostationnaire (apogée).

1. Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire (la masse de la Terre est $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg et le rayon terrestre vaut $R_T = 6\,380$ km) et la vitesse d'un satellite sur cette orbite.

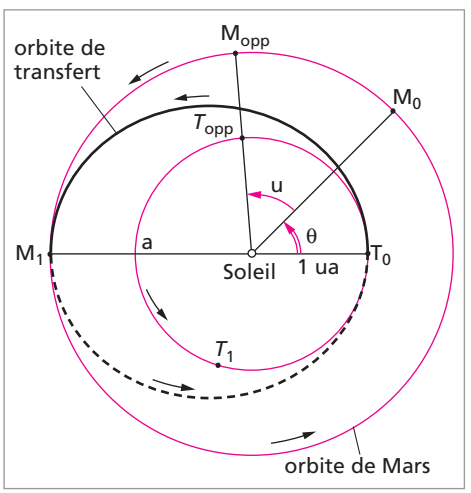
2. En réalité, le moteur d'apogée n'a pas fonctionné correctement lors de la stabilisation sur l'orbite géostationnaire ; l'orbite réelle fut donc très elliptique, de périgée situé à 560 km d'altitude. Calculer la période orbitale du satellite *Hipparcos*. Quelle est sa période synodique (celle mesurée par un habitant de la Terre) ?

Exercice 13 Vol vers Mars

On lance une sonde vers la planète Mars en utilisant une orbite de transfert elliptique, tangente aux deux orbites planétaires, que l'on supposera circulaires et coplanaires. Mars décrit une révolution en 1,88 an autour du Soleil.

1. Quelle est la durée T du transfert T_0M_1 ?

2. Combien de jours avant l'opposition avec le Soleil faut-il lancer cette sonde ? (on calculera numériquement les angles θ et u).



Exercice 14 Atmosphères planétaires

On admettra que la vitesse moyenne d'agitation des molécules de masse molaire M dans une atmosphère à la température absolue T vaut v_q donnée par $v_q^2 = 3RT/M$ où R est la constante des gaz parfaits (R = 8,31 J/K.mole).

1. Calculer cette vitesse moyenne pour les gaz suivants à 40 °C puis à 130 °C : dihydrogène (H_2), hélium (He), diazote (N_2), dioxygène (O_2), dioxyde de carbone (CO_2). On donne les masses atomiques des éléments : H = 1, He = 4, C = 12, N = 14, O = 16.

2. Calculer la vitesse d'évasion v_e de la Terre, puis celle v'_e de la Lune. Quelles conclusions peut-on en tirer sur la possibilité de vivre sur la Lune (la température varie entre −170 °C et +130 °C) ? On donne : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $M_L = M_T/81$; $R_T = 6\,400$ km ; $R_L = 0{,}27R_T$.

Lunettes et télescopes

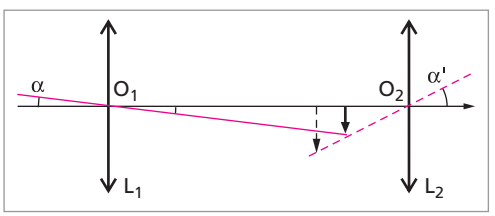
Exercice 15 Lune et lunette

1. La Lune a un diamètre linéaire de $2R_L = 3500$ km et se situe à $D = 380\,000$ km de la Terre. Quel est son diamètre angulaire quand on l'observe à l'œil nu ? À quelle distance de l'œil doit-on placer une pièce de 2 centimes d'euro (diamètre 19 mm) pour la masquer sous le même diamètre apparent ?

2. On l'observe avec une lunette astronomique afocale. L'objectif et l'oculaire ont pour distances focales respectives 1 m et 20 mm. Calculer le grossissement de l'instrument et le diamètre angulaire de l'image de la Lune vue dans la lunette.

Exercice 16 Lunette astronomique

Une lunette astronomique est constituée d'un objectif L_1 ($f'_1 = 50$ cm) et d'un oculaire convergent L_2 ($f'_2 = 2$ cm) placés à la distance $e = \overline{O_1O_2}$. L'oculaire est utilisé en loupe pour observer l'image donnée par l'objectif.

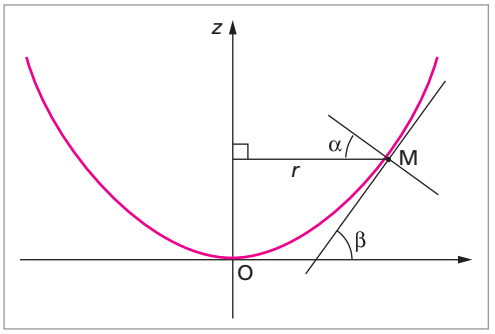


Calculer le grandissement angulaire $G = \alpha'/\alpha$ (rapport des angles sous lesquels on voit l'image et l'objet à l'œil nu) puis la position de l'image finale.
A.N. $e = 51{,}6$ cm puis $e = 52$ cm (système afocal).

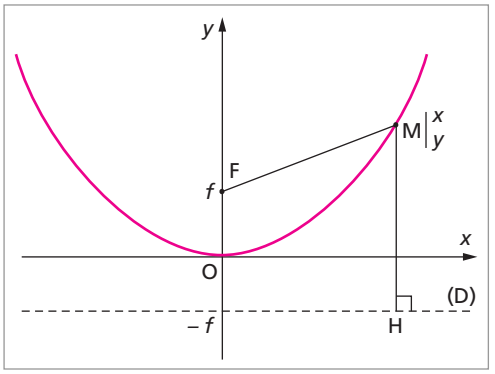
Exercice 17 Miroir parabolique

Pour fabriquer les grands miroirs des télescopes actuels, de diamètres supérieurs à 6 m, on fait fondre (à 1 100 °C) des petits blocs de verre formant un cylindre peu épais

(≈ 20 cm) mais de grand diamètre, puis on fait tourner le four (donc cette pâte fluide) à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe du cylindre (≈ 1 tour en 10 s). Tout en tournant, on laisse refroidir l'ensemble très lentement, pendant un mois environ.



1. En traduisant l'équilibre hydrostatique d'un point M de la surface en rotation, situé à la distance r de l'axe vertical Oz, montrer que l'équation de cette surface est $z(r) = [\omega^2/(2g)] \cdot r^2$. On rappelle que la pente de la tangente à une courbe $y(x)$ est : $dy/dx = \tan v$, où v est l'angle de la tangente avec l'axe Ox.



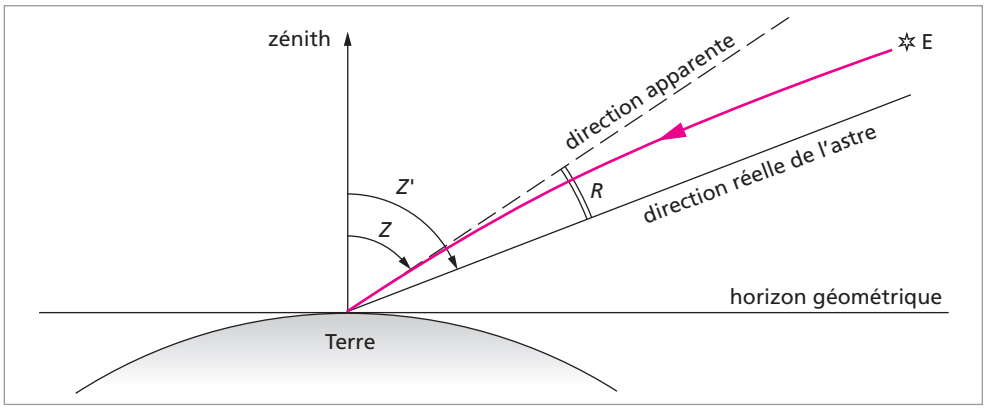
2. D'après la définition géométrique, une parabole est l'ensemble des points M(x, y) du plan Oxy, équidistants d'un point fixe F$(0, f)$ du plan, et de la droite D (appelée directrice de la parabole) d'équation $y = -f$. En utilisant cette définition, calculer la distance focale f d'une parabole d'équation générale $y(x) = ax^2$, où a est une constante positive.

3. Le diamètre d'ouverture du miroir est $2R$. Calculer la profondeur Z de la cavité de verre ainsi réalisée lors de la rotation de la pâte fluide, par rapport à un bloc cylindrique (froid) de même diamètre, en fonction de ω puis de la distance focale f du miroir parabolique obtenu après refroidissement.
A.N. $2R = 8{,}20$ m et ω = 7,3 tours/min. Calculer f et Z.

4. Quels sont les avantages d'une telle technique de fabrication ? Citer un observatoire équipé de tels télescopes.

Exercice 18 Réfraction atmosphérique

La réfraction atmosphérique modifie la direction réelle des astres par rapport à la direction verticale du lieu d'observation (le zénith) : elle les « remonte » sur l'horizon. Pour étudier cet effet, on adopte un modèle où la Terre est plate et recouverte d'une atmosphère d'épaisseur et de densité uniformes. L'indice de réfraction de l'air sera supposé constant, égal à 1,0003.
On mesure la distance zénithale z d'une étoile (angle entre la direction de l'étoile et celle du zénith). Soit z' la distance zénithale vraie qui serait mesurée en l'absence d'atmosphère. L'écart $R = z' - z$ est la réfraction atmosphérique.

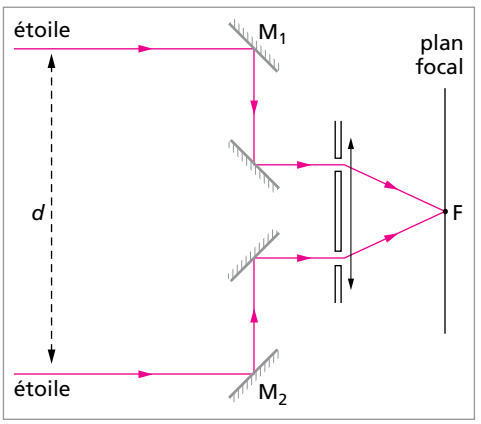


Montrer que si R est exprimée en minute de degré, on a numériquement et approximativement $R(') \approx \tan(z)$.

Exercice 19 Pouvoir séparateur

En considérant que seule la diffraction intervient, quelle est la taille du plus petit cratère lunaire observable avec d'un télescope de 5 m de diamètre d'ouverture ? Et à l'œil nu, avec une pupille de 5 mm ? On prendra $\lambda = 0,60$ µm. La Lune est à 380 000 km de la Terre.

Exercice 20 Diamètre d'étoile



Même avec de puissants télescopes, les étoiles apparaissent toujours comme des points (en fait, comme de petites taches de diffraction) à cause de leur trop grande distance. Pour déterminer les diamètres des étoiles, A. MICHELSON a réalisé en 1920 un interféromètre à 4 miroirs où l'on constate que les franges disparaissent quand les miroirs M_1 et M_2 sont espacés de d. Le télescope est alors équivalent à un télescope de diamètre d, supérieur au diamètre du miroir. On rappelle le critère classique de disparition des franges : « quand les taches d'Airy se superposent à moitié ». En déduire le diamètre angulaire θ de l'étoile visée (1 ua = 150 millions de km)

A.N. Pour l'étoile *Bételgeuse*, la plus brillante de la constellation d'Orion, Michelson a trouvé $d = 3,073$ m avec $\lambda = 0,575$ µm. D'autres techniques ont permis de déterminer que cette étoile est située à 400 al. Calculer son diamètre linéaire. Le diamètre du Soleil vaut $\Phi_S = 1400000$ km.

Rayonnement

Exercice 21 Rayonnement solaire et fusion thermonucléaire

Le rayonnement des étoiles est dû à la fusion thermonucléaire dont la réaction bilan s'écrit :

$$4\text{H} \rightarrow \text{He} + \gamma \qquad (\gamma \text{ représente des photons}).$$

Le Soleil transforme ainsi chaque seconde 644,4 Mt d'hydrogène en 640,0 Mt d'hélium (Mt signifie mégatonne). D'autre part, on mesure que la haute atmosphère de la Terre reçoit une puissance de l'ordre de 8,4 J/min sur une surface de 1 cm^2 exposée perpendiculairement au Soleil, à 1 ua de distance (1 ua $= 150 \cdot 10^6$ km).

1. Calculer la puissance rayonnée par le Soleil.

2. Vérifier que les deux informations précédentes sont compatibles.

3. Si le Soleil était constitué entièrement d'hydrogène, quelle énergie pourrait-il libérer ? (sa masse actuelle est $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg).

4. Quelle est l'énergie totale libérée depuis sa formation en tant qu'étoile, il y a environ 4,5 milliards d'années. L'exprimer en fonction de sa réserve d'énergie calculée précédemment.

5. Au fur et à mesure de son évolution, le Soleil s'appauvrit en hydrogène et on estime qu'il ne pourra transformer en hélium que le dixième de sa masse actuelle. Dans ces conditions, évaluer la durée de vie du Soleil, et calculer son âge à sa « mort » stellaire.

Exercice 22 La Terre : corps noir ou planète bleue ?
(d'après Agrégation 2003)

Le Soleil, assimilé à une sphère de rayon R^* rayonne comme un corps noir de température T^*. On donne $R^* = 7{,}0 \cdot 10^8$ m, $T^* = 5\,800$ K et $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $\text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ constante de Stefan.

1. Calculer la puissance L^* rayonnée par le Soleil.

2. La Terre, sphère de rayon $R_T = 6\,400$ km, est située à la distance $a = 1$ ua du Soleil. Calculer la puissance L interceptée par la Terre, en tant que disque de rayon R_T perpendiculairement à la direction du Soleil (sur la sphère de rayon a). En déduire la fraction L/L^* de la puissance solaire interceptée.

3. La Terre réfléchit la fraction A (appelée albédo) de la puissance incidente. En supposant qu'elle se comporte comme un corps noir de température T, calculer T en fonction de T^*. Cette température dépend-elle de R_T ? **A.N.** $A = 0{,}3$.

4. La température moyenne au sol étant en réalité de $+15$ °C, que penser de l'hypothèse « la Terre rayonne comme un corps noir » ? Quel effet supplémentaire peut expliquer cet écart ?

5. Le maximum d'émission du Soleil se situe vers la longueur d'onde $\lambda^* = 0{,}5$ µm. Quelle est alors la longueur d'onde du maximum d'émission de la Terre ? Cela peut-il confirmer la réponse précédente ?

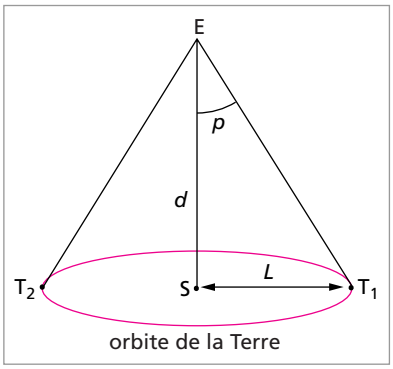
SOLUTIONS

1 **a.** En 1 ns, $L = c \cdot t = 30$ cm. En 1 an, $t = 31{,}5 \cdot 10^6$ s et $L = 1$ al $= 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m $\approx 10^{13}$ km.

b. À 6 mois d'intervalle, la Terre passe de T_1 à T_2. On a $\tan(p) = ST/SE$. Si $p = 1''$, alors :

$$d = SE = 1pc = ST/\tan(1'') \approx 3{,}1 \cdot 10^{13} \text{ km}.$$

Et $1pc = 3{,}1 \cdot 10^{13}/9{,}5 \cdot 10^{12} = 3{,}26$ al. L'angle p étant faible, $\tan(p) \approx p$ (en rad) d'où la relation $d(pc) = 1/p('')$.



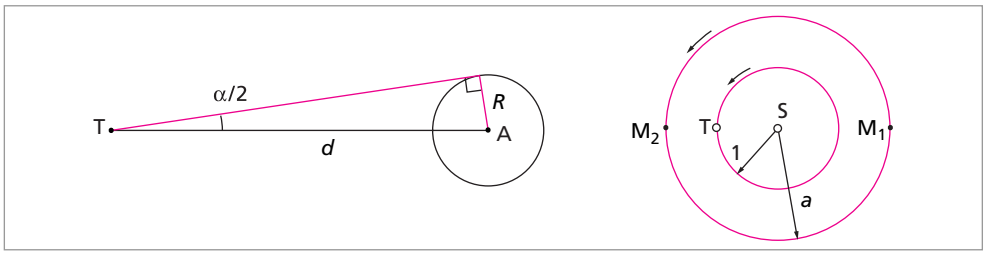
c. Avec $p = 0{,}31''$, on déduit :

$$d = 1/0{,}31 = 3{,}23\ pc = 10{,}5 \text{ al}.$$

La lumière met plus de 10 ans à nous parvenir de cette étoile. Pour le Soleil, comme 1 ua $= 150 \cdot 10^6$ km, $t = 1$ ua/c soit 500 s ou environ 8 min.

d. 1 *mas* $= 0{,}001''$ d'où $\tan(\alpha) = h/d \approx 0{,}001 \cdot \pi/180/3\,600 = 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ rad d'où $h \approx 5 \cdot 10^{-9} \cdot d$.
New York se situe à $d \approx 6\,000$ km, d'où $h = 3$ cm (diamètre d'une balle de ping-pong).
La Lune se trouve à $d = 380\,000$ km, d'où $h = 1{,}9$ m (taille d'un être humain).

2



La distance d d'une planète à la Terre varie entre $|a - 1|$ en M_1 et $(a + 1)$ en M_2. Le diamètre apparent α est tel que $\sin(\alpha/2) = R/d \approx \alpha/2$ (en rad) d'où $\alpha = 2R/d$. Avec les unités α (en $''$), R (en R_T) et d (en ua), on a : $\alpha('') = 2 \cdot R\,(\text{en } R_T) \times 6\,380/[d(\text{en ua}) \times 150 \cdot 10^6] = 17{,}5''.R/d$. Voici les valeurs extrêmes, arrondies (entre parenthèses, on donne les valeurs vraies, corrigées compte tenu des excentricités orbitales).

	Mercure	Vénus	Mars	Jupiter
α_{min}	5″	10″	4″	32″ *(30″)*
α_{max}	12″ *(13″)*	59″ *(66″)*	18″ *(26″)*	47″ *(50″)*

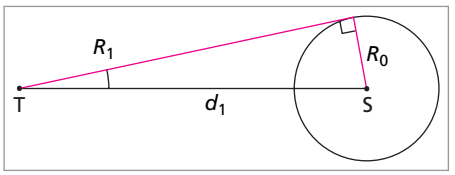
	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
α_{min}	16″ *(15″)*	3″	2,1″	0,1″
α_{max}	18″ *(21″)*	4″	2,3″	0,1″

Pour le Soleil, $\alpha = 17{,}5'' \times (700\,000/6\,378)/1 = 1\,920'' = 32' \approx 0{,}5°$. Compte tenu de l'excentricité de l'orbite terrestre ($e = 0{,}017$), α varie entre 31,5′ (en juillet) et 32,5′ (en janvier).
Pour la Lune, $d = 380\,000$ km $\approx 1/400$ ua, d'où :

$$\alpha = 17{,}5'' \times 0{,}273 \times 400 = 1\,911'' = 31{,}9'.$$

En fait, l'excentricité de l'orbite lunaire est assez grande (0,05) et α varie entre 29,4′ et 33,4′.

3 **a.** $\sin(R_1) = R_0/d_1 = 0{,}7{\cdot}10^6/150{\cdot}10^6 = 0{,}0047$ d'où $R_1 = 0{,}27° = 16' = 960''$.



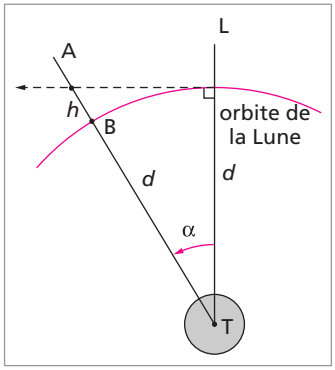
b. $\sin(\alpha) = R_0/d = \sin(R_1) \cdot d_1/d$. Or α varie de R_A à R_P d'où $\alpha \approx R_1 \cdot d_1/d$.

c. $d_P = d_1 \cdot (1 - e)$ et $d_A = d_1 \cdot (1 + e)$ d'où $R_P = R_1/(1 - e)$ et $R_A = R_1/(1 + e)$.
En éliminant e, on obtient d'abord $\dfrac{2}{R_1} = \dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_P}$ puis $\dfrac{2e}{R_1} = \dfrac{1}{R_A} - \dfrac{1}{R_P}$. La première relation montre que R_1 est la moyenne harmonique de R_A et R_P.
A.N. $R_A = 943{,}9''$ et $R_P = 975{,}9''$ d'où $R_1 = 959{,}63''$ et $e = 0{,}0167$.

d. Si d est la distance du Soleil à la Terre, l'intensité lumineuse (et donc thermique) est en $1/d^2$. Alors $\dfrac{I_{janvier}}{I_{juillet}} = \left[\dfrac{1+e}{1-e}\right]^2 = 1{,}0691$ soit 1 + 0,07. La Terre reçoit 7 % d'énergie en plus en janvier qu'en juillet car elle est plus proche du Soleil. L'hiver dans l'hémisphère Nord est donc plus doux que l'hiver dans l'hémisphère Sud, tandis que l'été du Nord est moins torride que l'été du Sud.

4 En 1 s de chute, la pomme tombe de la hauteur $H = 1/2.g{\cdot}t^2 = 4{,}9$ m. Pendant 1 s, la Lune tourne autour de la Terre de l'angle $\alpha = 360°/(27{,}3 \times 86\,400) = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ rad. Or $d/(d + h) = \cos(\alpha)$ et $h \ll d$ d'où $1 - h/d \approx 1 - \alpha^2/2$ et $h \approx d \cdot \alpha^2/2 = 1{,}36$ mm.

On constate que le rapport H/h vaut $4900/1{,}36 \approx 3600 = 60^2$. La Lune, située 60 fois plus loin que la pomme (du centre de la Terre) parcourt une longueur 60^2 fois plus faible que la pomme dans la chute libre pendant la même durée. Cela signifie que la force qui attire la Lune est 60^2 fois plus faible que celle qui attire la pomme. La loi de force est donc en $1/r^2$. Ce fut le raisonnement de Newton.



5 **1.** G est homogène au produit $F \cdot r^2/M^2$ d'où $[G] = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$ et s'exprime en $m^3/(kg \cdot s^2)$.

2. La pesanteur au sol vaut $P = m \cdot g = G \cdot M.m/R^2$ d'où $g = G \cdot M/R^2$.

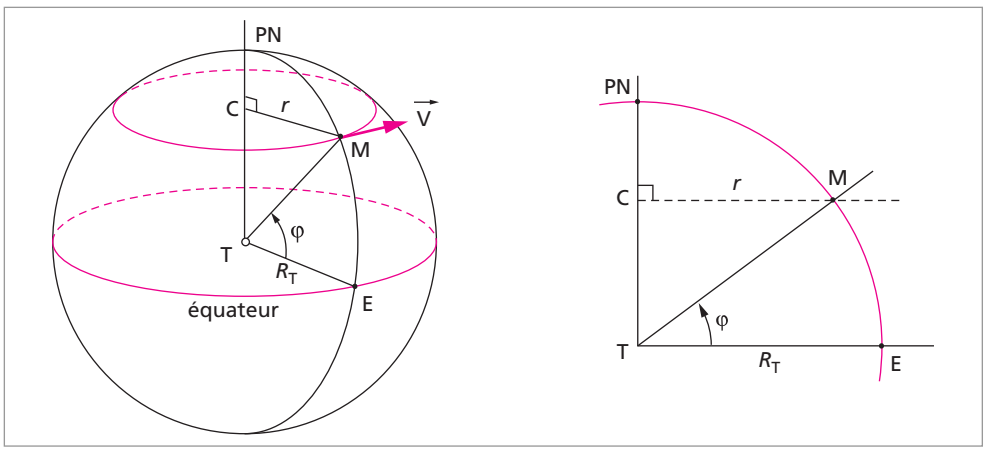
– sur Terre, $g_T = G \cdot M_T/R_T^2 = 9{,}8\ m/s^2$.

– sur la Lune,

$$g_L = G{\cdot}M_L/R_L^2 = g_T{\cdot}(M_L/M_T){\cdot}(R_T/R_L)^2 = 9{,}8/81 \times (3{,}7)^2 = 1{,}7\ m/s^2 \approx g_T/6.$$

La gravité lunaire est 6 fois plus faible que celle de la Terre.

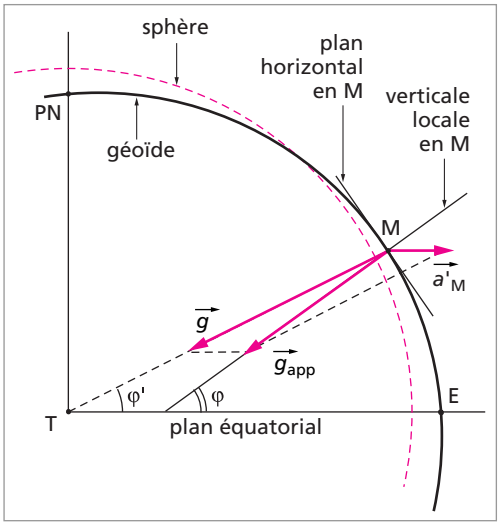
6 **1.** Le jour solaire est supérieur au jour sidéral car, pour avoir de nouveau le Soleil au méridien après un tour sur elle-même, la Terre doit tourner encore un peu autour du Soleil. La vitesse angulaire est $\omega = 2\pi/T = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad/s soit environ 15° par heure.



2. Le point M décrit un cercle (le parallèle géographique de latitude φ) en un jour, de rayon $r = R_T \cdot \cos\varphi$ à la vitesse linéaire $v_M = r \cdot \omega = R_T \cdot \omega \cdot \cos\varphi$. Cette vitesse étant constante (en module), l'accélération de M est centripète et vaut $a = v^2/r = r \cdot \omega^2 = R_T \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi$.

A.N. $R_T = 6\,400$ km et $\varphi = 49°$ donnent $v_M = 0{,}31$ km/s et $a_M = 0{,}022$ m/s^2 (l'accélération est 440 fois plus petite que g).

En réalité, le problème est plus complexe car la Terre n'est ni sphérique ni homogène. En un point M de la Terre, l'accélération apparente g_{app} est la composition de deux vecteurs : g(gravitation vers le centre de la Terre) et a'_M (accélération centrifuge, opposée à a_M, due à la rotation de la Terre). Il en résulte que la Terre est déformée en ellipsoïde de révolution (géoïde) telle que la verticale locale est normale au géoïde (elle ne passe pas par le centre de la Terre). Aux Pôles, $a_M = 0$. À l'équateur, g_{app} est effectivement centripète et possède la valeur minimale $g - a_E$ avec $a_E = R_T \cdot \omega^2 = 0{,}034$m/s^2 d'où $g_{app} = 9{,}81 - 0{,}03 = 9{,}78$ m/s^2.



Si la Terre tournait 17 fois plus vite sur elle-même, on serait en impesanteur à l'équateur (car $g/a_E = 9{,}81/0{,}034 \approx 289 = 17^2$).

L'aplatissement de la Terre est faible (1/300). Compte tenu de la forme ellipsoïdale, on définit deux latitudes : φ' (géographique ou géocentrique, liée au centre de la Terre) et φ (astronomique, selon la verticale locale, normale au géoïde). Ces valeurs sont très proches : l'écart $\varphi - \varphi'$ est maximal vers $\varphi' = 45°$ et vaut $\approx 0{,}2°$.

7 L'analyse dimensionnelle peut fournir des liens numériques entre certaines grandeurs physiques en respectant l'homogénéité des relations. La période de révolution T est supposée être une fonction de plusieurs grandeurs : les masses M et m, la gravitation (par G) et le rayon r de l'orbite. On écrit T sous la forme $T = m^\alpha \cdot G^\beta \cdot r^\gamma$ où α, β, γ sont 3 exposants à déterminer. Les dimensions de G s'obtiennent à partir de la force de gravitation $F = G \cdot M \cdot m/d^2$ d'où :

$$[G] = \frac{(MLT^{-2}) \cdot (L^2)}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2}$$

On identifie les exposants terme à terme des grandeurs de cette égalité :

$$T^1 \equiv M^\alpha \cdot \left(\frac{L^3}{M \cdot T^2}\right)^\beta \cdot L^\gamma,$$

ce qui fournit 3 équations :

$$\alpha - \beta = 0\,; \qquad 3\beta + \gamma = 0\,; \qquad -2\beta = 1$$

d'où

$$\alpha = \beta = -1/2 \qquad \text{et} \qquad \gamma = 3/2.$$

On peut donc écrire l'expression de $T = m^{-1/2} \cdot G^{-1/2} \cdot r^{3/2}$ soit $T^2 = \mathrm{K} \cdot r^3/(\mathrm{m.G})$ ou encore $T^2/r^3 =$ cste. C'est la 3e loi de Kepler.
A.N. La constance du rapport pour les 2 orbites s'écrit $T/T_0 = (r/r_0)^{3/2}$ d'où $T = 4\sqrt{4} = 8$ h.

8 C'est une application de la 3e loi de Kepler $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_s}$ d'où le produit $G \cdot M_s = 4\pi^2 a^3/T^2$. La période orbitale T vaut 1 an $= 31{,}5 \cdot 10^6$ s d'où $M_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Avec un rayon $R_S = 700\,000$ km, le Soleil a un volume $V_S = 4/3 \cdot \pi \cdot R_S^3$ d'où la masse volumique $\rho_S = M_S/V_S = 1\,400$ kg/m^3 (c'est 4 fois moins que la Terre $\rho_T = 5\,500$ kg/m^3). La densité du Soleil par rapport à l'eau est donc de 1,4.

9 **1.** voir exercice n° 1

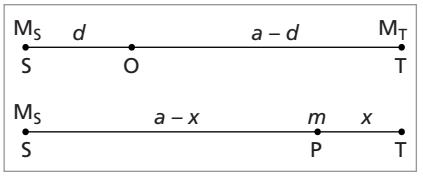
2. Bien qu'il n'y ait pas de masse centrale attractive dans la Galaxie, tout se passe, du point de vue gravitationnel, comme si sa masse totale M était réduite à son barycentre. En supposant que les N étoiles qu'elle renferme soient identiques au Soleil « moyen », la masse totale de la Galaxie est alors $M = N \cdot M_S$. La 3e loi de Kepler $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M}$ appliquée à l'orbite du Soleil dans la Galaxie donne M avec $T = 250 \cdot 10^6$ ans (avec 1 an $= 31{,}5 \cdot 10^6$ s) et $a = 30\,000$ al (et 1 al $= 10^{16}$ m) ; la masse de la Galaxie vaut ainsi $M = 2{,}6 \cdot 10^{41}$ kg.
Le nombre d'étoiles est donc $N = M/M_S = 130 \cdot 10^9$ soit de l'ordre de 100 milliards. C'est bien sûr une estimation statistique.
La Galaxie ne tourne pas en bloc, la vitesse de rotation dépend de la distance au centre galactique. Au niveau du Soleil, cette vitesse vaut $v = 2\pi a/T$ soit environ 220 km/s. À cette vitesse d'entraînement du Soleil s'ajoute, pour la Terre, sa vitesse orbitale (30 km/s) autour du Soleil. On en tient compte quand on détermine les vitesses des étoiles par effet Doppler (à partir de leurs spectres).

Remarque : on peut estimer le nombre de protons présents dans l'Univers connu, lequel contient 10^{11} à 10^{12} galaxies, dont chacune renferme 10^{11} étoiles (en moyenne). Le Soleil de masse $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg est formé presque entièrement de protons de masse m_P (en fait de 90 % d'élément H et de 10 % d'He). La masse d'un proton (en kg) est $m_P = 10^{-3}/N = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg où N est le nombre d'Avogadro. Le nombre de protons dans le Soleil est alors $M_S/m_P \sim 10^{57}$ et dans la Galaxie 10^{11} fois plus soit $\sim 10^{68}$. Et dans l'Univers, 10^{11} à 10^{12} fois plus encore soit de l'ordre de 10^{80}. Ainsi le nombre 10^{80} est le plus grand nombre « entier » qui ait une réalité physique.

10 **1.** Le barycentre O de S et T est situé à la distance d de S, définie par l'égalité $M_T \cdot (a - d) = M_S \cdot d$ d'où $d/a \approx M_T/M_S = 3 \cdot 10^{-6}$. Avec $a = 150 \cdot 10^6$ km, le barycentre est situé à $d = 450$ km du centre du Soleil, de rayon 700 000 km. On peut donc confondre O et S.

2. La masse m en P est soumise à 3 forces :

- la gravitation due au Soleil : $G \cdot m \cdot M_S/(a-x)^2$
- la gravitation due à la Terre : $G \cdot m \cdot M_T/x^2$
- la force centripète due au mouvement circulaire de P autour de S : $m \cdot v^2/(a - x)$ d'où l'équation d'équilibre de P :



$$\frac{m \cdot v^2}{a - x} = \frac{G \cdot m \cdot M_S}{(a - x)^2} - \frac{G \cdot m \cdot M_T}{x^2} \qquad \text{(équation E)}$$

3. Dans le cas d'un mouvement uniforme de période T, sur une orbite circulaire de rayon r, la vitesse est $v = 2\pi r/T$; la force centripète est la force de gravitation $\frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ d'où $v^2 = G \cdot M/r$ ce qui conduit à la 3e loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$. En réalité, le dénominateur est $G \cdot (M + m)$ car le mouvement a lieu autour du barycentre (de masse $M + m$). Ici, la vitesse orbitale de P est $v = 2\pi(a - x)/T$ d'où :

$$v^2(P) = \frac{(a - x)^2}{a^3} \cdot G \cdot (M_S + M_T)$$

4. On remplace cette expression de v^2 dans (E) :

$$\frac{a - x}{a^3} \cdot (M_S + M_T) = \frac{M_S}{(a - x)^2} - \frac{M_T}{x^2}$$

ce qui conduit à :

$$M_S . \frac{a^3 - (a - x)^3}{a^3 . (a - x)^2} = M_T \cdot \frac{x^2 . (a - x) + a^3}{a^3 . x^2}$$

Or $a^3 - (a-x)^3 = 3a^2x - 3ax^2 + x^3 \approx 3a^2x$ si $x \ll a$. En gardant cette hypothèse ($x \ll a$), l'expression précédente devient $M_S \cdot \frac{3x}{a^3} = M_T \cdot \frac{1}{x^2}$ d'où le rapport $\frac{x}{a} \approx \sqrt[3]{\frac{M_T}{3 \cdot M_S}} = 0{,}01$ ce qui confirme l'hypothèse faite. Le point P est donc situé au 1/100 de la distance du Soleil, à $x = 1{,}5$ million de km de la Terre. C'est le point de Lagrange L_1.

5. Le point équigravitationnel Q est tel qu'il y a égalité des forces de gravitation (mais sans mouvement orbital) :

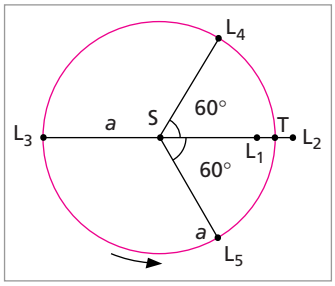
$$\frac{G \cdot m \cdot M_S}{(a - y)^2} = \frac{G \cdot m \cdot M_T}{y^2}$$

d'où

$$\left(\frac{y}{a - y}\right)^2 = \frac{M_T}{M_S}.$$

Si $y \ll a$, on tire $\frac{y}{a} \approx \sqrt[2]{\frac{M_T}{M_S}}$ d'où $y/a \approx 0{,}0017$ (on a bien $y/a \ll 1$) et $y = 260\,000$ km de la Terre, soit 6 fois plus proche que L_1.

6. L'intérêt de placer un télescope en orbite solaire en ce point L_1 est qu'il est toujours opérationnel, restant entre la Terre et le Soleil. S'il était en orbite autour de la Terre, il passerait régulièrement dans l'ombre de la Terre, ne pouvant alors plus observer le Soleil, et ne recevant plus d'énergie pour les batteries solaires.
Il existe en fait 5 points de Lagrange. Les points L_1, L_2, L_3 sont des points d'équilibre instable situés près de l'orbite de la Terre (le satellite SOHO est maintenu en permanence au point L_1 grâce à de petites corrections d'orbite). Les points L_4 et L_5 forment des triangles équilatéraux avec le Soleil et la Terre, ce sont des points d'équilibre stable. Dans le système solaire, des astéroïdes sont situés aux points L_4 et L_5 de l'orbite de Jupiter, tournant en 12 ans autour du Soleil, comme cette planète.



11 **1.a.** De $r_1 + r_2 = a$ et $Mr_2 = mr_1$, on tire $r_1 = aM/(M+m)$ et $r_2 = am/(M+m)$.

1.b. On dérive $Mr_2 = mr_1$ par rapport au temps, d'où $MV_2 = mV_1$. La force centripète est la force de gravitation :

$$F = GmM/a^2 = MV_2^2/r_2 = mV_1^2/r_1$$

d'où

$$V_2^2 = \frac{Gm^2}{a(M+m)} \qquad \text{et} \qquad V_1^2 = \frac{GM^2}{a(M+m)}$$

On a encore

$$\frac{V_1}{M} = \frac{V_2}{m}$$

d'où

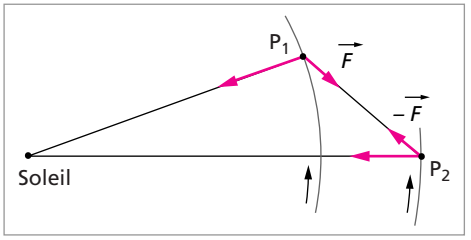
$$MV_2 = mV_1.$$

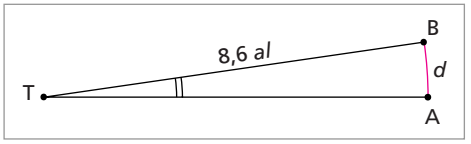
1.c. La période orbitale est $T = 2\pi r_1/V_1 = 2\pi r_2/V_2$; de T^2, on tire

$$T^2/a^3 = 4\pi^2/[G \cdot (M+m)].$$

2.a. Vocabulaire : une *étoile* rayonne (par fusion thermonucléaire). Une *planète* ne rayonne pas (dans le visible) et est en orbite autour d'une étoile (de masse généralement très supérieure). Un *satellite* est en orbite autour d'une planète ; la *Lune* (L majuscule) est le satellite naturel de la Terre (le mot *lune*, synonyme de satellite, est utilisé pour les autres planètes que la Terre).

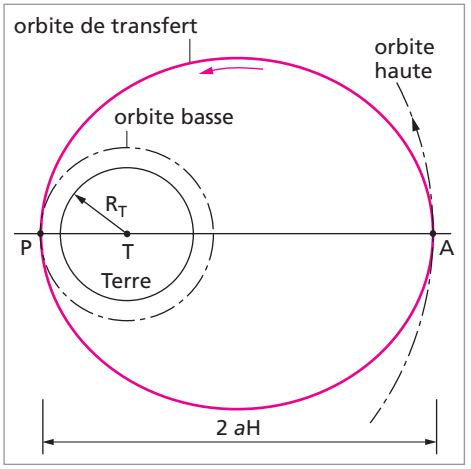
2.b. La masse d'une planète est très faible devant celle du Soleil : même la planète Jupiter, pourtant 10 fois plus large que la Terre, n'a qu'une masse égale à 1/1 000 de celle du Soleil. La force d'interaction gravitationnelle F entre les planètes P_1 et P_2 de masses M_1 et M_2 est donc négligeable (au 1er ordre) devant la force centrale due au Soleil. Au 2e ordre, on doit tenir compte de cette *force perturbatrice* du mouvement de P_1 (ou P_2).





3. Application à l'étoile double *Sirius* A et B. Le rapport des masses M/m vaut 2,44 d'où $M + m = 3{,}44m$. La distance linéaire d entre les 2 étoiles A et B se calcule à partir de la distance de l'étoile à la Terre et de la distance angulaire apparente : $d = \text{TA} \cdot \alpha$ avec $\text{TA} = 8{,}6$ al et $\alpha = 7{,}5'' = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ rad d'où $d \approx 3 \cdot 10^{12}$ m (on a déjà vu que $1al = 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m). La période orbitale $T = 50$ ans $= 50 \times 31{,}5 \cdot 10^6$ s conduit à $M+m = 4\pi^2 d^3/(GT^2) = 6 \cdot 10^{30}$ kg. Or $m = (M+m)/3{,}44$ ce qui donne $m = 0,87 M_S$ et $M = 2{,}12 \cdot M_S$. Les deux étoiles ont des masses voisines, en rapport avec celle du Soleil. L'étoile Sirius B, invisible, est une *naine brune* qui, refroidie, ne rayonne plus.

12 **1.** L'orbite géostationnaire correspond à celle d'un satellite artificiel de la Terre effectuant une révolution en 1 jour sidéral de 86164 s (23 h 56 min) dans le plan équatorial. La 3e loi de Kepler $T^2/a^3 = 4\pi^2/(G \cdot M_T)$ donne un rayon orbital a = 42 200 km, soit une altitude de près de 35 800 km. La vitesse du satellite sur cette orbite est $v = 2\pi a/T \approx 11\,000$ km/h $= 3{,}1$ km/s.



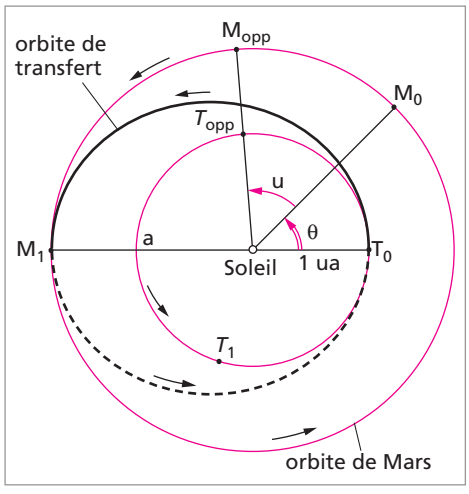
2. Le satellite *Hipparcos* suit une orbite elliptique dont l'apogée (le point le plus éloigné de la Terre) est égal au rayon de l'orbite géostationnaire, à 42 200 km du centre de la Terre ; le périgée (le point le plus proche) vaut 6 940 km (altitude de 560 km). Le demi-grand axe a_H de cette ellipse est tel que $2a_H = 42\,200 + 6\,940$ soit $a_H = 24\,570$ km. La 3e loi de Kepler conduit à $T_H = 38\,250$ s $\approx 10{,}6$ h. L'excentricité de cette orbite vaut 0,72 (l'un des 2 foyers est le centre de la Terre).

La période synodique est la durée séparant deux passages consécutifs au-dessus du même point de la Terre. Soit J la durée du jour solaire (24 h). La période synodique S est telle que $1/\mathrm{S} = 1/T_\mathrm{H} - 1/J$ d'où $S \approx 19$ h.
Malgré ces difficultés, le satellite a parfaitement rempli sa mission astrométrique en mesurant les parallaxes de plus de 100 000 étoiles à 0,002″ près et leur position à 0,003″ près !

Remarque : : le problème du Capes externe de 2002 (partie B : satellites artificiels, transfert) se traite de façon très semblable.

13 La sonde décrit une *orbite de transfert* elliptique dite de HOHMANN, du nom du physicien qui a étudié ces trajectoires vers 1925. Cette orbite est la plus économique mais hélas la moins rapide. On quitte l'orbite basse avec une impulsion qui propulse la sonde jusqu'à l'orbite haute, en suivant cette orbite de transfert, tout en restant sous l'influence de la gravitation solaire.

1. La durée du transfert correspond à la moitié de la période sur l'orbite de Hohmann. La planète Mars effectue une révolution en 1,88 an, elle se situe à la distance a du Soleil telle que $T^2/a^3 = 1$ (3e lois de Kepler utilisant les unités an et ua) d'où $a = \sqrt[3]{1{,}88^2} = 1{,}52$ ua. Le demi-grand axe a_H de l'orbite de transfert est tel que $2a_\mathrm{H} = a_\mathrm{T} + a_\mathrm{M}$ où a_T et a_M sont les rayons orbitaux de la Terre et de Mars, d'où $a_\mathrm{H} = (1 + 1{,}52)/2 = 1{,}26$ ua. La période de cette orbite est donc telle que $T_\mathrm{H}^2/a_\mathrm{H}^3 = 1$ d'où $T_\mathrm{H} = \sqrt{(1{,}26)^3} \approx \sqrt{2} = 1{,}41$ an. Le transfert $T_0\mathrm{M}_1$ dure la moitié soit 0,707 an ou 8,5 mois.



2. Pendant ces 8,5 mois (= 258 jours), Mars tourne de l'angle $180° - \theta$ (arc $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$) à raison de 1,88 an pour un tour ; on en déduit $180° - \theta = 360° \times T_\mathrm{H}/1{,}88$ d'où $\theta \approx 44{,}6°$.
Entre les positions M_0 et M_{opp} (opposition de Mars), Mars tourne de l'angle u autour du Soleil pendant la durée τ cherchée (avant l'opposition). La Terre tourne de l'angle $\theta + u$ pendant cette même durée. D'où les 2 équations en θ et u (ici, τ est en année) : $\theta + u = 360° \cdot \tau/1{,}00$ et $u = 360° \cdot \tau/1{,}88$; on en déduit $\theta = 0,88 \cdot u$ d'où $u = 44{,}6/0{,}88 = 50{,}7°$. Ce qui conduit à $\tau = 1{,}88 \times 50{,}7/360 = 0{,}265$ an $= 97$ jours ≈ 3 mois. On doit donc partir 97 jours avant l'opposition. On arrivera près de Mars 161 jours après l'opposition ($= 258 - 97$).

La réalité d'un vol spatial est bien plus complexe : il faut notamment tenir compte de l'excentricité de l'orbite de Mars (0,093 assez forte si bien que l'orbite « circulaire » est décentrée), ainsi que de l'inclinaison de cette orbite (presque 2° sur l'écliptique).

14 **1.** Pour $T = 313$ K (40 °C) puis $T = 400$ K, on obtient les vitesses v_q suivantes :

gaz	H_2	He	N_2	O_2	CO_2
M (g/mole)	2	4	28	32	44
v_q à 40 °C (m/s)	1980	1400	530	500	420
v_q à 400 K (m/s)	2200	1600	600	550	500

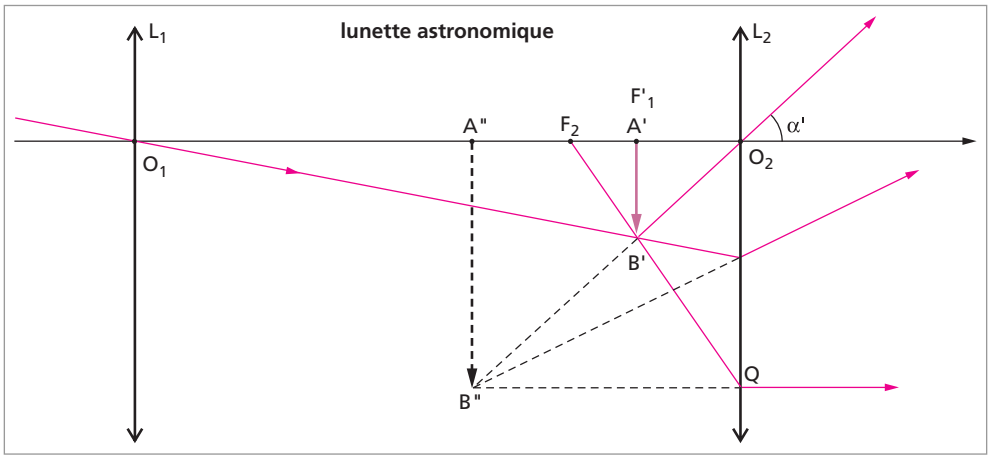
2. La vitesse d'évasion d'une planète correspond à une trajectoire parabolique (l'orbite elliptique s'ouvre) de vitesse $v_e = v_s\sqrt{2}$ où v_s est la vitesse de satellisation sur une orbite circulaire au ras du sol (altitude zéro). Sur cette orbite circulaire rasante, la force centripète est la pesanteur : $mv_s^2/R = mg = GMm/R^2$ où R est le rayon de la planète. On obtient $v_s^2 = GM/R$ et $v_e^2 = 2GM/R$. Pour la Terre, $v_s = 7{,}9$ km/s et $v_e = 11{,}2$ km/s.
Pour la Lune, $v_e'^2 = \dfrac{2GM_L}{R_L} = v_e^2.\dfrac{M_L}{M_T}\cdot\dfrac{R_T}{R_L}$ d'où $v_e' = 2{,}4$ km/s ($\approx v_e/4{,}7$).
Concernant les gaz de l'atmosphère, on constate que sur Terre, $v_q \ll v_e$ ce qui signifie que les molécules ne peuvent s'échapper de la Terre par agitation thermique (même à cette température déjà assez élevée). La Terre possède donc une atmosphère.
Sur la Lune, la température varie entre −170 °C (à l'ombre) et +130 °C (au Soleil), soit entre 100 K et 400 K environ. La vitesse d'agitation des molécules d'une atmosphère éventuelle sera maximale à 400 K. On constate que sur la Lune, on n'a plus $v_q \ll v_e'$: les molécules les plus rapides peuvent donc s'échapper de la gravitation et quitter la Lune. Elle a donc perdu peu à peu son atmosphère. C'est également le cas de la planète Mercure ($M' = M_T/18$ et $R' = 0{,}38 \cdot R_T$) où $v_e = 4{,}3$ km/s mais v_q (à 500 K) vaut 2,5 km/s pour H_2 et 0,6 km/s pour O_2.

Lunettes et télescopes

15 **1.** Le diamètre apparent α de la Lune est tel que $\sin(\alpha/2) = R_L/D = 0{,}0046$ d'où $\alpha = 0{,}0092$ rad $= 0{,}53°$. La pièce de 2 centimes d'euro (de 19 mm de diamètre) est $1{,}8 \cdot 10^8$ fois plus petite que la Lune. Pour être vue sous le même angle, on doit la placer $1{,}8 \cdot 10^8$ fois plus près que la Lune, c'est-à-dire à 2,1 m de l'œil.

2. En montage afocal, le grossissement G est égal au rapport des longueurs focales de l'objectif et de l'oculaire $G = F'/f' = 50$. Le diamètre apparent de la Lune est alors 50 fois plus grand soit égal à 26°. La pièce de 2 centimes doit être 50 fois plus près, c'est-à-dire à 4 cm de l'œil (elle est trop proche pour être vue nettement).

16 L'objectif L_1 donne de l'objet AB (à l'infini) une l'image $A'B'$ dans le plan focal image de L_1 situé en F'_1. L'oculaire L_2 est une loupe qui donne de l'objet $A'B'$ l'image finale $A''B''$.



On écrit donc :

$$AB(\infty) \rightarrow A'B' \text{ (en } F'_1) \rightarrow A''B''.$$

Quand on n'a pas le montage afocal ($e < f'_1 + f'_2$), le plan focal objet de L_2 est placé en avant du plan focal image de L_1. Pour construire l'image finale $A''B''$, on trace $B'O_2$ puis le rayon F_2B', lequel coupe le plan de L_2 en Q puis ressort parallèle à l'axe de la lunette (car issu du foyer objet F_2). Le point B'' est à l'intersection de cette parallèle en Q et de $B'O_2$. On complète le schéma par les rayons issus de L_1.

Si le montage est afocal, les foyers F'_1 et F_2 sont confondus, l'image $A''B''$ est à l'infini. Les rayons incidents sur L_1 sont inclinés de l'angle α sur l'axe principal ($\alpha \ll 1$ rad). D'où

$$\tan\alpha = A'B'/O_1F'_1 = A'B'/f'_1 \approx \alpha$$

De même,

$$\tan\alpha' = A''B''/O_2A'' = A'B'/O_2F'_1 \approx \alpha'$$

Or (relation de CHASLES) :

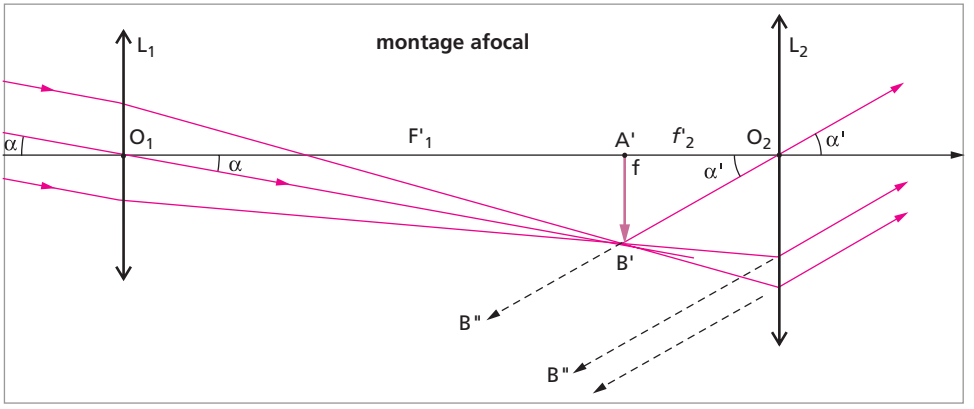
$$\overline{O2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e + f'_1$$

D'où

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{f'_1 - e}$$

A.N. Quand $e = 51{,}6$ cm, $G = 50/-1{,}6 \approx -31$ (G étant négatif, l'image est inversée).
Quand $e = 52\text{ cm} = f'_1 + f'_2$, le système est afocal et $G = -f'_1/f'_2 = -25$.
La position de l'image finale $A''B''$ (en montage non afocal) se calcule par la relation de conjugaison de la lentille L_2 : $\dfrac{1}{\overline{O_2A''}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A'}} = \dfrac{1}{f'_2}$ avec $\overline{O_2A'} = -e + f'_1$, d'où $\overline{O_2A''} = \dfrac{f'_2 \cdot (f'_1 - e)}{f'_1 + f'_2 - e}$.

A.N. Quand $e = 51{,}6$ cm, $\overline{O_2A''} = -8$ cm. Quand $e = 52{,}0$ cm, on retrouve que $O_2A'' \to \infty$.

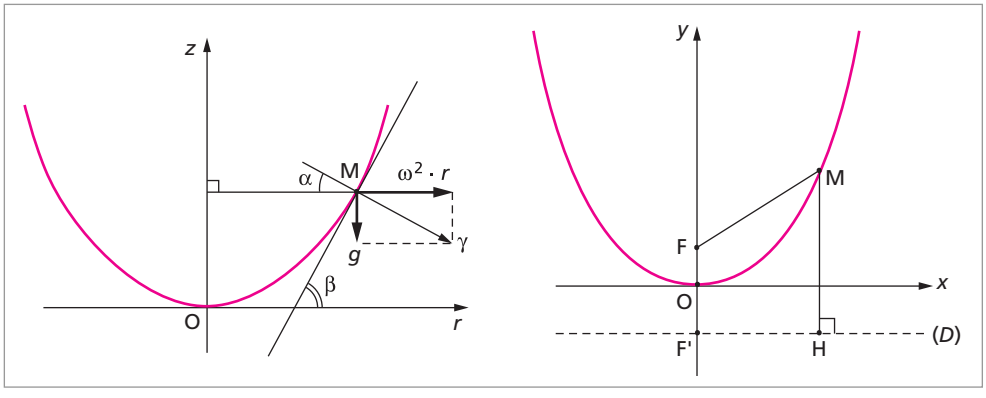


17 **1.** Équilibre hydrostatique : le point M est soumis à 2 forces, la gravitation $m \cdot g$ (verticale) et la force centrifuge $m \cdot \omega^2 \cdot r$ (horizontale). La gravité apparente $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{g} + \omega^2 \cdot \overrightarrow{r}$ est normale en M à la surface du liquide. D'où :

$$\tan(\alpha) = g/(\omega^2 \cdot r)$$

Or, la pente de la tangente en M vaut $\tan(\beta) = dz/dr$ avec $\beta = \pi/2 - \alpha$; donc :

$$\tan(\alpha) = 1/\tan(\beta) = dr/dz$$

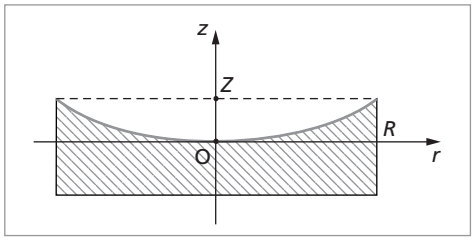


On en déduit l'équation différentielle liant r et z : $dr/dz = g/(\omega^2 \cdot r)$ ou encore : $r \cdot dr = g/\omega^2 \cdot dz$ qui s'intègre en $z(r) = \dfrac{\omega^2}{2g} \cdot r^2$ (la constante d'intégration est nulle car $z(0) = 0$). C'est bien une surface parabolique.
Le même phénomène se produit dans un verre d'eau quand on dissout un comprimé en tournant avec une petite cuillère.

2. Distance focale : par définition de la parabole, MF = MH. Soit OF $= f$ et OF$' = -f$. Avec les coordonnées (x, y) de M, cette relation s'écrit aussi :

$$\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = y + f$$

d'où $x^2 = 4fy$. En posant $y(x) = ax^2$, on obtient la distance focale de la parabole $f = 1/(4a)$.

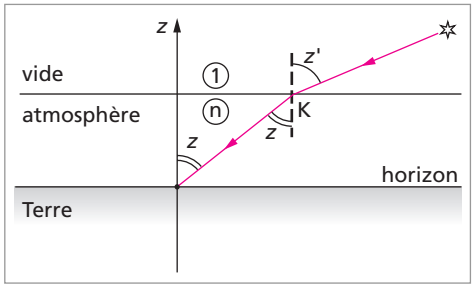


3. La profondeur Z de la cavité est telle que $Z = z(R) = \omega^2 \cdot R^2/(2g)$. Mais $z(r) = r^2/(4f)$ d'où $Z = R^2/(4f)$ et $f = g/(2\omega^2)$

A.N. $2R = 8{,}20$ m et $\omega = 7{,}3$ tours/min $= 0{,}76$ rad/s d'où $f = 8{,}4$ m et $Z = 0{,}50$ m (la profondeur relative est faible : $Z/(2R) \approx 0{,}06$ soit 6 %).

4. Les avantages techniques d'un tel miroir en galette mince (un *ménisque*) sont nombreux : faible poids, construction assez « rapide », le paraboloïde obtenu étant presque parfait (au bout d'un mois), il suffit de polir localement les petits défauts éventuels. Les 4 miroirs du télescope européen VLT (Very Large Telescope) installé dans les Andes chiliennes à 2600 m d'altitude sont construits selon ce procédé. Le ménisque de verre de 23 tonnes a un diamètre de 8,2 m et une épaisseur de 17 cm seulement. Il est maintenu par des vérins qui permettent de conserver la forme parabolique quand on incline le miroir lors des observations. Ce sont actuellement les plus grands télescopes optiques en un seul morceau.

18 La distance zénithale vraie de l'astre est $z' = z + R$. À cause de l'atmosphère, on mesure la distance zénithale apparente $z = z' - R$.



Dans le modèle simplifié de l'atmosphère plane et homogène, tout se passe comme si on avait une lame à faces parallèles. Le rayon lumineux arrive, hors de l'atmosphère sous l'incidence z' et pénètre dans l'atmosphère d'indice n. Au point K, la réfraction se traduit par $1 \times \sin(z') = n \cdot \sin(z)$. D'où :

$$n \cdot \sin(z) = \sin(z + R) = \sin(z) \cdot \cos(R) + \cos(z) \cdot \sin(R)$$

Comme $R \ll 1$ rad, la relation s'écrit :

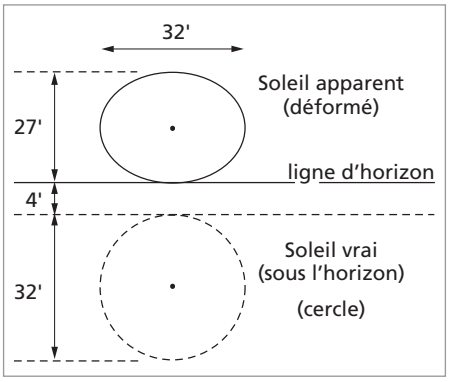
$$n \cdot \sin(z) \approx \sin(z) + R \cdot \cos(z)$$

soit $R \approx (n-1) \cdot \tan(z)$.

En passant des radians aux secondes de degré, $R(\text{rad}) = R('') \times 2 \cdot 10^5$ (où $2 \cdot 10^5 \approx 360 \cdot 180/\pi$). Avec $n = 1{,}0003$ on obtient :

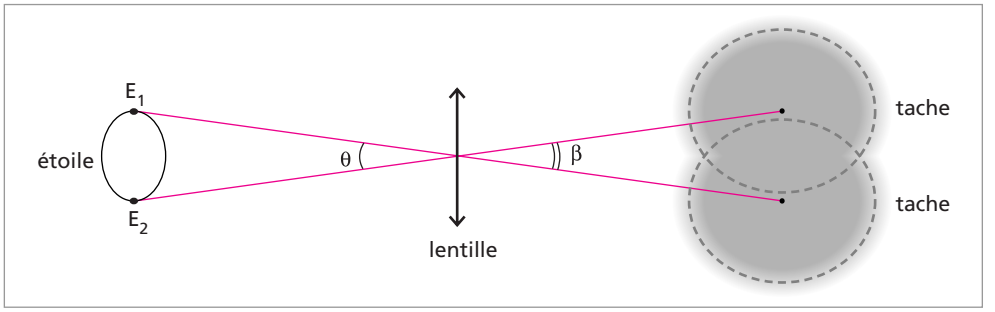
$$R('') \approx 0{,}0003 \times 2 \cdot 10^5 \times \tan(z) \approx 60. \tan(z).$$

En divisant par 60 pour revenir aux minutes de degré, $R(') \approx \tan(z)$.
À une hauteur sur l'horizon de 45°, les astres sont effectivement « relevés » de 1′. C'est insensible à l'œil nu mais visible avec un télescope calibré.
Cette relation numérique est correcte pour $z < 70°$: si l'astre est trop bas sur l'horizon, le modèle d'atmosphère plane ne convient plus. Au ras de l'horizon, la réfraction R mesurée vaut environ 0,6° (= 36′). Comme le Soleil a un diamètre apparent de 0,5°, il est très déformé (aplati) quand on l'observe à l'horizon.



19 La largeur de la tache d'Airy vaut $\beta = 1{,}2\lambda/D$. Avec un télescope de diamètre $D = 5$ m, $\beta \approx 1{,}4 \cdot 10^{-7}$ rad $= 0{,}03''$. À la distance L, l'objet AB sur la Lune doit avoir la taille minimale $L\beta$ soit environ 50 m.
On ne peut distinguer que des objets de dimensions supérieures à 50 m. En pratique, la turbulence atmosphérique limite ces possibilités à près du double (100 m).
À l'œil nu, la pupille joue le rôle de diaphragme devant le cristallin : D varie de 1 mm (en pleine lumière) à 5 mm la nuit. Quand on observe la Lune, D est 1 000 fois plus petit qu'avec le télescope : on ne peut voir des détails inférieurs à 30″ (voire 1′ avec la turbulence) soit 100 km sur la Lune. Le cratère Copernic, le plus gros des cratères lunaires, est tout juste visible à l'œil avec un diamètre de 93 km. En décembre 1609, Galilée a découvert ces cratères avec une modeste lunette ; leur diamètre dépassait 30 km.

20 Deux rayons provenant de deux points diamétraux E_1 et E_2 du disque stellaire apparent donnent chacun un système de franges d'interférence qui disparaissent quand les taches d'Airy se superposent « à moitié ». Ils sont alors inclinés de l'angle θ tel que $\theta = \beta = 1{,}2\lambda/d$ où d est le diamètre d'ouverture du télescope (c'est la distance d entre les 2 miroirs M_1 et M_2 de l'interféromètre).



Dans le cas de l'étoile Bételgeuse, $\theta = 1{,}2 \times 0{,}575{\cdot}10^{-6}/3{,}073 = 2{,}3{\cdot}10^{-7}$ rad $= 0{,}047''$. Vu à la distance $D = 400$ al, son diamètre linéaire vaut $\Phi_B = \theta \cdot D \approx 900$ millions de km : Bételgeuse est donc 650 fois plus large que le Soleil.
Cette étoile est celle qui possède le plus grand diamètre apparent, détectable uniquement de manière interférentielle. L'intérêt des 2 miroirs mobiles est de pouvoir les écarter graduellement le plus possible de façon à augmenter le diamètre d'ouverture du télescope tout en ayant la possibilité de faire disparaître les franges.

Rayonnement

21 **1.** La 1re information indique que le Soleil rayonne $4{,}4 \cdot 10^6$ tonnes de lumière chaque seconde. La relation d'Einstein $E = m \cdot c^2$ donne :

$$P = 4{,}4 \cdot 10^9 \times (3 \cdot 10^8)^2 \approx 4{,}0 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

2. À partir de la puissance surfacique P_T reçue au niveau de la Terre, on calcule la puissance totale rayonnée par le Soleil actuel : $P' = P_T \cdot S$ où S est l'aire de la sphère de rayon $d = 1$ ua entourant le Soleil. D'où $P' = 8{,}4/60 \times 4\pi \cdot (150 \cdot 10^6 \cdot 10^5)^2 \approx 4{,}0 \cdot 10^{26}$ W (le facteur 10^5 convertit d en cm). On a bien $P' = P$ ce qui permet de calculer la puissance rayonnée de deux manières.

3. Énergie libérable : chaque seconde, le Soleil libère la fraction 4,4/644,4 de sa masse en H, soit environ 7/1 000. S'il était constitué entièrement d'atomes H, sa réserve actuelle serait $M_S.c^2 \approx 1{,}8 \cdot 10^{47}$ J. Il peut donc libérer l'énergie totale $W = (7/1\,000).M_S \cdot c^2 \approx 1{,}2 \cdot 10^{45}$ J.

4. Depuis sa formation, à ce rythme, le Soleil a rayonné l'énergie $E = P \cdot \tau$ avec $P = 4{,}0 \cdot 10^{26}$ W et $\tau = 4{,}5 \cdot 10^9$ ans $= 4{,}5 \cdot 10^9 \times 31{,}5 \cdot 10^6$ s d'où $E \approx 5{,}6 \cdot 10^{43}$ J et $E/(M_S \cdot c^2) \approx 3{,}1 \cdot 10^{-4}$. Le Soleil n'a perdu par rayonnement que 0,3/1 000 de sa réserve (la perte étant si faible, on peut considérer que sa masse actuelle est la même que celle qu'il avait au début de sa vie d'étoile).

5. On suppose qu'il ne fusionnera que le 1/10 de sa masse actuelle. L'énergie libérable est donc $W' = W/10 \approx 1{,}2 \cdot 10^{44}$ J. La puissance (débit d'énergie) étant $P = 4{,}0 \cdot 10^{26}$ W, la durée de vie sera $W'/P \approx 3 \cdot 10^{17}$ s $\approx 10^{10}$ ans (ou 10 milliards d'années). Son âge actuel étant de 4,5 milliards d'années, il sera âgé de 15 milliards d'années à sa mort stellaire, devenant alors rapidement une géante rouge puis une naine blanche et enfin une naine brune, ne rayonnant plus.

22 **1.** Selon la loi de STEFAN, la puissance rayonnée par 1 m^2 de surface de la source (dans toutes les directions et toutes les longueurs d'onde) est proportionnelle à la puissance 4e de sa température absolue : $P = \sigma \cdot T^4$. Ici, $L^* = S \cdot P$ où S est la surface

rayonnante du Soleil, c'est-à-dire la surface extérieure (la photosphère), de rayon $R*$. D'où $L^* = (4\pi.R^{*2}) \cdot \sigma \cdot T^{*4}$.
A.N. : $L^* = 4{,}0 \cdot 10^{26}$ W.

2. Le débit d'énergie (la puissance) se conserve sur toute sphère de rayon a, centrée sur le Soleil. La Terre ne reçoit que la fraction s/S de la puissance émise, où $s = \pi \cdot R_T^2$ (surface du cercle de rayon R_T) et $S = 4\pi \cdot a^2$ (surface de la sphère de rayon a). La conservation de la puissance s'écrit : $L^*/S = L/s$. D'où $L = L^* \cdot (s/S) = L^* \cdot (R_T/2a)^2$ et $L/L^* = (R_T/2a)^2 = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$.

3. La Terre reçoit la puissance L du Soleil et réfléchit $A \cdot L$: elle absorbe donc la puissance $L_a = (1 - A) \cdot L$. Si elle rayonne comme un corps noir à la température T, elle émet la puissance $L_e = (4\pi.R_T^2) \cdot \sigma \cdot T^4$. La condition d'équilibre du corps noir s'écrit : $L_a = L_e$. En remplaçant L et L^* par les expressions précédentes, on trouve $T^4 = T^{*4} \cdot (1 - A) \cdot R^{*2}/(4a^2)$. On remarque que T ne dépend par explicitement de R_T mais seulement de la distance a du Soleil. Le coefficient d'albédo A dépend de la structure et de la composition de l'atmosphère de la Terre.
Les valeurs $A = 0{,}3$ et $T^* = 5\,800$ K conduisent à $T/T^* = 0{,}0442$ puis à $T = 256$ K.

4. Si la Terre est assimilée à un corps noir, alors sa température de surface est 256 K (ou -17 °C). Or, elle est voisine de $+15$ °C, soit plus de 30 K supérieure. Il y a donc une autre source d'énergie qui chauffe et élève la température de -17 °C à $+15$ °C : c'est l'*effet de serre* dû à l'atmosphère qui absorbe une partie du rayonnement émis par la Terre. Les températures -17 °C et $+15$ °C (ou 256 K et 288 K) correspondent respectivement à des puissances ($\sigma.T^4$) de 243 et 390 W/m^2. L'effet de serre est la différence $390 - 243$ soit environ 150 W/m^2.

5. D'après la loi de WIEN, la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum d'intensité du rayonnement est inversement proportionnelle à sa température absolue : $\lambda_m.T = \text{cste}$. L'énoncé permet de calculer la valeur de la constante : $\text{cste} = 0{,}5 \times 5\,800 = 2\,900$ (en μm.K). On en déduit la longueur d'onde du maximum de rayonnement émis par la Terre (en tant que corps noir) : $\lambda = 2\,900/256 \approx 11{,}3$ μm. L'atmosphère est opaque à ce rayonnement infrarouge à cause de la présence de molécules à 3 atomes ou plus (H_2O, CO_2, CH_4, O_3,...) : il y est absorbé, contribuant à élever la température, ce qui confirme l'effet de serre. Le principal gaz à effet de serre (GES) est la vapeur d'eau H_2O (pour environ 90 W/m^2) puis ensuite le dioxyde de carbone CO_2 (pour près de 40 W/m^2) et dans une moindre mesure le méthane CH_4.

Rappels mathématiques

1. Formules de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (1)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (2)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (3)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (4)$$

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b \quad (5)$$

$$\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b \quad (6)$$

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b \quad (7)$$

$$\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \cos a\,\sin b \quad (8)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \quad (9)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \quad (10)$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad (11)$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad (12)$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \quad : \quad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad (13)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad : \quad \cos(x+\pi) = -\cos x \quad (14)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t) \quad ; \quad \int \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \quad (15)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t) \quad ; \quad \int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \quad (16)$$

2. Moyenne d'une fonction périodique

$f(t)$ étant une fonction périodique de t, de période T, de pulsation $\omega = 2\pi/T$, on définit sa moyenne temporelle par

$$\langle f(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

On a, évidemment, $\langle 1\rangle_T = 1$

Exemple : calculons $\langle\cos(\omega t)\rangle_T$. On a :

$$\langle\cos(\omega t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = 0 \tag{18}$$

Donc :

$$\langle\cos(\omega t)\rangle_T = 0 \tag{19}$$

De la même manière, on obtiendrait :

$$\langle\sin(\omega t)\rangle_T = \langle\sin(\omega t)\ \cos(\omega t)\rangle_T = 0 \tag{20}$$

$$\langle\sin(\ n\ \omega t)\rangle_T = \langle\cos(\ n\ \omega t)\rangle_T = 0 \quad \text{avec} \quad n \text{ entier} \geqslant 1 \tag{21}$$

D'autre part :

$$\langle\cos^2(\omega t)\rangle_T = \left\langle\frac{1\ +\ \cos(2\ \omega t)}{2}\right\rangle_T = \frac{1}{2} \tag{22}$$

Finalement :

$$\langle\cos^2(\omega t)\rangle_T = \langle\sin^2(\omega t)\rangle_T = \frac{1}{2} \tag{23}$$

3. Développements limités

Pour $|x| \ll 1$, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots \tag{24}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \tag{25}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \ldots \tag{26}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \tag{27}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \tag{28}$$

$$\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots \tag{29}$$

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots \tag{30}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{31}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots ; \qquad \mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{32}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots ; \qquad \mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{33}$$

4. Quelques relations utiles d'analyse vectorielle

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \Delta f \tag{34}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \vec{0} \tag{35}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = 0 \tag{36}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} \tag{37}$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \tag{38}$$

Imprimé en France par Chirat – 42540 Saint-Just-la-Pendue
N° d'imprimeur : 3690 - N° d'édition : 004067-01
Dépôt légal : octobre 2004